14.01

A 37

(a) $\sum_{n=0}^{5}(n+1)^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$

$k = n+1 \Rightarrow$ k läuft $1,2,3,\dots,6$

(b) $\sum_{n=0}^{3}(2n+5)^2 = \sum_{k=3}^{6}(2k-1)^2 = 5^2+7^2+9^2+11^2$

Jetzt: $2n+5 = 2k-1 \Rightarrow 2n+6 = 2k \Rightarrow k = n+3$

dann $k = 3, 4, 5, 6$

(c) $\sum_{n=2}^{6}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+3)^2} = \sum_{k=5}^{9}\frac{-1^k}{k^2} = \frac{-1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{-1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{-1}{9^2}$

$k = n+3$ (Nenner vergleichen) $\Rightarrow n = k-3$

$\Rightarrow (-1)^{n-1} = (-1)^{k-4} = (-1)^k \cdot \underbrace{(-1)^4}_{=1}$

(d) $\prod_{n=2}^{5}\frac{n-1}{n+2} = \prod_{k=4}^{7}\frac{k-3}{k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1}{35}$

Nenner vergleichen $\Rightarrow k = n+2$

$\Rightarrow n-1 = k-3$

(e) $\prod_{n=3}^{4}\frac{n+1}{n^2-4} = \prod_{k=5}^{6}\frac{k-1}{k(k-4)} = \frac{4}{5\cdot 1}\cdot\frac{5}{6\cdot 2} = \frac{1}{3}$

$$k-1 = n+1 \Rightarrow k = n+2 \Rightarrow n = k-2$$

$$n^2-4 = (k-2)^2-4 = k^2-4k+4-4 = k(k-4)$$

(f) $$\prod_{n=5}^{7} \frac{n^2-9}{n-2} = \prod_{k=2}^{4} \frac{k(k+6)}{k+1} = \frac{2\cdot 8}{3}\cdot\frac{3\cdot 9}{4}\cdot\frac{5\cdot 11}{5}$$

$$k+1 = n-2 \Rightarrow k = n-3, \quad n = k+3$$

$$n^2-9 = (k+3)^2-9 = k^2+6k+9-9 = k(k+6)$$

A 39

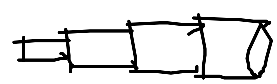
(i). Eine Formel für $\sum_{k=0}^{n} k$ herleiten, aus die Teleskopsumme

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^2-k^2\right]$$

(ii) Mit Induktion beweisen

(i) $$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2-k^2 = \underbrace{1^2-0^2}_{k=0} + \underbrace{2^2-1^2}_{k=1} + \underbrace{3^2-2^2}_{k=2} + \dots + \underbrace{(n+1)^2-n^2}_{k=n}$$

$$= (n+1)^2-0^2$$



$$= n^2+2n+1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^2-k^2\right] = \sum_{k=0}^{n} (\cancel{k^2}+2k+1-\cancel{k^2}) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{3} 1 = 1+1+1+1 = 4$$

$$\Longrightarrow \quad n^2+2n+1 = 2\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5\cdot 6}{2}$$

Beweisen daß

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: (Beweis für $n=1$)

$$\sum_{k=0}^{1} k = \frac{1\cdot 2}{2}$$

$$0+1=1 \qquad 1 \qquad \checkmark$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an dass $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

und wir zeigen dass:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Bew.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$A(n)$ Aussage

- $A(1)$
- $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$

$$A(n) = \left(\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

A 3B

Zeigen dass:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$A(n) := \left[\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1 ; \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \right]$$

(1) wir zeigen $A(1)$:

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1 : \sum_{k=1}^{1} k q^{k-1} = \frac{1-2q^1+q^2}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{1} k q^{k-1} = 1 \cdot q^0 = 1 \qquad \frac{1-2q^1+q^2}{(1-q)^2} = \frac{(1-q)^2}{(1-q)^2} = 1$$

Also ist $A(1)$ wahr

(2) $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$

Wir nehmen an dass $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$ und wir zeigen dass:

$$\sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1+1)\,q^{n+1} + (n+1)\,q^{(n+1+1)}}{(1-q)^2}$$

Beweis:

Rechte Seite: $\frac{1-(n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$ ★

Linke Seite:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}}_{\text{Summe bis } n} + \underbrace{(n+1)q^n}_{\text{letzter Term}} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} + (n+1)q^n$$

$$= \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1} + (1-q)^2(n+1)q^n}{(1-q)^2} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1} + (1-2q+q^2)q^n(n+1)}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1-\cancel{(n+1)q^n} + nq^{n+1} + \cancel{(n+1)q^n} - 2(n+1)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}(n+2) + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$$ ★

Also ist $A(n+1)$ wahr.

A 41

Beweisen Sie:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad , \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ x \in [-1,+\infty[$$

Jetzt: $A(n)$: $\left(\forall x \in [-1,+\infty[\ : (1+x)^n \geq 1+nx\right)$

Beweis

① $A(1)$: $\forall x \in [-1,+\infty[\ : (1+x) \geq 1+x$ (wahr)

② $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ ↳ $\left[\forall x \in [-1,+\infty[\text{ gilt: } (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\right]$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

ich benutze $A(n)$! ! $(1+x)^n \geq (1+nx)$

(!) $1+x \geq 0$ weil $x \in [-1,+\infty[$

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{nx^2 \geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

Also: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

A 40 |

Zeigen dass: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ für alle $n,k \in \mathbb{N}_0$.

Man behandle dabei vorweg $k=0$ sowie $k>n$ als Extrafälle

Bew.

Zu erst definieren wir

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n,\ k \neq 0 \\ 0 & k > n \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

|| Extrafälle

Beweis per Induktion:

① $n=1$: $\forall k \in \mathbb{N}_0$: $\binom{1}{k} \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{1}{k} = \begin{cases} 1 & k=0 \quad \text{(Def.)} \\ 1 & k=1 \\ 0 & k>1 \quad \text{(Def.)} \end{cases} \Rightarrow \binom{1}{k} \in \mathbb{N}_0$$

② $n \longrightarrow n+1$

wir benutzen die Formel: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (H-aufgabe 40b)

Zu zeigen ist dass: $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}_0$, aber

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. und $\binom{n}{k}, \binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}_0$ (Ind.-voraussetzung)

Also: $\binom{n+1}{k}$ ist die Summe von 2 Zahlen in $\mathbb{N}_0$

$\Longrightarrow \binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}_0$