17.12

$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit einem bei $x_0=0$ symmetrischen Definitionsbereich D_f
$(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$. Dann:

f lässt sich eindeutig (3) zerlegen in eine Summe

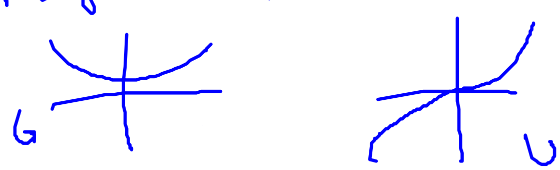
$$f = f_g + f_u \quad (1)$$

mit f_g gerade und f_u ungerade (2)

DEF:

f gerade heißt: $f(-x) = f(x)$

f ungerade heißt: $f(-x) = -f(x)$



a) (1) und (2)

b) (3)

a) Beweis

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{f_g} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{f_u}$$

$$f_g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_g(x) \Rightarrow f_g \text{ ist gerade}$$

$$f_u(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right] = -f_u(x) \Rightarrow f_u \text{ ist ungerade}$$

b) Eindeutigkeit.

Wir nehmen an dass $\exists\, h_g, h_u$, mit h_g gerade und h_u ungerade und

$$f = h_g + h_u$$

$\Longrightarrow \quad f = h_g + h_u = f_g + f_u$

$\Longrightarrow \quad h_g - f_g = f_u - h_u$

- $(h_g - f_g)(-x) = h_g(-x) - f_g(-x) = h_g(x) - f_g(x) = (h_g - f_g)(x)$

  Also $h_g - f_g$ ist gerade

- $(f_u - h_u)(-x) = f_u(-x) - h_u(-x) = \underset{f_u \text{ ungerade}}{-f_u(x)} - \underset{h_u \text{ ungerade}}{(-h_u(x))} =$

  $= -(f_u - h_u)(x)$

  Also ist $f_u - h_u$ ungerade

Ich definiere eine Funktion

$\Phi := f_u - h_u = f_g - h_g \Longrightarrow$ Φ ist gleichzeitig gerade und ungerade

$\forall x \in D_f$

$\Phi(x) \underset{\Phi \text{ gerade}}{=} \Phi(-x) \underset{\Phi \text{ ungerade}}{=} -\Phi(x) \Longrightarrow \Phi(x) = 0$ für alle $x \in D_f$

$\Longrightarrow \quad f_u = h_u$
$\quad\quad f_g = h_g$
$\Longrightarrow$ die Zerlegung ist eindeutig $\square$

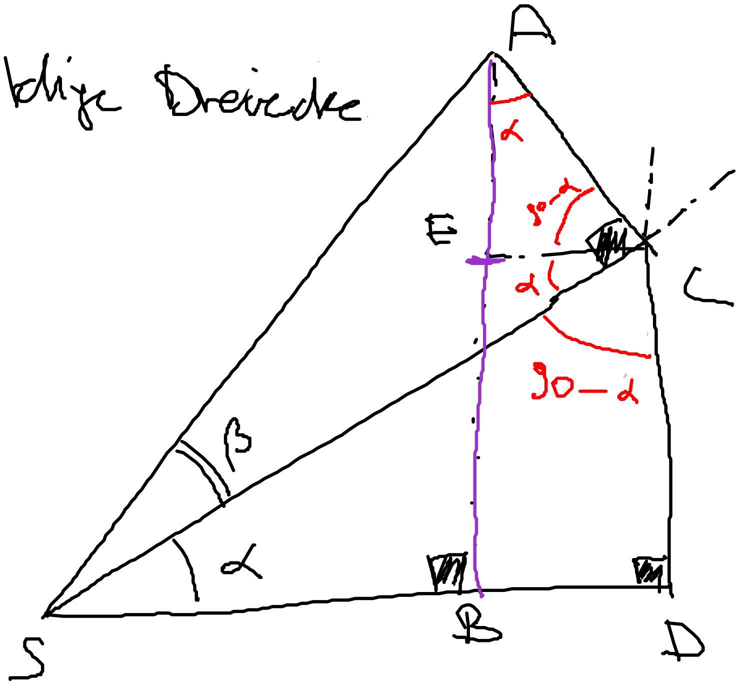
<u>Auf. 34</u>

3 rechtwinklige Dreiecke

$\triangle SCD$

$\triangle SCA$

$\triangle SAB$



Beweis:

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|AB|}{|AS|}$

$= \frac{|AE|}{|AS|} + \frac{|EB|}{|AS|} =$

$= \frac{|AE|}{|AS|} + \frac{|CD|}{|AS|} =$

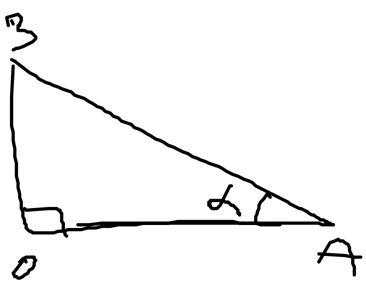
$= \frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AS|} + \frac{|CD|}{|CS|} \cdot \frac{|CS|}{|AS|}$

$= \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$

Zeigen:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

Def. von Sinus u. Cosinus



$\sin\alpha = \frac{|OB|}{|AB|}$ $\quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

$\cos\alpha = \frac{|OA|}{|AB|}$ $\quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Auf. 32

Wir nehmen an dass die exp Funktion eindeutig durch

① $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

② $\exp(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

definiert ist.

10.12

a) $\exp(0) = 1$

b) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

c) $\exp(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

d) Monoton: $x_1 > x_2 \Rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)$

a) $0 + 0 = 0$

$$\exp(0) = \exp(0+0) = \exp(0) \cdot \exp(0) = \exp(0)^2$$

$$\exp(0) = \begin{cases} = 0 \Rightarrow \text{geht nicht (aus (2))} \\ = 1 \end{cases}$$

$\square$

neue:

a) $e = \exp(1)$. Dann ist,

(i) $\exp[n] = e^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{e^n}$, $\forall \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

Beweis.

(i) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Falls $n \geq 0$, dann

$$n = 1+1+1+\ldots+1$$

$$\Rightarrow \exp(n) = \exp(1+1+\ldots+1) = \overbrace{\exp(1)\cdot \ldots \cdot \exp(1)}^{n \text{ Mal}} = \exp(1)^n = e^n$$

Falls $n<0 \Rightarrow$ dann ist $(-n) \geq 0$

dann $\exp(-n) = e^{(-n)}$

$$\exp(n) \underset{\text{Teil (ii)}}{=} \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = (e^{-n})^{-1} = e^n$$

(ii) $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = ?$

$$n = m\cdot\left(\frac{n}{m}\right) \Rightarrow \underbrace{\exp(n)}_{e^n} = \exp\left(m\cdot\frac{n}{m}\right)$$

$$\| $$

$$\exp\left(\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\ldots+\frac{n}{m}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\exp\left(\frac{n}{m}\right)\cdots\exp\left(\frac{n}{m}\right)$$

$$\Rightarrow e^n = \left[\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right]^m$$

dann $\sqrt[m]{e^n} = \exp\left(\frac{n}{m}\right)$ $\square$

---

b) Die Umkehrfunktion $\ln = \exp^{-1} :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt:

$$\boxed{\ln(x_1\cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in]0,+\infty[}$$

Bew.

Umkehrfunktion heißt $\ln\circ\exp = id$, $\exp\circ\ln = id$

$$\exp(\ln(x_1) + \ln(x_2)) = \exp(\ln(x_1))\cdot\exp(\ln(x_2))$$

$$= x_1 \cdot x_2$$

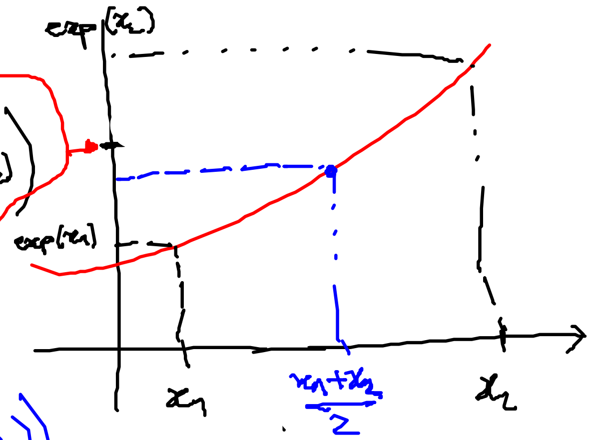
$$\Rightarrow \ln(x_1 \cdot x_2) = \underbrace{\ln(\exp}_{id}(\ln(x_1) + \ln(x_2)))$$

$$= \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

$\square$

c) Es gilt

$$\exp\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left(\exp(x_1)+\exp(x_2)\right)}}_{A(\exp(x_1),\,\exp(x_2))}$$



Beweis.

$$\exp\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \exp\left(\frac{x_1}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x_2}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{\exp(x_1)} \cdot \sqrt{\exp(x_2)}}_{G(\exp(x_1),\,\exp(x_2))}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \exp(x_1) &= \exp\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{2}\right) \\ &= \left[\exp\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow \exp\left[\frac{x_1}{2}\right] = \sqrt{\exp(x_1)} \end{aligned}}$$

Wir wissen dass

$G(a,b) \le A(a,b)$ für alle $a,b > 0$

(Aufgabe 15)

Dann ist auch

$$G(\exp(x_1), \exp(x_2)) \le A(\exp(x_1), \exp(x_2))$$

$\square$