# Vorlesung vom 19.11.2013:

- Abbildungen / Funktionen
- Nachschlag zu Ungleichungen

## 1) Ungleichungen:

Zu den verschiedenen Mittelwerten arithmetisch, geometrisch, harmonisch, quadratisch:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0<a<b$ (o.B.d.A.). „ohne Beschränkung der Allgemeinheit"

Dann gilt:

$$\boxed{a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b}$$

$H(a,b)$ harmonisch, $G(a,b)$ geometrisch, $A(a,b)$ arithmetisch, $Q(a,b)$ quadratisch

Zum harmonischen Mittel:

$$\boxed{H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{G(a,b)^2}{A(a,b)}} \Rightarrow \frac{1}{H(a,b)} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = A\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

Z.B.: $a = \frac{1}{n-1}$, $b = \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow H(a,b) = H\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}} =$ 3. Binom

Stammbrüche: Bilden die „harmonische" Folge

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{n^2-1}}{\frac{1(n+1)+1(n-1)}{(n-1)(n+1)}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{n^2-1}} \cdot \frac{\cancel{n^2-1}}{n+\cancel{1}+n-\cancel{1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{H\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n} = \frac{1}{n}} \Leftarrow \text{„Harmonische Folge" } (a_n),$$

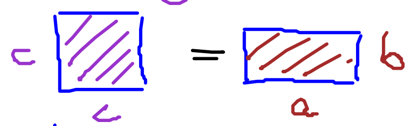
„Folgenindex" $\to$ $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ hängt eng mit der „Naturtonfolge" in der Musik zu einem Ton (= „Obertonreihe") ab!!

Zum geometrischen Mittel:

$$\boxed{G(a,b) = \sqrt{ab}} \Rightarrow G^2(a,b) = a \cdot b$$ ‖ „Quadratur" des Rechtecks

$c := G(a,b) \Rightarrow c^2 = a \cdot b$ „Rechteckflächeninhalt zu Seitenlängen $a>0, b>0$"

„Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge $c>0$."



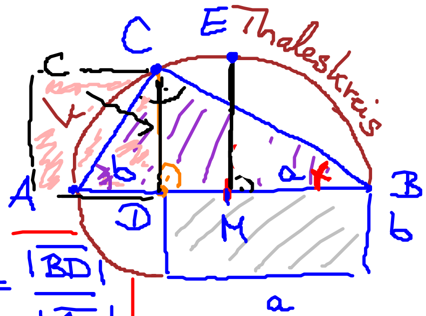

„geometrisches Radizieren"

<u>Spezialfall</u>: $b=1 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{ab}=\sqrt{a}}$

Verfahren der geometrischen Mittelwertkonstruktion:

Es gilt:

$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle BCD$ „ähnlich zu"




$$\Rightarrow \underbrace{\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AD}|}}_{\triangle ACD} = \underbrace{\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}}_{\triangle ABC} = \underbrace{\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{CD}|}}_{\triangle BCD}$$

Thaleskreis vom Durchmesser $d=a+b$ bzw. Radius $r=\frac{a+b}{2}=A(a,b)$

$\Rightarrow$ Mit $\triangle ABC$, $C$ Schnittpunkt des Lotes in $D$ senkrecht zu $\overline{AB}$ mit Kreis $k$, erhalten wir nach dem Satz des Thales ein rechtwinkliges $\triangle$.

Also gilt z.B. der „Höhensatz des Euklid":

$c=|\overline{CD}|$ sei „Länge der Höhe zu $C$; dann gilt:

$$|\overline{AD}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{CD}|^2 \Leftrightarrow ab = c^2 \Leftrightarrow c=\sqrt{ab}=G(a,b)$$

Man „sieht" in der Zeichnung:

$$|\overline{CD}| = G(a,b) \leq |\overline{ME}| = r = A(a,b)$$

<u>Achtung</u>: Was macht der Logarithmus mit einem geom. Mittelwert?

<u>Antwort</u>: $\log[G(a,b)] = \log(\sqrt{ab}) = \log(ab)^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\log(ab) =$

$$= \frac{1}{2}[\log a + \log b] = A(\log a, \log b)$$

$\log(c^d) = d \cdot \log c$

---

2) <u>Zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Ungleichung in $\mathbb{R}$</u>:

Der Betrag einer reellen Zahl (siehe „Trichotomie" der „$>0$"-Relation)

$$|a| := \begin{cases} a, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -a, & a<0 \end{cases} \qquad \text{Z.B.: } |\underbrace{-3}_{<0}| = -(-3) = 3$$

$|a| \in P$

„a Betrag"

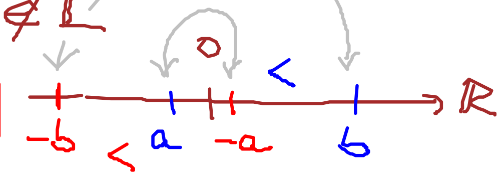
Z.B.: $\mathbb{L}$ bestimmen für die Ungleichung

$$\boxed{\frac{|2x-3|}{3x+4} \geq 2}$$

„Fallunterscheidung" bezüglich der auftretenden linearen Terme!

$$3x+4 \neq 0 \iff x \neq -\frac{4}{3} \implies x = -\frac{4}{3} \notin \mathbb{L}$$

Achtung: $\boxed{a<b \xRightarrow{\cdot(-1)} -a > -b}$




„Vorzeichenwechsel" wichtig zu beachten für $3x+4$ als auch für $2x-3$ (wegen Auflösung Betrag):

2 „kritische" Punkte: $x_1 = -4/3$ (Nenner $=0$), $x_2 = \frac{3}{2}$ (Betrag $=0$)

$\implies$ 3 zu betrachtende Teilintervalle:

$\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{4}{3}\} = \, ]-\infty, -\frac{4}{3}[$

| TERME | $]-\infty, -\frac{4}{3}[$ | $]-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$ | $[\frac{3}{2}, +\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $3x+4$ | $<0$ (−) | $>0$ (+) | $>0$ (+) |
| $2x-3$ | $<0$ (−) | $\leq 0$ (−) | $\geq 0$ (+) |

Hilfs- bzw. Vorzeichentabelle

Das ergibt 3 „Fälle":

(i) $\boxed{x \in \, ]-\infty, -\frac{4}{3}[}$, (ii) $x \in \, ]-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$, (iii) $x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$

Spielen wir Fall (i) durch:

$$\frac{|\overbrace{2x-3}^{<0}|}{\underbrace{3x+4}_{<0}} = \frac{-(2x-3)}{3x+4} \geq 2 \xRightarrow{\cdot(3x+4),\ <0} -2x+3 \leq 2(3x+4) = 6x+8$$

$$\overset{+2x-8}{\Longrightarrow} \quad \underline{-8+3=-5} \le 6x+2x = \underline{8x} \quad \overset{:8}{\Longrightarrow} \quad x \ge -\frac{5}{8}, \text{ d.h. } \boxed{x \in \underbrace{\left[-\tfrac{5}{8}, +\infty\right[}_{=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x\ge -5/8\}}}$$

Fall (i) liefert Teillösungsmenge

$$\underline{\mathbb{L}_1} = \left]-\infty, -\tfrac{4}{3}\right[ \cap \left[-\tfrac{5}{8}, +\infty\right[ = \underline{\emptyset}$$


Am Ende: $\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3}$ ergibt die Gesamtlösungsmenge

ENDE der Vorlesung!