Vorlesung vom 09.01.2014:

- Nachtrag trigonometrische Funktionen
- Natürliche Zahlen, Bereich $\mathbb{N}$ $\longrightarrow$ vollständige Induktion
- Summen / Produkte, Binomialkoeffizienten, Fakultäten

1) Zu trigonometrischen Funktionen:

Phänomen „Schwebung": Additive Überlagerung von 2 Sinusschwingungen dicht beieinander liegender Frequenzen.

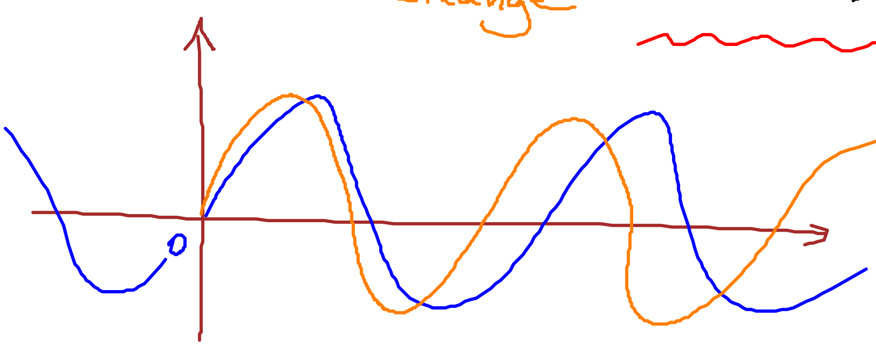
Frequenz: ω $[1/t]$ „Schwingungen pro Zeiteinheit" ← $\Delta t = 1$ sec

Zusammenhang mit Periodenlänge (= Zeitintervall für eine Periode):

$\boxed{2\pi\omega \cdot T = 2\pi}$: $T = 1 \Rightarrow \omega = 1$

Periodenlänge

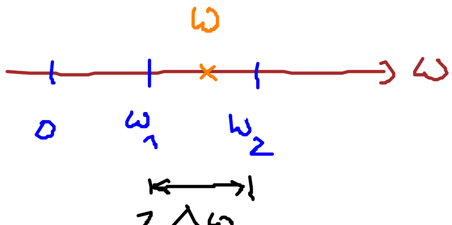
$T = 2 \Rightarrow \omega = 1/2$



„∿" + „∿" = ??

$$y = f(t) = \sin(2\pi\omega_1 t) + \sin(2\pi\omega_2 t) \overset{!!}{=} 2\cdot\cos(2\pi\Delta\omega t)\cdot\sin(2\pi\omega t)$$

zu zeigen!



Idee: $\boxed{\begin{array}{l}\omega = \text{arithm. MW}\\ \Delta\omega = \text{halbe Diff.}\end{array}}$

Dann: $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$

$$\Rightarrow \sin(2\pi\omega_1) = \sin(2\pi(\omega-\Delta\omega)t) \overset{(*)}{=} \dots$$

$$\sin(2\pi\omega_2) = \sin(2\pi(\omega+\Delta\omega)t) \overset{(*)}{=} \dots$$

(*) Additionstheorem!

Es folgt z.B.:

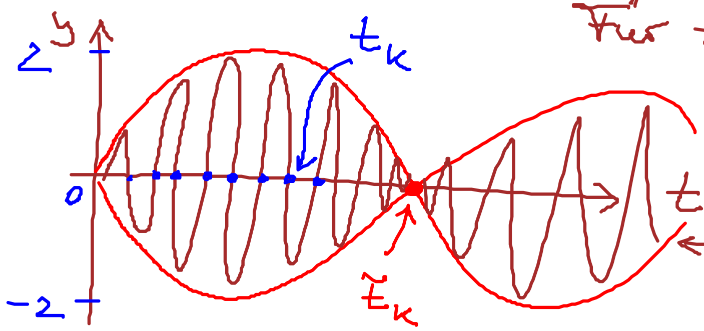
$$y = f(t) = 0 \iff \boxed{\sin(2\pi\omega t) = 0 \ \lor\ \cos(2\pi\Delta\omega \tilde{t}) = 0 \ (*)}$$

$$\iff \boxed{\omega t = \frac{k}{2}\ (k\in\mathbb{Z}) \ \lor\ \Delta\omega t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}\ (k\in\mathbb{Z})}$$

$$\iff t_k = \frac{k}{2\omega} \ \lor\ \tilde{t}_k = \frac{2k+1}{4\cdot\Delta\omega} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

„Für" $t>0$: $k\in\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$

Skizze etwa:



$y = \pm 2\cos(2\pi\Delta\omega t)$

$y = A(t)\cdot\sin(2\pi\omega t)$

(*) Beachte:

$\cos(\underbrace{2\pi\Delta\omega\tilde{t}}_{=u}) = 0 \iff u = 2\pi\Delta\omega\tilde{t} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi(2k+1)}{2}$

$\iff \frac{u}{2\pi} = \Delta\omega\tilde{t} = \frac{\cancel{\pi}(2k+1)}{2\cdot 2\cancel{\pi}} = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}$ $\quad (:2\pi)$

2) Summen/Produkte:

Seien $a_1,\dots,a_n$ n Zahlen. Dann definieren wir:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n} \qquad \boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$

griech. „Sigma" (Summe) — griech. „Pi" (Produkt)

k: Laufindex, $k\in\mathbb{N}$

Konkret: $a_k = (k+1)^2 \quad (k\in\mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=3}^{6} a_k = \sum_{k=3}^{6}(k+1)^2 = (3+1)^2 + (4+1)^2 + (5+1)^2 + (6+1)^2 = 4^2 + \dots + 7^2 = \sum_{k=4}^{7} k^2$

„Grenzen" für k

Abbildungsvorschrift

(a_k) mit $a_k = f(k) = (k+1)^2$: wird (später) Folge genannt

$f = (a_k) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$k \longmapsto a_k = f(k) = (k+1)^2$

Phänomen Umindizierung!!

<u>Analog</u>: $\boxed{\prod_{k=3}^{6} a_k} = \prod_{k=3}^{6} (k+1)^2 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 = \boxed{\prod_{k=4}^{7} k^2}$

$3+1$

Zur Umindizierung (= Substitution) 2 Beispiele:

(37) (a) $\sum_{n=0}^{5} (n+1)^2 = \sum_{k=?} k^2$

(d) $\prod_{n=2}^{5} \frac{n-1}{n+2} = \prod_{k=?}^{?} \frac{k-?}{k}$

Substitution: $\boxed{k = n+1}$. Dann:

$n=0 \to k=1$

$n=5 \to k=6$

<u>Zu (a)</u>: $\sum_{n=0}^{5} (\underbrace{n+1}_{=k})^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 \quad (= 1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2)$

<u>Zu (d)</u>: $\boxed{\prod_{n=2}^{5} \frac{n-1}{\underbrace{n+2}_{=k}}} = \prod_{k=4}^{7} \frac{(k-2)-1}{k} = \boxed{\prod_{k=4}^{7} \frac{k-3}{k}}$

Substitution: $\boxed{k = n+2} \Rightarrow \boxed{n = k-2}$

$n=2 \to k=4$

$n=5 \to k=7$

$= \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{4}}{7} = \frac{1}{35}$

3 wichtige Produkte:

A) <u>Potenz</u>: $a_k = a$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$\boxed{a^n := \prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}} \Rightarrow \boxed{a^0 = \prod_{k=1}^{0} a := 1}$

Index müsste rückwärts laufen!

Unerlaubt!!

D.h.: Allgemein definiert man

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} a_k := 1} \quad \text{für } n < m \quad (= \text{leeres Produkt})$$

Neutrales Element der Multiplikation!

Analog: $$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k := 0} \quad \text{für } n < m \quad (= \text{leere Summe})$$

Neutrales Element der Addition!

B) Fakultät: $a_k = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ Faktoren!}} \quad \text{mit} \quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$$

„n Fakultät"

leeres Produkt

$$1! = \prod_{k=1}^{1} k = \underset{k=1}{1}$$

C) Binomialkoeffizient: Zunächst für $n, k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\boxed{\binom{n}{k} := \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}} = \frac{\overset{i=1}{n} \cdot \overset{i=2}{(n-1)} \cdot \overset{i=3}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

„n über k"

Z.B.: $$\boxed{\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \cdot 5}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = 35}$$

Mehr dazu am Dienstag!!

Bitte, Lösungsblatt von der Homepage herunterladen!

ENDE der Vorlesung!!!