

## Mathematischer Zirkel 10c der MSG “Leonhard Euler”

Internet-Seite des Zirkels :  
page.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel

### Hausaufgaben vom 16.01.2013 (zum 23.01.2013)

Teil 1 der folgenden Aufgabe haben wir in der letzten Sitzung bereits diskutiert (am Ende erscheint erstaunlicherweise die Zahl  $e$ ).

Beim Besuch einer fröhlichen Veranstaltung in einem Herrenclub haben  $n = 100$  Gentlemen ihre Zylinder an der Garderobe abgegeben. Die Veranstaltung war so fröhlich, dass alle ihre Garderobenmarken verloren haben. Die Zylinder wurden daher auf eine zufällige Weise ausgegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass *keiner* der Gentlemen seine eigene Kopfbedeckung zurückbekam?

1. Sei  $a(n)$  die Anzahl der Permutationen  $p(1), p(2), \dots, p(n)$  der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , für die gilt:

$$p(j) \neq j \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, n$$

(sodass es in unserer Hauptaufgabe um die Zahl  $a(100)/100!$  geht). Zeige:

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a(k).$$

2. Es gelte für zwei Folgen  $b(n)$  und  $c(n)$ :

$$b(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c(k).$$

Finde und beweise (z.B., durch mathematische Induktion) einen Ausdruck für  $c(n)$  durch  $b(n)$ .

3. Finde jetzt die Formel für  $a(n)$ . Was kannst Du über  $a(n)/n!$  für grosse Werte von  $n$  sagen?