Mathematischer Zirkel 10c der MSG "Leonhard Euler"

Internet-Seite des Zirkels :

`page.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel`

Hausaufgaben vom 13.02.2013 (zum 20.02.2013)

Erzeugende Funktionen

1. Mit Hilfe der erzeugenden Funktionen kann man manchmal geschlossene Formel für rekurrente Folgen finden. Das Beispiel der Fibonacci-Folge hatten wir in der Sitzung. Ein weiteres Beispiel: es sei die Folge $\{u_n\} = \{0, 1, 5, 19, 65, \dots\}$ definiert durch $u_0 = 0$, $u_1 = 5$, $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$. Zeige, dass die erzeugende Funktion $U(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots$ so ausgerechnet werden kann:

$$(1 - 5z + 6z^2)\, U(z) = z \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{z}{1 - 5z + 6z^2}.$$

2. Es folgt:

$$U(z) = \frac{1}{1 - 3z} - \frac{1}{1 - 2z}.$$

Benutze hier (zweimal) die geometrische Reihe, um die explizite Formel für u_n zu bekommen!

3. Beweise mit Hilfe der erzeugenden Funktionen, dass jede natürliche Zahl genau eine binäre Darstellung besitzt. (Du weisst das längst, hast aber wahrscheinlich niemals einen mathematisch strengen Bewies gesehen!) *Tipp:* zu diesem Zweck kann man die folgende Formel benutzen:

$$(1 + z) \cdot (1 + z^2) \cdot (1 + z^4) \cdot (1 + z^8) \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

Warum stimmt sie? Was ändert sich in diesem Beweis für das dezimale System?