Vorlesung vom 05.12.2013:

- „Weitere Auflistung der elementaren Funktionen" $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$
- Affin lineare und quadratische Funktion

  Geradengleichung (= Graph) — Parabelgleichung (= Graph)

- Komposition von f mit einer affinlinearen Fkt. → Translation, Streckung, Spiegelung

---

A) Weitere elementare Funktionen:

Ausgehend von der Potenzfunktion $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ mit Basis $a > 0$, $a \neq 1$ erhalten wir wegen der strengen Monotonie (Beweis siehe unten) die Existenz der Umkehrfunktion:

4) Logarithmusfkt.

gegeben ??

$$\boxed{y = f^{-1}(x) = \log_a x} \iff x = f(y) = a^{y}$$

ist Lösung der Gleichung

Beweis der Monotonie von $f(x) = a^x$:

Sei $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow \boxed{a^{x_2 - x_1} \begin{cases} < 1 = a^0 & \text{für } a < 1 \\ > 1 = a^0 & \text{für } a > 1 \end{cases}}$

$$\Rightarrow a^{x_2 - x_1} = a^{x_2} \cdot a^{-x_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} \begin{cases} < 1 & \text{für } a < 1 \\ > 1 & \text{für } a > 1 \end{cases}$$

Potenzgesetze — 2 Ungleichungen

$$\overset{a^{x_1} > 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} a^{x_2} < a^{x_1} & \text{für } a < 1 \\ a^{x_2} > a^{x_1} & \text{für } a > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} & \text{für } a < 1 \\ a^{x_1} < a^{x_2} & \text{für } a > 1 \end{cases}$$

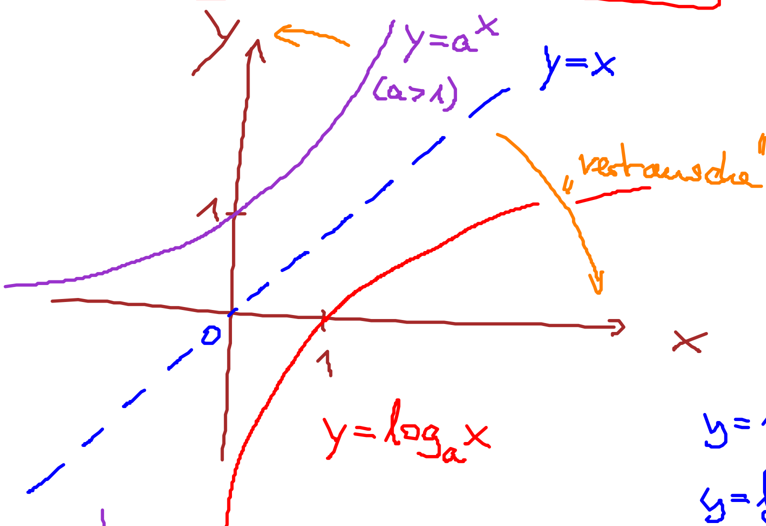
$\Rightarrow f(x) = a^x$ ist streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{Bmatrix}$ für $\begin{Bmatrix} a<1 \\ a>1 \end{Bmatrix}$.

Beachte: Im Augenblick nehmen wir quasi als Vorgabe an, dass stets gilt: $a^x \begin{Bmatrix} >1 & \text{für } a>1 \\ <1 & \text{für } a<1 \end{Bmatrix}$ für alle $x>0$!!

Für den Logarithmus gilt:

$\boxed{\log_a : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}}$

Graph von $\log_a x$ ist das „Spiegelbild" von $f(x)=a^x$ an der Geraden $y=x$.
Graph der Identitätsfunktion

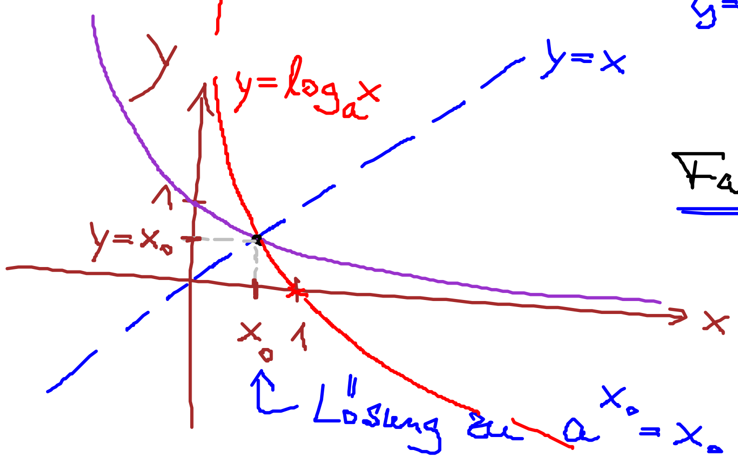


Fall $a>1$, Spezialfall: $a=e$, $e=2{,}7182..$ Eulersche Zahl

$y=f(x)=\exp(x)=e^x$ Exponentialfkt.

$y=f^{-1}(x)=\ln(x)=\log_e(x)$ natürlicher Logarithmus.

Fall $0<a<1$.



Beachte: $\boxed{f(x)=a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x} = e^{\lambda x}}$ mit $\lambda = \ln a$

$= g(g^{-1}(a)) = a$
für $g(x)=e^x$

Also: $f(x) = a^x = \exp(\lambda x) = (\exp \circ h)(x)$, mit

$h(x) = \lambda x$, $\lambda = \ln a$

$\Rightarrow$ $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ ist Lösung zu $x = a^y = e^{\lambda y}$ mit $\lambda = \ln a$

$\Rightarrow$ $\ln(x) = \lambda y = \ln(e^{\lambda y})$ $\overset{:\lambda}{\Longrightarrow}$ $\boxed{y = f^{-1}(x) = \underbrace{\log_a x}_{f(y)} = \frac{\ln(x)}{\lambda} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$

Es gelten die (allgemeinen) Potenzgesetze und daraus folgend folgende Logarithmengesetze:

	$f(x) = a^x$	$f^{-1}(x) = \log_a x \overset{\text{kurz}}{=} \log x$
1)	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\boxed{\log(x \cdot y) = \log x + \log y}$
2)	$(a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$	$\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log(x)$
3)	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
4)	$a^x \cdot b^x \overset{??}{=} (ab)^x$	??
	$\frac{a^x}{b^x} \overset{??}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^x$	

Beweis siehe unten!

gilt für $x \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $b > 0$.

Beweis zu $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$:

Sei $u := \log_a(x)$, $v := \log_a(y)$. Dann gilt:

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$x = a^u$, $y = a^v$ $\Rightarrow$ $\boxed{x \cdot y = a^u \cdot a^v \overset{(PG)}{=} a^{u+v}}$ Potenzengleichung

$\log_a x + \log_a y = u + v = \log_a(xy)$ ■

---

5) Wurzelfunktionen als Umkehrfunktion zu $y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

Die Funktion $y = f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist zumindest auf $[0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_1 \cdot x_1 < x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_2 = x_2^2$$

$x_1 > 0$ $x_2 > 0$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_1 \cdot x_1^2 < x_1 \cdot x_2^2 < x_2 \cdot x_2^2 = x_2^3$$

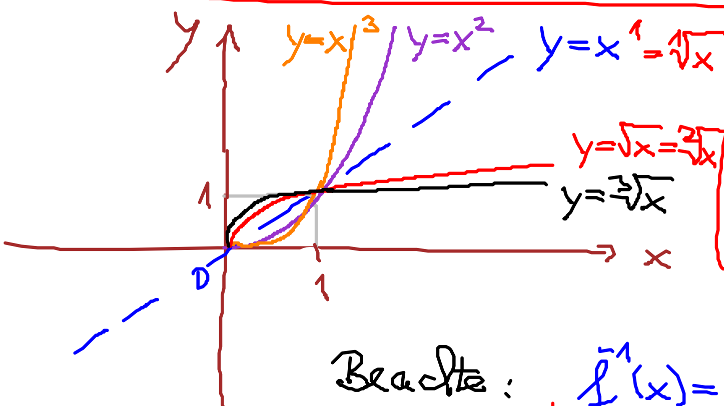
$$\Rightarrow x_1^n = x_1 \cdot x_1^{n-1} < x_1 \cdot x_2^{n-1} < x_2 \cdot x_2^{n-1} = x_2^n$$

quasi „Induktionsschritt"!!

Also definieren wir zu $y = f(x) = x^n$ die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion zu f:

$$\boxed{y = f^{-1}(x) =: \sqrt[n]{x} \iff x = y^n = f(y)}$$

Beachte: $y = \sqrt[n]{x}$ ist positiv oder $= 0$ für $x = 0$!!



„$\sqrt[n]{}$": $[0, +\infty[\to [0, +\infty[$

$x \longmapsto y = \sqrt[n]{x}$"

Beachte: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Warum?

Ziel: Wir wollen $\sqrt[n]{x}$ als Potenz x^λ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ geeignet darstellen. Wir wissen:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[n]{x}) = (\sqrt[n]{x})^n = id(x) = x$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$
$f(y) = y^n$

für alle $x \geq 0$.

Dann gilt wegen der Potenzgesetze:

$$x^1 = (\sqrt[n]{x})^n = (x^\lambda)^n \overset{(PG)}{=} x^{\lambda n}$$

will ich haben!!

„Übereinstimmung der Potenzen für alle $x > 0$"

$\Rightarrow$ (*) $1 = \lambda n \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/n}$

„Übereinstimmung der Exponenten!"

(*) $1 = \lambda n$ lässt sich auch so begründen:

$$x^1 = x^{\lambda n} \text{ für } x > 0 \underset{:x}{\Rightarrow} \frac{x^{\lambda n}}{x} \underset{(PG)}{=} x^{\lambda n - 1} = 1 = x^0 \underset{x \neq 1}{\Rightarrow} \lambda n - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda n = 1.$

Damit lässt sich $f(x) = x^{\alpha}$ für eine beliebige Potenz $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ definieren durch $\boxed{f(x) = x^{\alpha} = x^{m/n} := \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m}$

Beachte: Ist $\alpha = \frac{m}{n} > 0$, so ist $0 \in D_f$ mit $f(0) = 0^{\alpha} = 0$.

Ist $\alpha = 0$, so ist ja $f(x) = x^{\alpha} = x^{0} \equiv 1$, also $0 \in D_f$ mit $f(0) = 1$.

„konstant gleich"

Ist $\alpha = -\frac{m}{n} < 0$ $(m, n \in \mathbb{N})$, so ist $0 \notin D_f$ wegen $f(x) = x^{\alpha} = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{m/n}}$.

ENDE der Vorlesung!!