Vorlesung vom 12.11.2013:

- Abbildungen, Funktionen
- Äquivalenz-, Ordnungsrelation

Ordnungsrelation ist gegeben durch (AR), (AS), (TRA) „<"

strenge?

Wir brauchen zur zugehörigen Übungsaufgabe Ü14 den Begriff eines Körpers:

Gegeben eine Menge $K\,(\neq\emptyset)$ sowie zwei innere Verknüpfungen, also Relationen $+(\,,\,)\subseteq K\times K$ und $\cdot(\,,\,)\subseteq K\times K$, so dass jedem Paar $(a,b)\in K\times K$ ein eindeutiges $\boxed{c:=+(a,b)=:a+b\in K}$ „Addition" und ein eindeutiges $\boxed{d:=\cdot(a,b)=:a\cdot b\in K}$ „Multiplikation" existieren.

Das Konstrukt $(K,+,\cdot)$ „Tripel" heißt ein Körper, wenn folgendes gilt:

Axiome des Körpers

$\boxed{\forall a,b,c\in K}$

	Addition	Multiplikation
(ASS)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
(KOM)	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
(NE)	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$

genauer: $\boxed{\exists 0\in K\,\forall a\in K:}$ $\qquad \boxed{\exists 1\in K\,\forall a\in K:}$

$\forall a\in K\,\exists 0\in K$ $\qquad \boxed{\forall a\in K^*\,\exists a^{-1}\in K:}$ mit $K^*=K\setminus\{0\}$

(IE) $a+(-a)=0$ $\qquad a\cdot a^{-1}=1$

$\boxed{\forall a\in K\,\exists(-a)\in K:}$

(DIS) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$\exists (-a) \in K \; \forall a \in K$:

Aufgabe 14: Wir sprechen von einem geordneten Körper, wenn es einen „ausgezeichneten" Bereich $P \subseteq K$ gibt mit $0 \notin P$, so dass gilt:

Trichotomie

(TRI) $\boxed{\forall a \in K: \text{ entweder } a \in P \text{ oder } -a \in P \text{ oder } a = 0}$

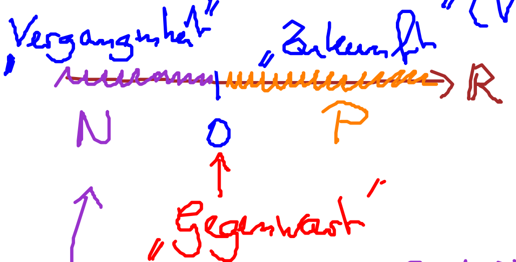
(VA) $\forall a,b \in K: \quad a \in P \wedge b \in P \Rightarrow a+b \in P$

(VM) $\forall a,b \in K: \quad a \in P \wedge b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$

} Verträglichkeit mit Addition/Multiplikation.

Oder: P ist bezüglich „+" und „·" abgeschlossen!

Motivation: $\mathbb{R}$



$N = \mathbb{R} \setminus (P \cup \{0\}) = (P \cup \{0\})^c$

Man definiert: „$0 < a$" $:\Leftrightarrow a \in P$. Dann:

(TRI) $\forall a \in K: \text{ entweder } 0 < a \text{ oder } 0 < -a \text{ oder } a = 0$

Definiere zusätzlich: $\boxed{a > 0 \; :\Leftrightarrow 0 < a} \Leftrightarrow a \in P$

(VA)
(VM) $\forall a,b \in K: \quad a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b > 0 \\ a \cdot b > 0 \end{cases}$

Nun definieren wir:

$\boxed{a < b \; :\Leftrightarrow 0 < b + (-a) =: b - a} \Leftrightarrow b - a \in P$

$$a > b :\Leftrightarrow b < a \Leftrightarrow a-b = a+(-b) > 0 \Leftrightarrow a-b \in P$$

$$\boxed{a \leq b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b}$$

$$a \geq b :\Leftrightarrow b \leq a$$

z.z.: $(K, \leq)$ erfüllt (RE), (ID) und (TRA), sofern $(K,<)$ die Eigenschaften (AR), (AS) und (TRA).

14a) z.z.: $\boxed{a < b :\Leftrightarrow b-a \in P}$ besitzt die Eigenschaften der strengen Ordnungsrelation:

(AR): Für jedes $a \in K$ gilt:

$$\neg(a<a) \Leftrightarrow \neg(a-a = a+(-a) = 0 \in P)$$

$$\Leftrightarrow 0 \notin P \quad \checkmark \quad \text{Gilt nach Definition von } P.$$

(AS): Für $a,b \in K$ beliebig gilt:

$$a<b \Leftrightarrow \underbrace{b-a}_{=c} \in P \overset{(TRI)}{\Longrightarrow} \underbrace{-(b-a)}_{=-c} = a-b \notin P$$

$$\Rightarrow \neg(a-b \in P) \Leftrightarrow \neg(b<a) \quad \checkmark$$

(TRA): Für $a,b,c \in K$ beliebig gilt:

$$a<b \wedge b<c \Leftrightarrow b-a \in P \wedge c-b \in P$$

$$\underset{(VA)}{\Longrightarrow} (b-a)+(c-b) = c-a \in P \Leftrightarrow a<c \quad \checkmark$$

14b): Es folgen nun weitere Rechenregeln:

(i) $\forall a,b,c \in K$: $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

Beweis: $a<b \Leftrightarrow b-a \in P \Leftrightarrow \underbrace{(b+c)-(a+c)}_{=b-a} \in P$

$$\Rightarrow a+c<b+c$$

(ii) $\forall a,b,c \in K$: $\boxed{a<b \wedge \underset{\text{z.B. } c=-1}{c<0} \Rightarrow bc < a\cdot c} \Leftrightarrow ac>bc$

Beweis: $a<b \wedge c<0 \overset{(TRI)}{\Longleftrightarrow} b-a \in P \wedge -c \in P$

$\Leftrightarrow c \notin P \cup \{0\}$

[VIc] $\Longrightarrow (b-a)\cdot(-c) = -bc+ac = ac-bc \in P$

$\Leftrightarrow bc < ac$ $\blacksquare$

ENDE der Vorlesung!