

ANALYSIS I (V) vom 07.11.2013

2. Übungsblatt: 13. a) b)

10.
11.

In der Übungsaufgabe 12 und der Hausaufgabe 13:

Relation in M für $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bzw. $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$$\text{D.h. } R \subseteq M \times M = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

$$\text{bzw. } R \subseteq M \times M = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$$

Äquivalenzrelation im Zusammenhang mit Zahlbereichserweiterungen

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen, beginnend ab "1".

$$0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \cdot n = 0$$

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ Peano (kommt noch)

Gleichungen

$$b + x = a \quad x = a - b$$

Zu den Gleichungen

$$b + x = a \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{N}$$

$$(1) \quad 3 + x = 7 \quad \text{ist lösbar in } \mathbb{N}: x = 4$$

$$7 + x = 3 \quad \text{ist unlösbar in } \mathbb{N}:$$

Also: Neue Zahlen,
Zahlbereich: $\mathbb{Z}$

neu!
 $\downarrow$
 $x = -4 \in \mathbb{Z}$ sei Lösung zu $7 + x = 3$

Problem:

$$x = +4 \quad \text{ist ja auch Lösung zu}$$

$$\begin{array}{l} 7 + x = 11 \\ 3 + x = 7 \\ \hline 14 + x = 18 \\ 14 + x = 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} +11 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad b + x = a \quad \triangleq (a, b) \\ (1) \quad d + x = c \quad \triangleq (c, d) \\ (2) \quad (b+c) + x = (a+c) \\ (1) \quad (a+d) + x = (a+c) \\ \hline (1) \quad a + d = b + c \end{array}$$

Ganze Zahlen als Äquivalenzklassen $\triangleq b + x = a$
 $[a, b] = [(a, b)]$

Gleichungen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \quad \begin{array}{l} b \cdot x = a \quad \textcircled{c} \quad bc \cdot x = ac \\ d \cdot x = c \quad \textcircled{a} \quad ad \cdot x = ac \end{array}$$

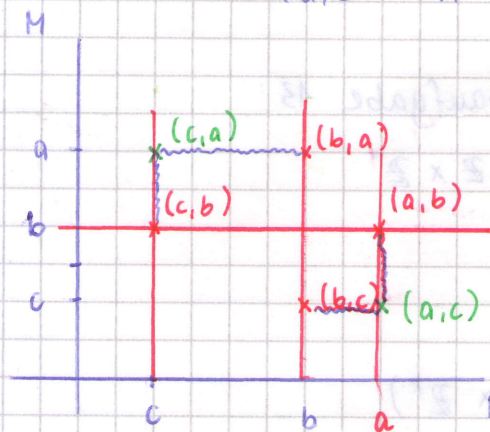
Multiplikation

$$x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{bx = a}{b \neq 0}$$

Transitivität

$$\forall a, b, c \in M: a \underset{R}{\sim} b \wedge b \underset{R}{\sim} c \Rightarrow a \underset{R}{\sim} c$$

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

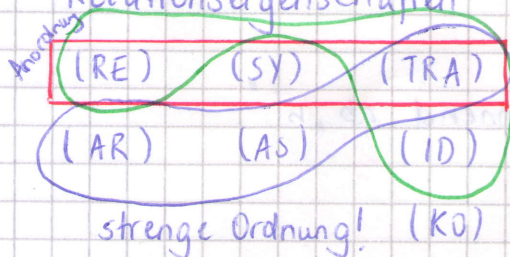


$$(a, b)$$

$$(c, b) \in R \wedge (b, a) \in R$$

$$\Rightarrow (c, a) \in R$$

Relationseigenschaften



Äquivalenz-
relationen