

Erzeugen zufälliger Pseudogeradenarrangements

Sandro M. Roch

Technische Universität Berlin
 roch@math.tu-berlin.de

1. Februar 2024

Zusammenfassung

Pseudogeradenarrangements sind einfache Objekte mit faszinierenden Bezügen zu einer Vielzahl verwandter Strukturen aus Kombinatorik, Geometrie und Informatik. Neben einem allgemeinen Einblick beschäftigt uns die Frage, wie diese zufällig mithilfe einer Markov-Kette erzeugt werden können.

Hier ein kleines Rätsel für Sie: In Abb. 1 sehen Sie links ein regelmäßiges 12-Eck. Sagen wir, alle Seiten haben Länge 1. Rechts ist eine *Rhombenpflasterung* dargestellt, d.h. eine Kachelung mit Rhomben der Seitenlänge 1. Wie viele Rhomben benötigen Sie, um auf diese Weise ein regelmäßiges k -Eck zu pflastern?

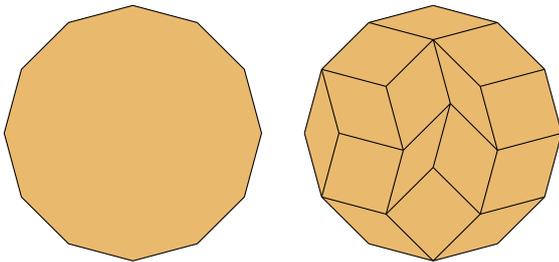


Abbildung 1: Rhombenpflasterung eines 12-Ecks

Vielleicht nehmen Sie sich die Zeit, um darüber nachzudenken, bevor Sie unsere Antwort lesen.

Es geht nur, wenn k gerade ist, $k = 2n$. Sei \mathcal{R} eine gegebene Rhombenpflasterung. An jeder Randkante u des k -Ecks liegt in \mathcal{R} ein Rhombus an, dessen gegenüberliegende Seite u' parallel zu u ist. Dies setzt sich fort zu einem *Band* von Rhomben, die durch Kanten getrennt sind, welche alle parallel zu u sind. Es verläuft zwischen u und der gegenüberliegenden Seite des k -Ecks, siehe Abb. 2 links. Zwischen je zwei gegenüberliegenden Seiten des k -Ecks verläuft ein solches Band. Dies zeigt schon, dass die Seitenzahl k gerade sein muss. Jedes der n Bänder kreuzt alle anderen Bänder genau einmal und muss deshalb aus $n - 1$ Rhomben bestehen. Nun gibt es in \mathcal{R} also genau n Bänder, bestehend aus jeweils $n - 1$ Rhomben, und jeder Rhombus ist Teil genau zweier Bänder. Es müssen dann insgesamt genau $n(n - 1)/2$ Rhomben sein.

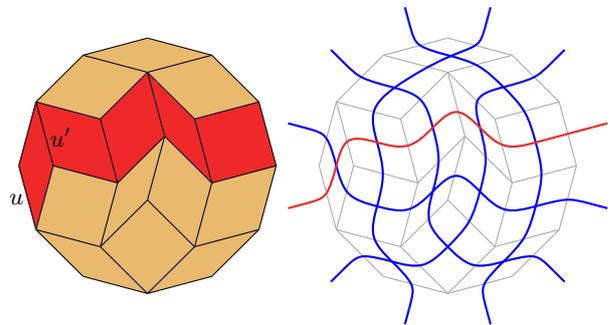


Abbildung 2: Von Rhombenpflasterungen zu Pseudogeradenarrangements

Ersetzen wir die Bänder einer Rhombenpflasterung durch Kurven, so erhalten wir ein *Arrangement von Pseudogeraden*, siehe Abb. 2 rechts. Der Name rührt daher, dass sich die Kurven in einer Eigenschaft so verhalten wie eine Menge nicht-paralleler Geraden: Je zwei von ihnen schneiden sich in genau einem Punkt. Ein Pseudogeradenarrangement (Arrangement) ist daher formal definiert als eine endliche Menge einfacher Kurven $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in der Ebene, die in beide Richtungen in die Ferne streben, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|f_i(t)\| = \infty,$$

und die die Eigenschaft erfüllen, dass sich je zwei in genau einem Punkt kreuzen. In einem *einfachen* Arrangement fordert man zusätzlich, dass sich in jedem Kreuzungspunkt genau zwei Pseudogeraden kreuzen.

Wir betrachten übrigens Arrangements stets nur bis auf Homöomorphie. Das bedeutet, zwei Arrangements, die sich wie die beiden Arrangements in Abb. 3 nur durch Verzerrung der Ebene unterscheiden, sind für uns das gleiche Arrangement. Denn uns interessiert nicht die exakte Zeichnung des Arrangements, sondern nur das kombinatorische Muster, welches durch die Reihenfolgen gegeben ist, in der sich die Pseudogeraden

untereinander schneiden. Die oben beschriebene Beziehung zwischen Rhombenpflasterungen und einfachen Pseudogeradenarrangements ist dann eine Bijektion. So wird eine Brücke geschlagen von einer rein geometrischen Struktur zu einer kombinatorisch besser greifbaren Struktur.

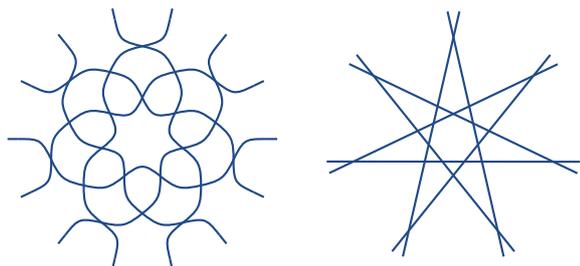


Abbildung 3: Zwei Zeichnungen eines Arrangements

Pseudogeradenarrangements wurden zum ersten Mal im Jahr 1926 von Levi beschrieben [15]. Weitere bedeutende Fortschritte erbrachten dann 1957 Ringel [20] und 1972 Grünbaum [11]. Es ist nur bis $n = 16$ bekannt, wie viele Arrangements es mit genau n Pseudogeraden gibt (Folge A6245 in der OEIS [19]). Bezeichnet B_n deren Anzahl, so kennt man für mehr Pseudogeraden lediglich die Asymptotik

$$0.2083 n^2 \leq \log_2 B_n \leq 0.657 n^2,$$

siehe [3, 6, 5]. Die exponentielle untere Schranke erklärt, weshalb ein Abzählen durch vollständiges Iterieren aller Arrangements am Computer kein erfolversprechender Ansatz ist.

Verwandt zu der Frage des Abzählens einer kombinatorischen Struktur ist die Frage, wie Instanzen zufällig erzeugt werden können. Beherrscht man das eine effizient, so oft approximativ auch das andere, und umgekehrt (Vgl. [14, Kap. 3]). Wir hätten also gerne eine effiziente Methode, die ein Arrangement oder eine Rhombenpflasterung zufällig generiert und dabei jedes Arrangement mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugt. Später werden wir auf diese Frage noch einmal zurückkommen.

Eine weitere spannende Frage ist die der Streckbarkeit. Ein Arrangement heißt *streckbar*, wenn es auch mittels Geraden gezeichnet werden kann, wie zum Beispiel das Arrangement in Abb. 3. Es konnte gezeigt werden, dass alle Arrangements mit höchstens $n \leq 7$ Pseudogeraden streckbar sind [8]. Auf Ringel [20] geht das in Abb. 4 gezeigte nicht-einfache Arrangement mit 9 Pseudogeraden zurück. Dieses ist nicht streckbar: In einer geradlinigen Zeichnung würde aus dem Satz von Pappus, angewandt auf die sechs grünen, quadratischen Kreuzungspunkte, folgen, dass die drei orangen, runden Punkte auf einer Geraden liegen. Doch dies schließt die Lage der „sich durchschlingelnden“ orangen Pseudogerade aus. Prüfen auf Streckbarkeit ist ein NP-schweres Problem [21].

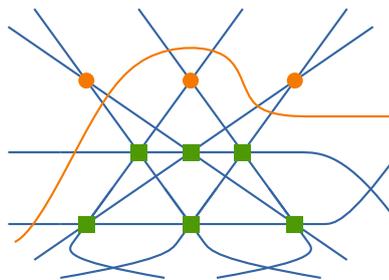


Abbildung 4: Nicht-streckbares Arrangement

Sortierwerke und Reduzierte Wörter

An Pseudogeradenarrangements faszinieren die Bezüge zu vielen weiteren kombinatorischen Strukturen, von denen wir hier nur einige vorstellen können.

Wir gehen im Folgenden von einfachen Arrangements aus, in denen eine der äußeren Zellen als *Nordpol* N ausgezeichnet ist. Dies induziert eine Orientierung der Pseudogeraden, in der der Nordpol zu ihrer Linken liegt, siehe Abb. 5 links. Ein *Drahtdiagramm* ist eine kanonische Zeichnung, in der die Pseudogeraden unterhalb des Nordpols wie Drähte horizontal von links nach rechts laufen und sich mit anderen Drähten in Vertauschungen benachbarter Drähte kreuzen, siehe Abb. 5 rechts. Da sich per Definition je zwei Pseudogeraden genau einmal kreuzen, verlassen sie auf der rechten Seite das Drahtdiagramm in umgekehrter Reihenfolge.

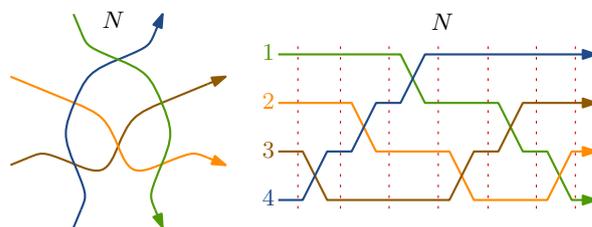


Abbildung 5: Drahtdiagramm eines Arrangements

Als *Sortiergatter* bezeichnen wir ein Bauteil, das als Eingabe zwei Zahlen einliest, und als Ausgabe die größere und die kleinere beider Zahlen ausgibt, siehe Abb. 6 links. Legen wir nun wie rechts in Abb. 6 dargestellt Sortiergatter auf die Kreuzungen eines beliebigen Drahtdiagramms, so erhalten wir ein *Sortierwerk*. Dieses hat nämlich die Eigenschaft, dass gleich in welcher Reihenfolge die Zahlen 1 bis n links eingegeben werden, sie auf der rechten Seite immer sortiert herauskommen. Sortierwerke kodieren Sortieralgorithmen, die auf Vergleichen und Vertauschen benachbarter Elemente basieren. So entspricht das Sortierwerk in Abb. 6 etwa dem bekannten *Bubble Sort* Verfahren.

Die Sortierwerke, die wir aus Pseudogeradenarrangements gewinnen, sind genau die *minimalen* Sortierwerke. Minimal bedeutet hier bezüglich der Anzahl der Sortiergatter. Bei uns sind es $n(n - 1)/2$ Gatter, das haben wir schon gesehen, und tatsächlich gibt es kein

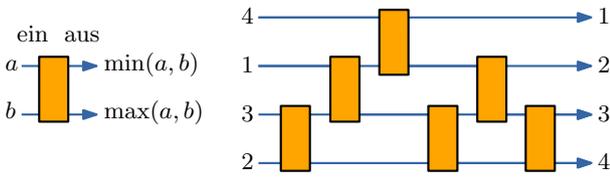


Abbildung 6: Sortierwerk

Sortierwerk, welches mit weniger auskommt und trotzdem alle Permutationen sortiert.

Bekanntlich kann jede Permutation als Verknüpfung von Nachbartranspositionen $\sigma_i := (i, i + 1)$ geschrieben werden, so zum Beispiel $(1, 4, 3, 2) = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$. Hat eine solche Produktdarstellung einer Permutation π minimale Länge, so nennen wir sie *Reduziertes Wort* von π . Minimale Sortierwerke entsprechen genau den reduzierten Wörtern der Permutation

$$\pi_{\text{rev}}(n) := (n, n - 1, \dots, 1).$$

Dazu schreiben wir einfach die Positionen der Gatter von rechts nach links ab. Zum Sortierwerk in Abb. 6 gehört beispielsweise das reduzierte Wort

$$\pi_{\text{rev}}(n) = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3.$$

Mehr noch: Wir können reduzierte Wörter von $\pi_{\text{rev}}(n)$ als maximale monotone Pfade auf dem *Permutaeder* auffassen. Der Permutaeder der Dimension $n - 1$ ist ein Polytop, dessen Ecken genau die Permutationen der Ordnung n sind, aufgefasst als Vektoren des \mathbb{R}^n . Zwischen zwei Ecken liegt genau dann eine Kante, wenn sich die beiden Permutationen nur durch eine Nachbartransposition unterscheiden. Oft zeichnet man den Permutaeder so, dass $\pi_{\text{rev}}(n) = (n, \dots, 1)$ oben und $\pi_{\text{id}}(n) = (1, \dots, n)$ unten liegt, siehe Abb. 7. Liest man in Abb. 5 die Pseudogeraden entlang der gestrichelten vertikalen Linien ab, so erhält man einen kürzesten Pfad von $\pi_{\text{id}}(n)$ nach $\pi_{\text{rev}}(n)$.

Dreiecksflips

In einem reduzierten Wort von π_{rev} können wir zwei bzw. drei aufeinanderfolgende Transpositionen entsprechend folgender Gleichungen ersetzen und erhalten erneut ein reduziertes Wort von π_{rev} :

$$\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i \quad \text{für } |i - j| \geq 2 \quad (1)$$

$$\sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \quad \text{für alle } i \quad (2)$$

Eine Ersetzung nach Gleichung (1) bezeichnen wir als *Kommutation*, eine Ersetzung nach Gleichung (2) als *Dreiecksflip*. Abb. 8 illustriert die beiden Operationen.

Tatsächlich entsprechen Pseudogeradenarrangements bzw. Rhombenpflasterungen genau den reduzierten Wörtern von π_{rev} bis auf Kommutation (Vgl. [4]). Das bedeutet: Fasst man reduzierte Wörter von $\pi_{\text{rev}}(n)$, die

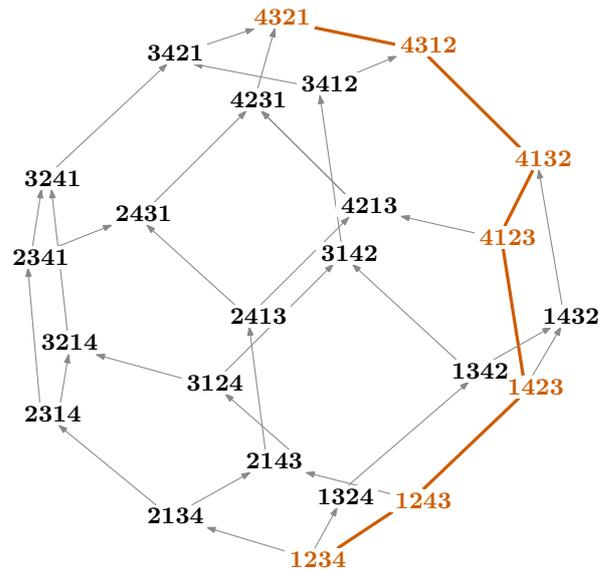


Abbildung 7: Permutaeder der Dimension 3

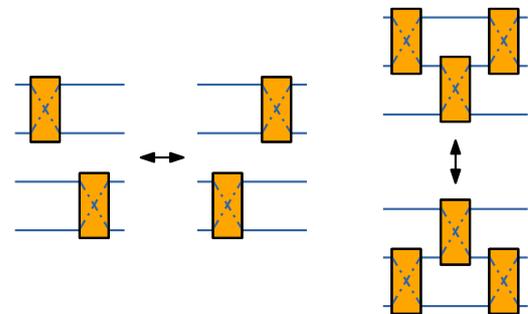


Abbildung 8: Kommutationen und Dreiecksflips

sich jeweils durch Kommutationen ineinander überführen lassen, zu Klassen zusammen, so stehen diese Klassen in Bijektion zu einfachen Arrangements von n Pseudogeraden.

Kommutationen erhalten also das zugrundeliegende Arrangement. Dahingegen verändern Dreiecksflips die Reihenfolgen, in der sich die Pseudogeraden schneiden, und führen daher zu einem anderen Arrangement. Der Name Dreiecksflip wird verständlich, wenn man sich die Operation direkt auf Pseudogeradenarrangements anschaut: Wie in Abb. 9 dargestellt, wird in einer Dreieckszelle eine der drei Pseudogeraden über die gegenüberliegende Kreuzung gezogen. Tatsächlich spielt es hier keine Rolle, an welcher der drei man zieht, es kommt immer das gleiche Arrangement heraus.

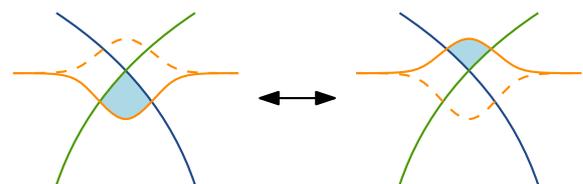


Abbildung 9: Dreiecksflip in einem Arrangement

Ringel [20] wusste bereits, dass sich jedes einfache Arrangement in jedes andere durch Dreiecksflips überführen lässt. Das bedeutet, der *Flip-Graph*, der als Knoten einfache Arrangements und als Kanten Dreiecksflips enthält, ist zusammenhängend. Explizit in der Sprache reduzierter Wörter wurde dies erneut in [13] gezeigt. In Abb. 10 ist der Flip-Graph für $n = 4$ dargestellt, wobei wir die Arrangements als Rhombenpflasterungen visualisieren. In dieser Darstellung entspricht ein Dreiecksflip dem Drehen eines Hexagons um 180° . Im Fall $n = 4$ ist der Flip-Graph ein langweiliger Kreis. Für größere n ist die Struktur sehr viel komplexer, siehe zum Beispiel Abb. 2 in [7] für $n = 5$.

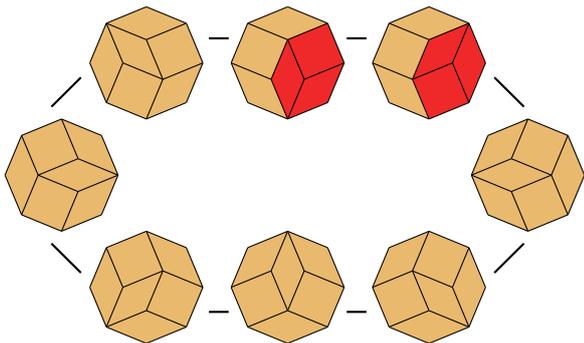


Abbildung 10: Flip-Graph für $n = 4$

Arrangements und Tableaux

Edelman und Greene entdeckten eine tiefgründige Bijektion zwischen reduzierten Wörtern von $\pi_{\text{rev}}(n)$ und *Standard Young Tableaux von Treppenstufenform*. Ein solches Tableau ist in Abb. 11 rechts dargestellt. Die Bedingung ist, dass jede Zahl von 1 bis $n(n-1)/2$ genau einmal vorkommt, und dass Zeilen und Spalten aufsteigend sind. Um nun von einem reduzierten Wort $\pi_{\text{rev}}(n) = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots$ zu einem Tableau zu kommen, fügt man die Zahlen i_1, i_2, \dots nacheinander mittels des *Schensted-Algorithmus* in ein anfangs leeres Hilfstableau ein, und protokolliert in einem zweiten Tableau das Wachstum des Hilfstableaus, siehe Abb. 11.

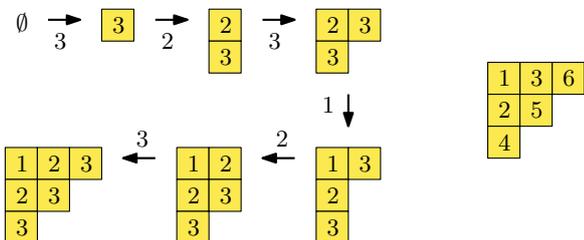


Abbildung 11: Beispiel der Edelman-Greene-Bijektion: Das reduzierte Wort $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ entspricht dem Tableau rechts.

Mithilfe der *Hook-Length-Formel*, die auf Frame, Robinson und Thrall zurückgeht und aus dem Kontext der Darstellungstheorie stammt, lassen sich Standard

Young Tableaux zählen und damit auch die Anzahl minimaler Sortierwerke bestimmen (Vgl. [22]):

$$\frac{\binom{n}{2}}{1 \cdot 3^{n-1} 5^{n-2} \dots (2n-3)^1}$$

In [10] wird ein effizienter Algorithmus aufgezeigt, mit dem sich zufällige Standard Young Tableaux erzeugen lassen. Dies wird in [1] genutzt, um zufällige Sortierwerke zu erzeugen. Dabei zeigen sich für große n beeindruckende Phänomene: So nähern sich für $n \rightarrow \infty$ die Pseudogeraden Sinuskurven an, siehe Abb. 12.

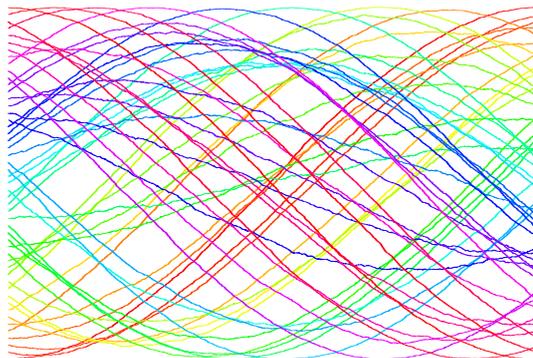


Abbildung 12: Ausgewählte Pseudogeraden eines zufälligen Sortierwerks für $n = 200$. Aus [1] entnommen.

Jedoch liefert dies noch kein effizientes Verfahren, um Pseudogeradenarrangements zu zählen oder zufällig zu erzeugen, da diese, wie oben beschrieben, lediglich Äquivalenzklassen von Sortierwerken entsprechen und die Klassen sehr unterschiedlicher Kardinalität sind.

Verallgemeinerte Pseudogeradenarrangements

Eine *plane partition* ist eine Matrix, deren Einträge natürliche Zahlen sind, und deren Zeilen und Spalten monoton wachsend sind. Ein Beispiel ist die Matrix in Abb. 14 rechts.

Um den Zusammenhang zu Pseudogeradenarrangements zu erkennen, müssen wir unsere Theorie etwas erweitern. Zuvor haben wir Rhombenpflasterungen eines regelmäßigen k -Ecks betrachtet, bei dem alle Seiten Länge 1 haben. Nun pflastern wir ein konvexes k -Gon und fordern nur, dass alle Seitenlängen ganzzahlig sind und gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind. Abb. 13 zeigt ein Beispiel einer Pflasterung zu Seitenlängen 3, 2 und 3.

Wenn wir wieder Pseudogeraden durch Bänder von Rhomben legen, so erhalten wir für jedes Seitenpaar eine Klasse von Pseudogeraden, in Abb. 13 die roten, grünen und blauen Pseudogeraden. Diese Klassen nennen wir *Parallelklassen*, denn Pseudogeraden derselben Parallelklasse schneiden sich untereinander nicht, Pseudogeraden verschiedener Klassen jedoch weiterhin genau einmal. Ein solches Arrangement nennen wir *Verallgemeinertes Pseudogeradenarrangement*. Klassische

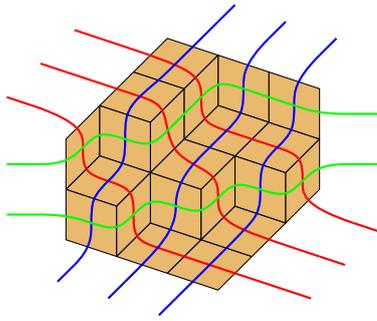


Abbildung 13: Verallgemeinertes Pseudogradenarrangement

Arrangements entsprechen dem Spezialfall, dass jede dieser Parallelklassen aus einer einzelnen Pseudograde besteht.

Rhombenpflasterungen eines Hexagons sind ein wichtiger Spezialfall. Sie wirken optisch wie in einer Ecke eines Raumes gestapelte Kisten. In Abb. 14 links wurden diese Stapel farbig markiert. Schreibt man die Höhen der Stapel in eine Matrix, so erhält man tatsächlich eine plane partition, siehe Abb. 14 rechts.

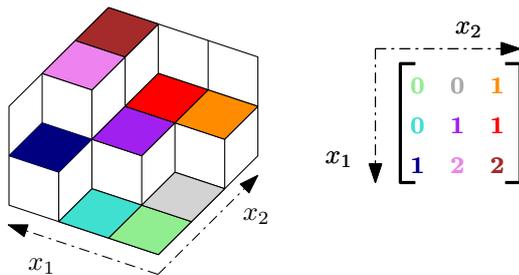


Abbildung 14: Pflasterungen und plane partitions

In Abb. 15 links wurden die weißen Bänder der Pflasterung in Abb. 14 zu gelben Pfaden geschrumpft. Man erhält eine Familie von monotonen Gitterpfaden, die sich berühren aber nicht schneiden dürfen. Erweitert man den Gittergraphen etwas, so lassen sich diese auch als Familie von monotonen, knotendisjunkten Gitterpfaden betrachten, siehe Abb. 15 rechts.

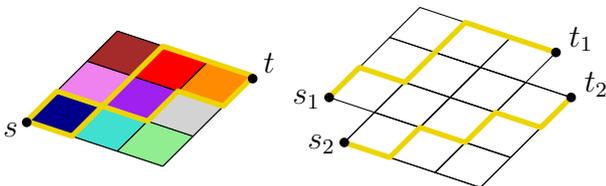


Abbildung 15: Pflasterungen und Pfadssysteme

Solche Familien knotendisjunkter Pfade lassen sich durch Anwendung des Lindström-Gessel-Viennot-Lemmas zählen. Dies liefert eine äußerst elegante Formel für die Anzahl $R(a, b, c)$ hexagonaler Rhombenpflasterungen mit Seitenlängen a, b, c , die bereits 1916 von MacMahon entdeckt wurde [18, §429]:

$$R(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

Auch plane partitions der Größe $a \times c$, deren Werte durch b beschränkt sind, werden durch diese Formel gezählt, ebenso wie verallgemeinerte Arrangements, die aus drei Parallelklassen mit a, b und c Pseudograden bestehen.

Zufällige Pseudogradenarrangements

Kommen wir nun nochmal zurück zur Frage der zufälligen Erzeugung von Pseudogradenarrangements, sowohl von klassischen als auch von verallgemeinerten. In der Kombinatorik wünscht man häufig von einer gegebenen kombinatorischen Struktur gleichverteilt zufällige Instanzen zu erzeugen, hat dafür jedoch nicht immer einen effizienten direkten Algorithmus.

Markov-Ketten und Mischzeit

Einen universellen Ansatz für dieses Problem bieten Markov-Ketten. Möchte man beispielsweise aus allen Permutationen \mathfrak{S}_n der Ordnung n gleichverteilt ein zufälliges Element π wählen, so kann man das wie folgt tun: Man startet mit einer beliebigen Permutation $X_0 \in \mathfrak{S}_n$ und vertauscht in jedem Schritt $X_t \rightarrow X_{t+1}$ zufällig zwei benachbarte Elemente. So lässt sich auch ein Kartenstapel mischen! Ein solcher Prozess (X_t) heißt Markov-Prozess oder Markov-Kette, da die Verteilung von X_{t+1} stets nur von X_t bedingt ist, der Prozess also *gedächtnislos* ist. Dieser Prozess wird gegen die Gleichverteilung auf \mathfrak{S}_n konvergieren, d.h. für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_t = \pi] = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{1}{n!}.$$

Doch wie lange muss man mischen, ehe X_t hinreichend gleichverteilt ist? Diese Frage lässt sich durch das Konzept der *Mischzeit* formalisieren. Nehmen wir an, die Zustände einer Markov-Kette (X_t) sind die Elemente einer beliebigen endlichen Menge Ω . Unter bestimmten Voraussetzungen (Ergodizität und Symmetrie) wird die Verteilung von X_t gegen die Gleichverteilung Uni_Ω konvergieren, in der jedes $x \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $1/|\Omega|$ besitzt. Allgemein, für zwei beliebige Verteilungen μ und μ' auf Ω definiert man deren *Totale Variationsdistanz* als

$$\|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} := \max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \mu'(A)|$$

und definiert damit die *Mischzeit* von (X_t) als

$$\tau := \min \left\{ t \in \mathbb{N} : \|X_t - \text{Uni}_\Omega\|_{\text{TV}} < \frac{1}{e} \right\},$$

also als die Zahl der Schritte bis der Prozess nah an der Gleichverteilung ist. Man könnte statt $1/e$ auch einen anderen Wert wählen, doch das würde in der folgenden Analyse nichts wesentliches ändern. Wir fragen uns nämlich, ob die Mischzeit τ polynomiell in einem gewissen Größenparameter n ist, etwa im Beispiel oben die Größe der Permutation oder später die Anzahl der Pseudogeraden. In diesem Fall nennen wir die Markov-Kette *schnell mischend*.

Ein Ansatz die Mischzeit einer Markov-Kette abzuschätzen ist die Untersuchung auf sogenannte *Flaschenhälse*. Sieht der Zustandsübergangsgraph etwa so aus wie in Abb. 16, d.h. es gibt zwei Zustandsklassen, im Bild rot und grün dargestellt, zwischen denen nur wenige Zustandsübergänge bestehen, so verlangsamt das intuitiv das Mischen. Dies lässt sich auch formalisieren. Bezeichne $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ die Verteilung, gegen die der Prozess (X_t) strebt, und sei $A \subset \Omega$ eine Zustandsteilmenge, etwa die Menge der roten Zustände in Abb. 16, dann bezeichnet

$$\Theta(A) := \frac{1}{\mu(A)} \sum_{x \in A, y \in A^c} \mu(x) \cdot \mathbb{P}[X_{t+1} = y | X_t = x]$$

das *Flaschenhals-Verhältnis* von A , und für die Mischzeit gilt dann $\tau \geq 1/(4 \cdot \Theta(A))$ [16, Thm. 7.4]. Die Existenz eines „engen“ Flaschenhalses führt also tatsächlich zu hoher Mischzeit. Allgemein findet man schöne Einführungen in das Thema Markov-Ketten und Mischzeiten in [16], [14, Kap. 3,4] und [12].

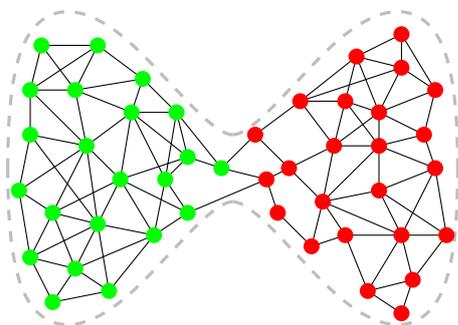


Abbildung 16: Illustration eines Flaschenhalses

Markov-Ketten auf Pseudogeradenarrangements

Definieren wir nun auf der Menge der einfachen Arrangements bestehend aus n Pseudogeraden eine Markov-Kette. Wir starten mit einem beliebigen einfachen Arrangement. In jedem Schritt wählen wir zufällig ein Tripel an Pseudogeraden. Falls diese drei wie in Abb. 9 eine Dreieckszelle bilden, dann führen wir den Dreiecksflip aus. Und so fahren wir fort. Folgende Frage stellen wir als offenes Problem:

Problem. Ist die Markov-Kette, die in einfachen Pseudogeradenarrangements zufällige Dreiecke flipt, schnell mischend?

Wir können diese Frage noch nicht beantworten, doch fokussieren wir uns im Folgenden auf eine eingeschränkte Markov-Kette. Zunächst stellen wir fest, dass sich die Markov-Kette der Dreiecksflips auch definieren lässt auf verallgemeinerten Arrangements, bei denen die Anzahl und die Größen der Parallelklassen fest vorgegeben sind, etwa 3, 2 und 3 im Beispiel in Abb. 13: In jedem Schritt wird ein zufälliges Tripel von Pseudogeraden unterschiedlicher Parallelklassen gewählt und geflipt, falls diese Pseudogeraden ein Dreieck formen. Für drei Parallelklassen wurde gezeigt, dass zufällige Dreiecksflips schnell mischend sind (Vgl. [17, 23]). Dadurch lassen sich zufällige hexagonale Rhombenpflasterungen wie in Abb. 17 effizient erzeugen. Hier zeigt sich ein verblüffender Effekt: Mit zunehmender Größe der Pflasterung sind mit hoher Wahrscheinlichkeit die Rhomben außerhalb eines ellipsenförmigen Bereiches alle gleich ausgerichtet; dieser Bereich ist *gefroren*.

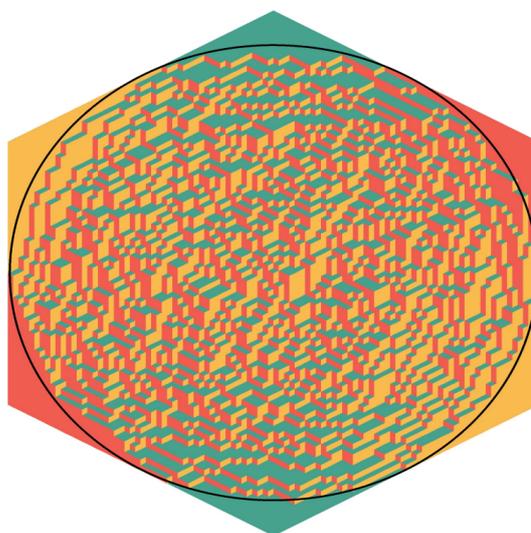


Abbildung 17: Zufällige hexagonale Rhombenpflasterung, entnommen aus [9]

Markov-Kette auf Parallelklassen

Was passiert, wenn man nur Dreiecksflips zulässt, an denen eine bestimmte, ausgezeichnete Pseudogerade beteiligt ist, wie etwa die rote in Abb. 2? Oder wenn man nur solche Dreiecke flipt, an denen eine bestimmte, ausgezeichnete Parallelklasse beteiligt ist? Sicherlich erhält man eine Markov-Kette, die nur auf einer Teilmenge der Arrangements operiert, abhängig von der Lage der anderen Pseudogeraden. Doch wie verhält es sich mit der Mischzeit? Tatsächlich zeigen wir:

Theorem (R., 2021). Die Markov-Kette, die in einem Verallgemeinerten Pseudogeradenarrangement zufällige Dreiecke mit Beteiligung einer ausgezeichneten Parallelklasse flipt, ist *schnell mischend* bei 3 Parallelklassen, aber i.A. *nicht schnell mischend* bei 4 oder mehr Parallelklassen.

Im Fall von nur 3 Parallelklassen stimmt die Markov-Kette mit der uneingeschränkten Markov-Kette überein, denn an jedem Dreieck sind stets alle Parallelklassen beteiligt. Abb. 18 zeigt ein Beispiel für 5 Parallelklassen. Erlaubt man hier nur Dreiecksflips mit Beteiligung der dicken roten Pseudogerade, so wäre beispielsweise die hellblaue Zelle ein gültiger Flip.

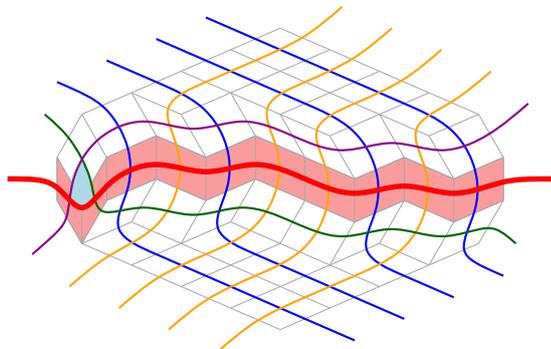


Abbildung 18: Markov-Kette auf roter Parallelklasse

Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass sich diese Markov-Kette wie in Abb. 18 und Abb. 19 dargestellt äquivalent als Flips des roten Bandes beschreiben lässt: Die Zustände sind die monotonen Pfade von links nach rechts durch die von den übrigen Pseudogegen definierte Rhombenpflasterung; die Übergänge sind Flips des Pfades über Rhomben, die den Pfad an zwei Kanten berühren. Der eingezeichnete rote Pfad in Abb. 19 entspricht der aktuellen Lage der roten Pseudogerade in Abb. 18, und ein Flip über den hellblauen Rhombus entspricht genau dem Flip am hellblauen Dreieck.

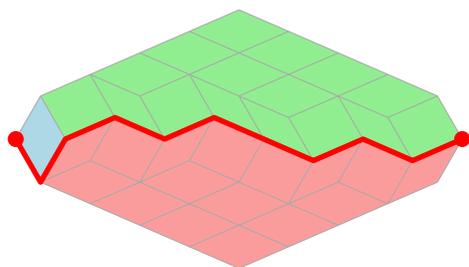


Abbildung 19: Flaschenhals bei 5 Parallelklassen

In dieser Anschauung der Markov-Kette kann man nun einen Flaschenhals ausmachen. Die Zustandsmenge partitioniert sich in zwei Klassen: Einerseits die Pfade, die unterhalb des hellblauen Rhombus und nie zwischen roten Rhomben verlaufen, und andererseits jene Pfade, die oberhalb des hellblauen Rhombus und nie zwischen grünen Rhomben verlaufen. Der einzige Zustandsübergang, der beide Klassen verbindet, ist ein Flip des eingezeichneten Pfades über den hellblauen Rhombus. Die gezeigte Instanz ist natürlich geschickt gewählt worden,

damit dieses Argument funktioniert, lässt sich aber beliebig skalieren. Dieser Flaschenhals liefert einen formalen Beweis des obigen Theorems für den Fall von 5 Parallelklassen. Auch für 4 Parallelklassen (siehe Abb. 20) oder für mehr als 5 Parallelklassen findet man analoge Instanzen. In [2] wird indirekt danach gefragt, ob die dort als *slow fibers* bezeichneten nicht schnell mischenden Instanzen existieren. Diese Frage ist nun beantwortet.

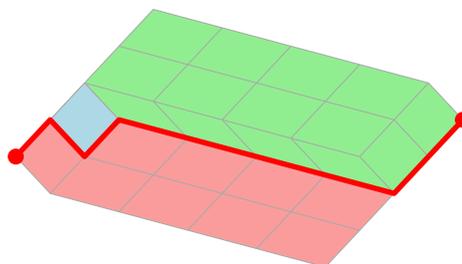


Abbildung 20: Flaschenhals bei 4 Parallelklassen

Literatur

- [1] Omer Angel, Alexander E. Holroyd, Dan Romik, and Bálint Virág. Random sorting networks. *Adv. Math.*, 215(2):839–868, 2007. doi:10.1016/j.aim.2007.05.019.
- [2] Nicolas Destainville. Mixing times of plane random rhombus tilings. In *Discrete models: combinatorics, computation, and geometry. Proceedings of the 1st international conference (DM-CCG)*, pages 1–22. 2001. doi:10.46298/dmtcs.2300.
- [3] Adrian Dumitrescu and Ritankar Mandal. New lower bounds for the number of pseudoline arrangements. *J. Comput. Geo.*, 11(1):60–92, 2020. doi:10.20382/jocg.v11i1a3.
- [4] Serge Elnitsky. Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in Coxeter groups. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 77(2):193–221, 1997. doi:10.1006/jcta.1997.2723.
- [5] Stefan Felsner and Manfred Scheucher. Arrangements of pseudocircles: On circularizability. *Disc. & Comput. Geo.*, 64:776–813, 2020. doi:10.1007/s00454-019-00077-y.
- [6] Stefan Felsner and Pavel Valtr. Coding and counting arrangements of pseudolines. *Disc. & Comput. Geo.*, 46(3):405–416, 2011. doi:10.1007/s00454-011-9366-4.
- [7] Stefan Felsner and Günter M. Ziegler. Zonotopes associated with higher Bruhat orders. *Discrete Math.*, 241(1-3):301–312, 2001. doi:10.1016/S0012-365X(01)00127-3.

- [8] Jacob E. Goodman and Richard Pollack. Proof of Grünbaum’s conjecture on the stretchability of certain arrangements of pseudolines. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 29:385–390, 1980. doi:10.1016/0097-3165(80)90038-2.
- [9] Vadim Gorin. *Lectures on random lozenge tilings*, volume 193 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge University Press, 2021. doi:10.1017/9781108921183.
- [10] Curtis Greene, Albert Nijenhuis, and Herbert S. Wilf. A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Adv. Math.*, 31:104–109, 1979. doi:10.1016/0001-8708(79)90023-9.
- [11] Branko Grünbaum. *Arrangements and spreads*, volume 10 of *Reg. Conf. Ser. Math.* AMS, 1972.
- [12] Venkatesan Guruswami. Rapidly mixing markov chains: A comparison of techniques (a survey), 2016. arXiv:1603.01512.
- [13] Gonçalo Gutierrez, Ricardo Mamede, and José Luis Santos. Commutation classes of the reduced words for the longest element of \mathfrak{S}_n . *Electron. J. Comb.*, 27(2):research paper p2.21, 25, 2020. doi:10.37236/9481.
- [14] Mark Jerrum. *Counting, sampling and integrating: algorithms and complexity*. Birkhäuser, 2003.
- [15] Friedrich Levi. Die Teilung der projektiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, 78:256–267, 1926.
- [16] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. AMS, 2nd edition, 2017.
- [17] Michael Luby, Dana Randall, and Alistair Sinclair. Markov chain algorithms for planar lattice structures. *SIAM Journal on Computing*, 31(1):167–192, 2001. doi:10.1137/S0097539799360355.
- [18] P. A. MacMahon. *Combinatory Analysis*, volume 2. Cambridge University Press, 1916.
- [19] OEIS Foundation Inc. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at <http://oeis.org>.
- [20] Gerhard Ringel. Über Geraden in allgemeiner Lage. *Elemente der Mathematik*, 12:75–82, 1957. doi:10.5169/seals-19211.
- [21] Peter W. Shor. Stretchability of pseudolines is NP-hard. Applied geometry and discrete mathematics, volume 4 of DIMACS Series in DMTCS, 1991.
- [22] Richard P. Stanley. On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups. *Eur. J. Comb.*, 5:359–372, 1984. doi:10.1016/S0195-6698(84)80039-6.
- [23] David Bruce Wilson. Mixing times of lozenge tiling and card shuffling Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 14(1):274–325, 2004. doi:10.1214/aop/1075828054.