Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

16.11.2010

Aufgabenblatt 5
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Beispiel von Mannigfaltigkeiten I: Möbiusband)
Sei $M := [0,1] \times (0,1)/\sim, (0,x) \sim (1,-x)$ ein topologischer Raum bzgl. der induzierten Quotiententopologie. Finden sie einen differenzierbaren Atlas auf M, dessen Topologie mit der Quotiententopologie übereinstimmt.

5 Punkte

Aufgabe 2. (Beispiel von Mannigfaltigkeiten II: Geraden im Raum)
Finden Sie einen differenzierbaren Atlas auf der Menge G aller nicht orientierten Geraden im $\mathbb{R}^3$ so dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \triangle$$

welche (p, q) auf die Gerade durch p und q abbildet, differenzierbar ist.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Tangentialraum von Untermannigfaltigkeiten und Mannigfaltigkeiten)
Sei M eine differenzierbare k-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Sei $T_p^{UM} M$ der Tangentialraum an $p \in M$ nach der Definition der Vorlesung.
M ist auf kanonische Weise eine k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei $T_p^M M$ der Tangentialraum $p \in M$ nach der Definition für differenzierbare Mannigfaltigkeiten wie in der Vorlesung.
Zeigen Sie, dass $T_p^M M$ und $T_p^{UM} M$ auf kanonische Weise isomorph sind.

5 Punkte

Aufgabe 4. (Ableitung von differenzierbaren Abbildungen)
Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ($dim(M) = m, dim(N) = n$) und seien TM, TN die Tangentialbündel.
Sei $p \in M$ ein Punkt und sei $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um $f(p)$. Desweiteren sei $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte um p, so dass $f(U) \subset V$.
Sei

$$F : \phi(U) \to \psi(U), F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

die Abbildung f ausgedrückt in Koordinaten $(U, \phi), (V, \psi)$.
$(U, \phi), (V, \psi)$ induzieren natürliche Karten auf TM, TN,

$$\hat{\phi} : \hat{U} \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m, \hat{\psi} : \hat{V} \to \phi(V) \times \mathbb{R}^n$$

Zeigen Sie folgende Gleichung für die Ableitung df ausgedrückt in Koordinaten $(\hat{U}, \hat{\phi}), (\hat{V}, \hat{\psi})$:

$$\hat{\psi} \circ df \circ \hat{\phi}^{-1} = (F, dF)$$

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 23.11. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus