Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

26.10.2010

Aufgabenblatt 2
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1 (Beispiele von Untermannigfaltigkeiten)**.** Sei $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ die Menge der orthogonalen $n \times n$ Matrizen, d.h. $A \in O(n) \Leftrightarrow A^\tau A = id$.
Zeigen Sie, dass $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des R^{n^2} ist. Bestimmen Sie die Dimension und den Tangentialraum von $O(n)$.
Tipp: Sie können Aussagen aus Aufgabenblatt 1 verwenden.

5 Punkte

Aufgabe 2. (transversale Schnitte)
Seien M_i m_i-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$.
Sei T_pM_i der Tangentialraum an p und $N_pM_i := (T_pM_i)^\perp$ der Normalraum an p.
M_1 und M_2 schneiden sich *transversal* in $p \in M_1 \cap M_2$ wenn die Normalräume sich nur in der 0 schneiden, $N_pM_1 \cap N_pM_2 = \{0\}$. M_1 und M_2 schneiden sich transversal wenn der Schnitt nicht leer und jeder Schnittpunkt transversal ist.

1. Zeigen Sie, dass M_1 und M_2 sich in $p \in M_1 \cap M_2$ genau dann transversal schneiden, wenn
$$T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^n$$
2. Nehmen Sie an, dass $M_1 \cap M_2$ sich transversal schneiden.
Zeigen Sie, dass der Schnitt $N := M_1 \cap M_2$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie die Dimension von N.
Tipp: Benutzen Sie, dass jede Untermannigfaltigkeit lokal als Niveaumenge geschrieben werden kann.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Beispiele von Untermannigfaltigkeiten II)
Sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := y^2 - 2x^2(1 - x^2)$$
Wir haben ein hinreichendes Kriterium für welche Werte $c \in \mathbb{R}$ die Niveaumenge $f^{-1}(\{c\})$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie diese Werte.
Skizzieren Sie die Niveaulinien $f^{-1}(\{c\})$.

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 2.11. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus