Vorlesung vom 14.01.2014:

- Die natürlichen Zahlen (Peano)
- Prinzip der vollständigen Induktion
- Rekursionsprinzip

---

1) Zum Binomialkoeffizienten und der Fakultät:

„n Fakultät"

A) Fakultät:

Produkt $\prod_{k=1}^{n} k = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}_{n \text{ Faktoren}} =: \boxed{n!}$

$\boxed{a_k = k}$

Leeres Produkt: $0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$ // Neutrales Element der Multiplikation

„rückbezüglich"

Achtung: $0 < 1$!!

„Rekursive Definition":

(i) Startwert (hier: $n=0$): $\boxed{0! := 1}$

(ii) Rekursionsvorschrift ($n \to n+1$):

Falls $n!$ bekannt, dann gelte:

$$\boxed{(n+1)! = n!(n+1)}$$

Anders ausgedrückt:

$$a_n := n! \Rightarrow \boxed{\underbrace{a_{n+1}}_{k} = (n+1)! = \underbrace{n!}_{=a_n}(\underbrace{n+1}_{k}) = (n+1)\cdot a_n}$$

Programmiertechnik:

```
Fak=1;
For i=1 to n
do
    Fak=Fak*i;
    i=i+1
done
```

Damit definiere ich die „Folge" (a_n) der Fakultäten:

$0! = \boxed{a_0 = 1}$ per Definition (Startwert) $\Rightarrow a_1 = 1! = 1\cdot a_0 = 1\cdot 1 = 1$,

$n = 1$

$a_2 = 2\cdot a_1 = 2\cdot 1 = 2$, $a_3 = 3\cdot a_2 = 3\cdot 2 = 6$, Schleife n-fach durchlaufen!

Schöne Interpretation für $n!$:

$n!$ ist die Anzahl an Möglichkeiten n verschiedene Objekte der Reihenfolge nach anzuordnen, z.B. n Personen auf n Stühle / Plätze zu verteilen.

B) Binomialkoeffizient:

Zunächst für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ mit $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i} = \underbrace{\frac{n}{1}}_{i=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{2}}_{i=2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n+1-k}{k}}_{i=k}$$

„rückwärts" „a_i" für fest gewähltes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Longrightarrow \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}}$$

„$(n-k)!$"

$(*)$
$$\boxed{= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Erweitern

Beachte: $k + (n-k) = n$

Z.B.: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \binom{7}{4}$, $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \binom{7}{5}$

$n=7$, $k=3$

„$7-3$"

Daraus resultiert die „Zwillingseigenschaft":

„empirisch"

Allgemein gilt: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

Beweis:

Beachte: Substituiere „k" in (*) durch „n-k"

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot[n-\underbrace{(n-k)]}_{=n-n+k=k}!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{(*)}{=} \binom{n}{k}$$

Jetzt verallgemeinerter Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k}$ für $k\in\mathbb{N}_0$ und $\alpha\in\mathbb{R}$ beliebig:

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} := \prod_{i=1}^{k}\frac{\alpha+1-i}{i} = \frac{\overset{i=1}{\alpha}\cdot\overset{i=2}{(\alpha-1)}\cdot\overset{i=3}{(\alpha-2)}\cdot\ldots\cdot(\alpha+1-k)}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}_{k \text{ Faktoren}}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+1-k)}{k!}}$$

Wichtig: $\boxed{\binom{\alpha}{0} = \prod_{i=1}^{0}\frac{\alpha+1-i}{i} := 1}$

leeres Produkt, da $0<1$

Rekursionsvorschrift? (über „k" laufen)

Startwert: $k=0$: $\boxed{\binom{\alpha}{0}=1} = a_0$

Rekursionsvorschrift:

$$\boxed{a_{k+1}} = \binom{\alpha}{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1}\frac{\alpha+1-i}{i} = \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\alpha+1-i}{i}\right)\cdot\frac{\overset{(\alpha+1)-(k+1)}{\alpha-k}}{\underset{i=k+1}{k+1}}$$

$$= \frac{\alpha-k}{k+1}\cdot\binom{\alpha}{k} = \boxed{\frac{\alpha-k}{k+1}\cdot a_k}$$

z. B.: $\binom{193}{23} = \frac{193-22}{23}\cdot\binom{193}{22} = \frac{171}{23}\cdot\binom{193}{22}$

Fall: $k+1=23$, $k=22$, $\alpha=193$

Fall „k"

Im Fall $\alpha=\sqrt{2}$, $k=3$:

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\sqrt{2}}{3} = \frac{\overset{\alpha}{\sqrt{2}}\cdot\overset{(\alpha-1)}{(\sqrt{2}-1)}\overset{(\alpha-2)}{(\sqrt{2}-2)}}{3!} \qquad 3! = 1\cdot2\cdot3=6 \qquad \sqrt{2}^2=2, \ \in\mathbb{R}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot(2-2\sqrt{2}-1\sqrt{2}+2)}{} = \sqrt{2}(4-3\sqrt{2})$$

$= \frac{4\sqrt{2}-6}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{2} - 1 \in \mathbb{R}$

Axiomatische Einführung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:

Peano (1858–1932):

„Abzählprinzip"

(P1) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$ // $\Rightarrow \mathbb{N} \neq \emptyset$

(P2) Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen eindeutigen „Nachfolger" $n' \in \mathbb{N}$

(P3) $n = 1$ ist kein Nachfolger einer anderen Zahl $n \in \mathbb{N}$

(P4) Besitzen zwei Zahlen denselben Nachfolger, sind sie gleich: $\forall n, m \in \mathbb{N}: n' = m' \Rightarrow n = m$

Nachfolger!!

Induktionsprinzip (wichtig!!)

(P5) Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ derart, dass

(i) $1 \in M$ und

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: n \in M \Rightarrow n' \in M$,

dann gilt: $M = \mathbb{N}$

Achtung: Bei mir ist $0 \notin \mathbb{N}$

Sonst $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

In den Aufgaben lassen wir 0 als kleinste nat. Zahl zu!!

Anwendung: Ist $A(n)$ eine Aussage(form) über natürliche Zahlen und will man zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so muss man für die Menge

$$\boxed{M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}}$$

zeigen:

Beweisprinzip vollständige Induktion!!

(i) $1 \in M \iff A(1)$ gilt

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: n \in M \Rightarrow n' = n+1 \in M$

$\Leftrightarrow$ A(n) wahr $\Rightarrow$ A(n+1) wahr

2 Teile: (i) Induktionsanfang (I.A.)

(ii) Induktionsschritt $n \to n+1$

(I.V) $\Rightarrow$ (I.B)

Dann folgt: $M = \mathbb{N}$

Beispiel:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeige man, dass gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$

$= \binom{n+1}{2}$ Dreieckszahl

ENDE der Vorlesung !!