Vorlesung vom 3.12.2013

Reelle Funktionen

$\boxed{f: D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}}$ später auch $\boxed{f: D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^n}$

Vektorwertige Abbildungen: $\boxed{\underline{f}: D_f \to \mathbb{R}^n, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}}$

„Klassisch": Variable t (time)

$$\boxed{\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n}$$

Interpretiert als „Ortskurve": Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt t.

Grundeigenschaften reeller Funktionen

A) Beschränktheit

$f: D_f \to \mathbb{R}, D_f \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls gilt:

$$\boxed{\exists M > 0 \; \forall x \in D_f : \underbrace{|f(x)|}_{=|f(x)-0|} \le M}$$

Beachte: $|f(x)| \le M \iff -M \le |f(x)| \le M \iff f(x) \in [-M, M]$

Allgemeiner nennt man f nach oben beschränkt, falls gilt:

$$\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in D_f : f(x) \le M$$

Analog heißt f nach unten beschränkt, falls gilt:

$$\exists m \in \mathbb{R} \; \forall x \in D_f : m \le f(x)$$

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = -2 + \sin(x)$

Wegen $-1 \le \sin(x) \le 1 \iff |\sin(x)| \le 1$ gilt:

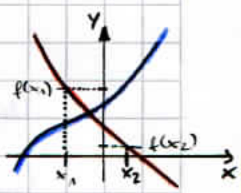
$$\underset{f(\frac{3\pi}{2})}{\underset{\parallel}{-3}} \le f(x) = -2 + \sin(x) \le \underset{f(\frac{\pi}{2})}{\underset{\parallel}{-1}}$$

B) Monotonie

$f: D_f \to \mathbb{R}, D_f \subseteq \mathbb{R}$ heißt in D_f (streng) monoton $\begin{Bmatrix} \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{Bmatrix}$,

falls gilt:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \end{Bmatrix}}$$



Bemerkung: Strenge Monotonie schließt automatisch Injektivität ein.
oder:

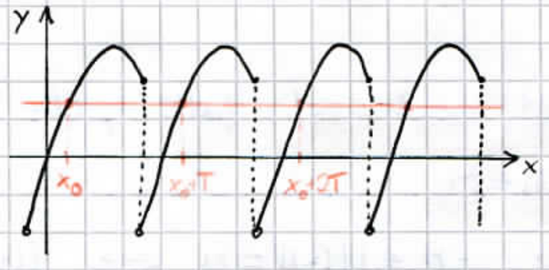
Strenge Monotonie ist hinreichend für Injektivität, und Injektivität ist notwendig für strenge Monotonie.

Bemerkung: Fordert man für die Bilder nur „$\leq$" bzw. „$\geq$" anstelle von „$<$" bzw. „$>$", nennt man f monoton wachsend/fallend, aber nicht streng monoton.

c) Periodizität:

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$ eine unbeschränkte Menge, d.h. die Identitätsfunktion $id: D_f \to \mathbb{R}$, $id(x) = x$ ist nicht beschränkt auf D_f.

f heißt periodisch mit Periode $T>0$ $(T \in \mathbb{R})$, falls gilt:



$$\boxed{\forall x \in D_f \, \forall k \in \mathbb{Z}: f(x) = f(x+kT)}$$

Bemerkung: Ist f periodisch mit Periode T, dann ist ~~auch~~ f auch periodisch mit Periode $\tilde{T}_k = k \cdot T, k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Jede konstante Funktion $f(x) \equiv C$ ist periodisch zu jeder Periode $T>0$. „konstant gleich"
Ansonsten besitzt eine periodische Funktion eine kleinste positive Periode $T>0$.

Reelle Elementarfunktionen

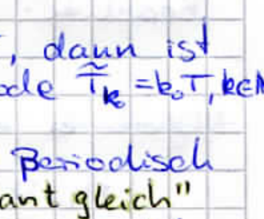
gr. Sigma (Summe)

1) Polynome $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ Laufindex!!

$k=0$, $k=n$: natürliche Grenzen, $D_p = \mathbb{R}$

2) Rationale Funktionen $\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}}$ $(x \in D_f : q(x) \neq 0)$

3) Potenzfunktion $f(x) = a^x$ für $a>0, (a \neq 1)$ beliebig



Fallunterscheidung:

(i) $a>1$: $\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = a^{x_1} < a^{x_2} = f(x_2)}$

Potenzfunktion streng monoton wachsend

(ii) $a=1$: $f(x)=1$ monoton wachsend und fallend

(iii) ~~$a<1$~~ $0<a<1$: $\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = a^{x_1} > a^{x_2} = f(x_2)}$

Potenzfunktion streng monoton fallend

 Achtung: für alle $a>0$ gilt: $\boxed{f(0) = a^0 = 1}$

4) Umkehrfunktion: Logarithmusfkt. $f(x) = \log_a(x)$ $(a>0)$