Vorlesung vom 14.11.2013:

- Anordnungsrelationen
- Abbildungen / Funktionen

zu 12Ü (Aufgabe):

$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$; $[a,b] := \{(a',b') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (a',b') \sim_R (a,b)\}$

„Äquivalenzklasse zu (a,b)"

Rechenoperation auf den Ä-Klassen:

$[a,b] + [c,d] := [a+c, b+d]$

$[a,b] \cdot [c,d] := [ac+bd, ad+bc]$

} Beide Operationen sind „wohldefiniert", d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten!!

Analoges Beispiel aus den ganzen Zahlen:

Zerlege $\mathbb{Z}$ in die 2 Äquivalenzklassen „gerade" und „ungerade" Zahlen durch die Relation (= Äquivalenzrelation):

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ 2) \iff 2 \mid (b-a)$$

„a kongruent zu b modulo 2" — 2 ist Teiler von b−a

z.B. $3 \equiv -11 \ (\mathrm{mod}\ 2)$, denn: $(-11)-3 = -14 = (-7)\cdot 2$, d.h. $2 \mid -14$

$3 \not\equiv 10 \ (\mathrm{mod}\ 2)$, denn: $10-3 = 7$, d.h. $2 \nmid 7$

Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen gegeben durch:

$[1] = \{a \in \mathbb{Z} : 2 \mid a-1\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ ‖ Menge aller ungeraden Zahlen!

$1 \in [1]$: Repräsentant der Ä-Klasse [1]

Dann gilt: $[1] = [3] = [-17]$

$[0] = \{a \in \mathbb{Z} : 2 \mid a-0 = a\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ ‖ Menge aller geraden Zahlen!

<u>Operationen auf den Ä-Klassen:</u>

$[a] + [b] := [a+b]$, z.B.: $\underset{[0]}{[2]} + \underset{[1]}{[-5]} = [2-5] = [-3] = [1]$

$[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$ $\qquad [2]\cdot[-5] = [-10]$

Beweis:

$\overset{\shortparallel}{[0]} \cdot \overset{\shortparallel}{[1]} - \overset{\shortparallel}{[0]}$

$a \equiv a' \pmod 2 \wedge b \equiv b' \pmod 2 \Longrightarrow a+b \equiv a'+b' \pmod 2$ und

z.z. $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod 2$.

$a \equiv a' \pmod 2,\ b \equiv b' \pmod 2$

$\Longleftrightarrow 2 \mid a-a' \wedge 2 \mid b-b' \Rightarrow 2 \mid (a'-a)+(b'-b) = (a'+b')-(a+b)$

$\Rightarrow a+b \equiv a'+b' \pmod 2$

$\Rightarrow 2 \mid \underbrace{(a'-a)}_{=2\cdot k} \cdot b' + a \underbrace{(b'-b)}_{=2\cdot \ell} = a'b' - ab' + ab' - ab = a'b' - ab$

$\Longrightarrow ab \equiv a'b' \pmod 2$

Wir haben also nur $\underline{\underline{2}}$ "Ä-Klassen" bezüglich der Relation "$\equiv \pmod 2$":
$[0]$, $[1]$, und es gilt:

kleines "$1+1$"

$[0]+[0]=[0]$
$[0]+[1]=[1]+[0]=[1]$
$[1]+[1]=[2]=[0]$

$[0]\cdot[0]=[0]=[0]\cdot[1]=[1]\cdot[0]$
$[1]\cdot[1]=[1]$

kleinstmögliches "$1\cdot 1$"

Umgangssprachlich:

gerade plus/mal gerade = gerade	$[0]+[0]=[0]$
gerade plus ungerade = ungerade	$[0]+[1]=[1]$
gerade mal ungerade = gerade	$[0]\cdot[1]=[0]$
ungerade plus ungerade = gerade	$[1]+[1]=[0]=[2]$
ungerade mal ungerade = ungerade	$[1]\cdot[1]=[1]$

Zu 12(d):

$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2/_\sim = \{[a,b]_\sim : (a,b) \in \mathbb{N}^2\}$ mit $\boxed{(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c}$

heißt Abbildung, wenn jedem $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges Element $\varphi(n) \in \mathbb{N}^2/_\sim$ zugeordnet wird. Hier: $\boxed{\varphi(n) := [n+1, 1]}$

Z.B.: $\boxed{\varphi(3) = [4,1]} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : \underbrace{a+1=b+4}_{(a,b)\sim(4,1)}\} = [\underset{a}{8},\underset{b}{5}] = [\underset{a}{10},\underset{b}{7}]$

$+4$: $a+5=b+8$

$(a,b) \in [4,1] \Leftrightarrow a+1 = b+4$

$\underset{4}{a}+1=\underset{1}{b}+4$

$\varphi(5) = [6,1] = [7,2] = [100,95]$

$(a,b) \in [6,1] \iff \underset{6}{a} + 1 = \underset{1}{b} + 6$

Es ist nun zu zeigen:

$\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$ sowie $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

Es gilt:

$\varphi(m+n) = [m+n+1, 1]$

Andererseits:

$\varphi(m) + \varphi(n) = [m+1, 1] + [n+1, 1] = [m+n+2, 2] \overset{?}{=} [m+n+1, 1]$

Beachte: $(m+n+2, 2) \sim (m+n+1, 1) \iff m+n+3 = 2+m+n+1$ ✓

$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$

Ebenso:

$\varphi(m \cdot n) = [mn+1, 1]$

Andererseits:

$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = [m+1, 1] \cdot [n+1, 1] \overset{\downarrow}{=} [(m+1)(n+1)+1, (m+1) \cdot 1 + 1 \cdot (n+1)]$

$[a, b] \cdot [c, d] = [ac+bd, ad+bc]$

$= [mn+m+n+2, m+n+2] \overset{?}{=} [mn+1, 1] = \varphi(m \cdot n)$

Beachte: $(mn+m+n+2, m+n+2) \sim (mn+1, 1)$

$\iff (mn+m+n+2) + 1 = (m+n+2) + (mn+1)$ ✓

Nachweis der Injektivität von φ:

„injektiv" heißt: $\forall m, n \in \mathbb{N}: \ m \neq n \Rightarrow \varphi(m) \neq \varphi(n)$

$\iff \forall m, n \in \mathbb{N}: \ \boxed{\varphi(m) = \varphi(n) \Rightarrow m = n}$ zu zeigen!

Hier: $\varphi(m) = [m+1, 1] \overset{!}{=} \varphi(n) = [n+1, 1]$

$\Rightarrow (m+1, 1) \sim (n+1, 1) \Rightarrow m+2 = n+2 \Rightarrow m = n$ ∎

ENDE der heutigen Vorlesung!