Vorlesung vom 16.01.2014:

- Nachtrag zu den Hausaufgaben
- Vollständige Induktion / Binomialkoeffizienten
- Folgen

---

1) Zu den H-Aufgaben:

I.V.: Induktionsvoraus.

I.B.: Induktionsbehauptung

(38) H(b) z.z.: $\prod_{k=0}^{n}(1+q^{2^k}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$

Im Induktionsschritt:

$n \to n+1$: Rechte Seite

Substituiere in der (I.V.) „n" durch „n+1" (I.B.)

$$\frac{1-q^{\boxed{2^{(n+1)+1}}}}{1-q} = \frac{1-q^{\boxed{2^{n+1}\cdot 2}}}{1-q} = \frac{(1-q^{2^{n+1}})^2}{1-q}$$

Potenzgesetz: $a^{n\cdot m} = (a^n)^m$

Linke Seite

$$\prod_{k=0}^{n+1}(1-q^{2^k}) = \left(\prod_{k=0}^{n}(1-q^{2})\right)^{k} \cdot \underbrace{(1-q^{2^{n+1}})}_{k=n+1}$$

---

(39) Herleitung in (a) und (b):

(a) $$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2] = \underbrace{(\cancel{1^2}-0^2)}_{k=0} + \underbrace{(\cancel{2^2}-\cancel{1^2})}_{k=1} + \underbrace{(3^2-\cancel{2^2})}_{k=2} + \ldots + \underbrace{((n+1)^2-\cancel{n^2})}_{k=n}$$

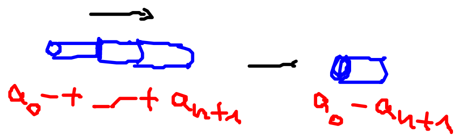
$= (n+1)^2$

Teleskopsumme von der Form

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=0}^{n}\underbrace{a_{k+1}}_{=\ell} - \sum_{k=0}^{n}a_k$$

Indiziere 1. Summe um (=Substitution) $\ell = n+1$

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1}a_\ell - \sum_{k=0}^{n}a_k = a_{n+1} - a_0$$



$\longrightarrow$ Rechne dies auf 2. Variante aus:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\underbrace{(k+1)^2}_{\text{Rechne aus!}}-k^2\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[(\overset{0}{\cancel{k^2}}+2k+1)-\overset{0}{\cancel{k^2}}\right]$$

1. Binom! $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Allgemeiner: $(a+b)^n=a^n+??$ Binomischer Lehrsatz!

$$= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\cdot\sum_{k=0}^{n}k+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}1}_{=1+1+\ldots+1\ (n+1)\text{-mal}} = 2\cdot\sum_{k=0}^{n}k+n+1$$

Zusammengefasst:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^2-k^2\right] = \boxed{(n+1)^2} \overset{!!}{=} 2\cdot\sum_{k=0}^{n}k+(n+1)$$

1. Variante: Teleskopsumme 2. Variante: Rechnen

Diese Gleichung umstellen nach der gesuchten Summe $\sum_{k=0}^{n}k$

$-(n+1)$

$$\iff 2\cdot\sum_{k=0}^{n}k=(n+1)^2-(n+1)=(n+1)\cdot[\underbrace{(n+1)-1}_{=n}]=(n+1)\cdot n$$

$:2$

$$\iff \sum_{k=0}^{n}k=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{\overset{\alpha}{(n+1)}\cdot\overset{(\alpha-1)}{n}}{1\cdot 2}=\overset{\alpha}{\binom{n+1}{2}}$$

Im Fall der Hausaufgabe erhält man

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$$

Sollte hergeleitet werden!!

Verlängere Abgabe!! ㊳ H(b) sowie ㊶ H(b) bis Dienstag (21.01.) in der

Wir leiten jetzt analog zu 39 Ü(a), H(b) eine Summenformel für $\sum_{k=0}^{n} k^3$ her:

Teleskopsumme!!

Ansatz: $$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right] = \underset{k=n}{(n+1)^4} - \underset{k=0}{0^4} = (n+1)^4 \quad (= a_{n+1} - a_0)$$

Binomischer Lehrsatz

2. Variante $$= \sum_{k=0}^{n}\left[\underbrace{(\cancel{k^4}+4k^3+6k^2+4k+1)}_{??}-\cancel{k^4}\right]$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}} \longrightarrow \begin{matrix} n=4 \\ a=k \\ b=1 \end{matrix} : \quad (k+1)^4 = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i} k^i \cdot 1^{4-i}$$

$$= \underbrace{\binom{4}{0}k^0\cdot 1^4}_{i=0} + \underbrace{\binom{4}{1}k^1\cdot 1^3}_{i=1} + \underbrace{\binom{4}{2}k^2\cdot 1^2}_{i=2} + \underbrace{\binom{4}{3}k^3\cdot 1^1}_{i=3}$$

$$+ \underbrace{\binom{4}{4}k^4\cdot 1^0}_{i=4} = \underset{1}{\binom{4}{0}}\cdot 1 + \underset{4}{\binom{4}{1}}k + \underset{\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3}{\cancel{2}_1}=6}{\binom{4}{2}}k^2 + \underset{\binom{4}{1}=4}{\binom{4}{3}}k^3 + \underset{\binom{4}{0}=1}{\binom{4}{4}}k^4$$

$$= 1+4k+6k^2+4k^3+1k^4$$

Einige Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{i=1}^{k}\frac{\alpha+1-i}{i} \Rightarrow \binom{\alpha}{0} = \prod_{i=1}^{0}\ldots = 1$$

leeres Produkt, da $0<1$!

$$\binom{\alpha}{1} = \prod_{i=1}^{1}\frac{\alpha+1-i}{i} = \underbrace{\frac{\alpha+1-1}{1}}_{i=1} = \alpha$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}$$

Beachte auch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Zwillingseigenschaft!!

Also zusammengefasst:

$$(k+1)^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1$$

$$\Rightarrow (n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^4-k^4\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[(1+4k+6k^2+4k^3+\cancel{k^4})-\cancel{k^4}\right]$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}1}_{=n+1} + 4\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k}_{=\frac{(n+1)n}{2}} + 6\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k^2}_{=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}} + 4\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^3} \;??$$

HA

$$= (n+1) + \overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{(n+1)n}{\cancel{2}_1} + \overset{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{(n+1)\cdot n(2n+1)}{\underset{1}{\cancel{6}}} + 4\cdot\sum_{k=0}^{n}k^3$$

$$= (n+1) + 2n(n+1) + (n+1)n(2n+1) + 4\sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$= (n+1)\cdot\Big[\underbrace{1+2n+n(2n+1)}_{=1+3n+2n^2=(2n+1)(n+1)}\Big] + 4\cdot\sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$= (n+1)^2\cdot(2n+1) + 4\cdot\sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$\Longrightarrow 4\cdot\sum_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1) = (n+1)^2\cdot\Big[\underbrace{(n+1)^2-(2n+1)}_{=n^2}\Big]$$

$:4$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}} = \left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)^2$$

ENDE der Vorlesung !!!