

Mathematische Forschung verstehen

Freie Universität Berlin

26. November 2024

DIE WELT DER
PSEUDOGERRADEN



Sandro M. Roch

Pseudogeradenarrangement

Def: *Pseudogeradenarrangement:*

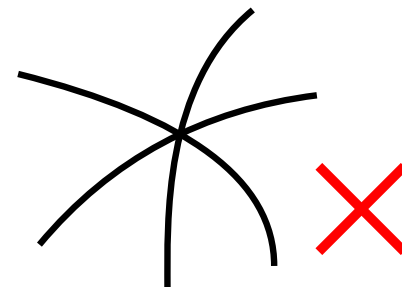
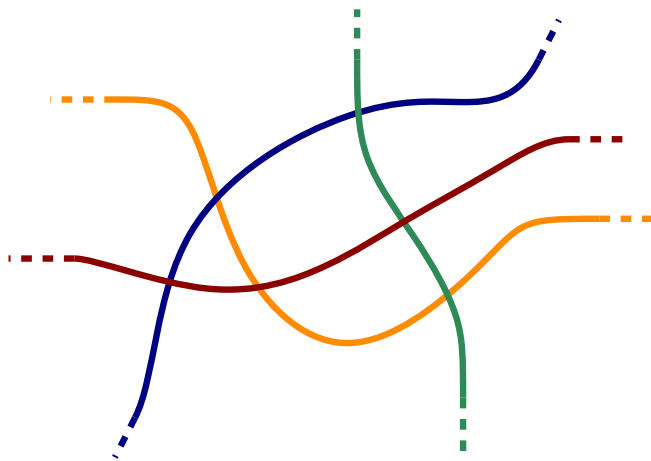
- Familie stetiger Kurven $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|f_i(t)\| = \infty$$

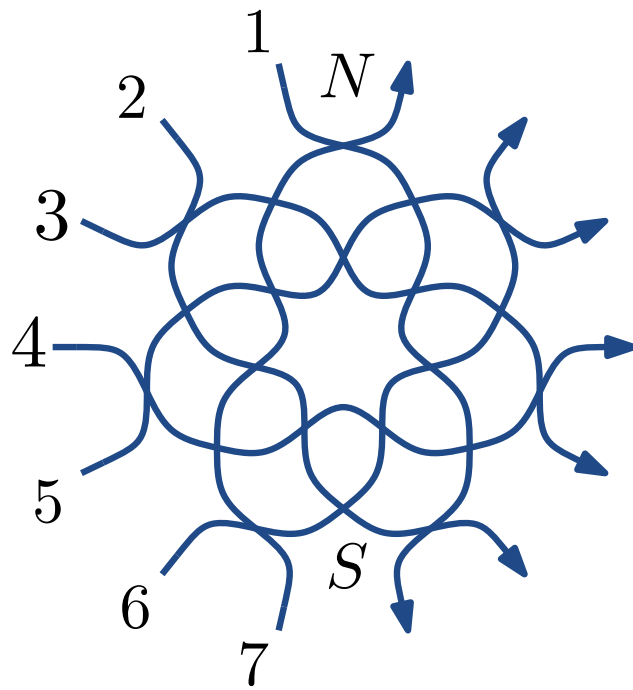
- Je zwei kreuzen sich in genau einem Punkt.

Einfaches Pseudogeradenarrangement:

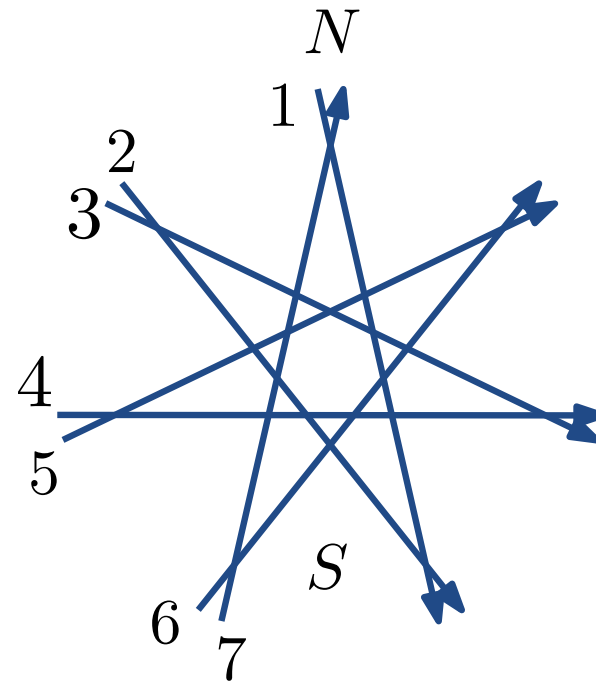
Keine 3 Pseudogeraden kreuzen sich in einem Punkt.

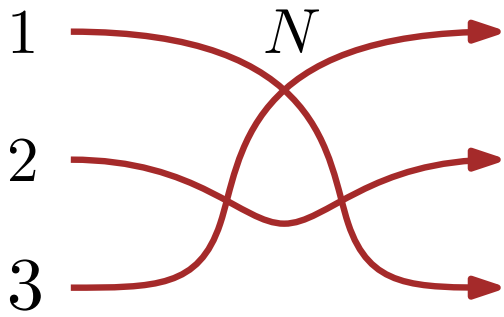


Pseudogeradenarrangement

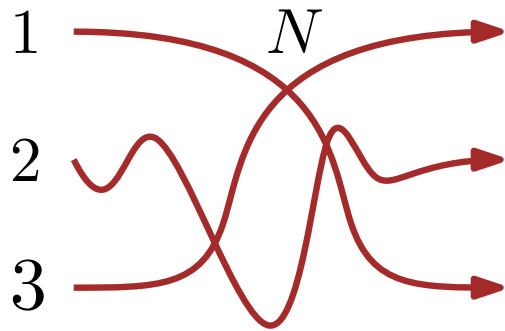


\cong

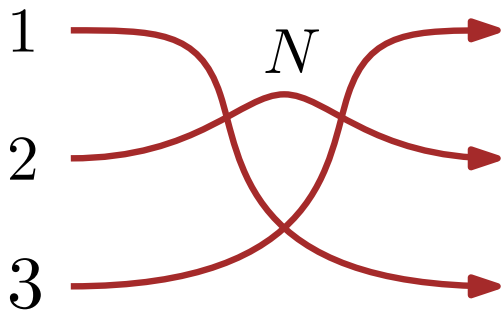


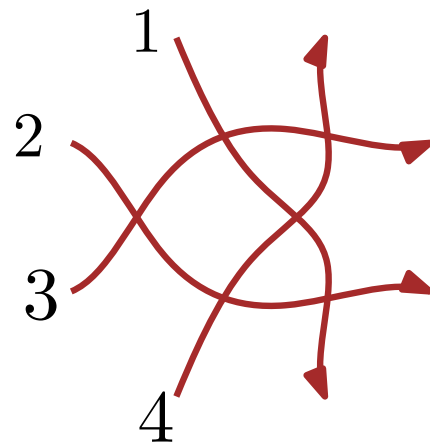
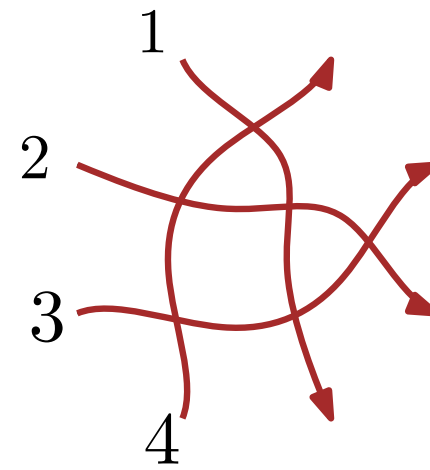
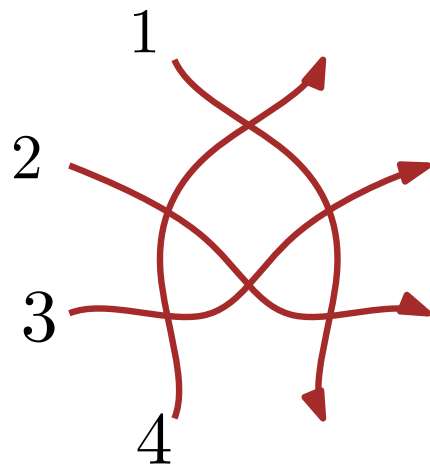
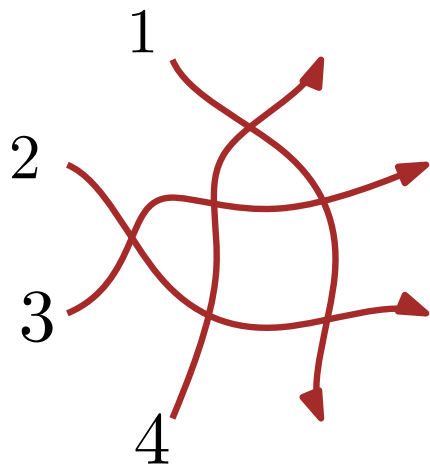


\mathbb{R}

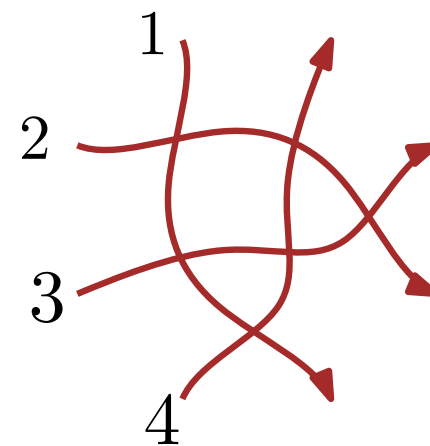
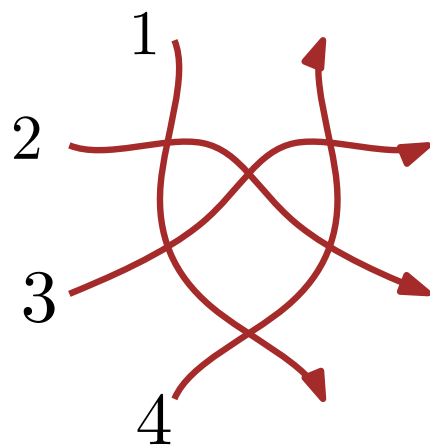
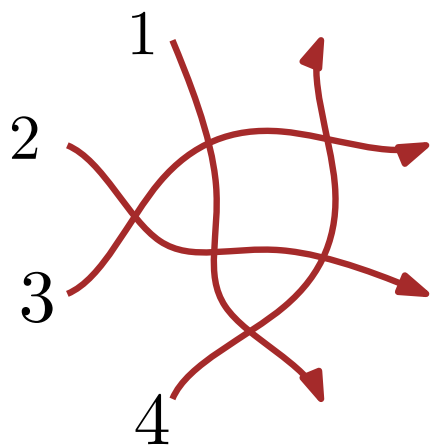
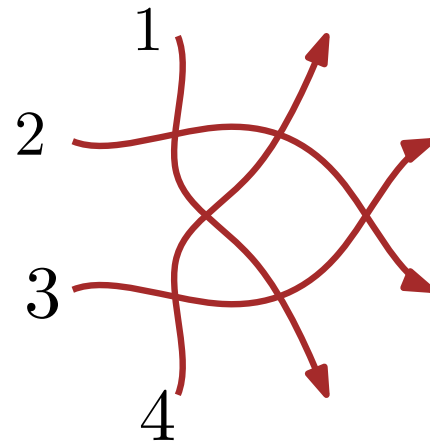


\mathbb{R}

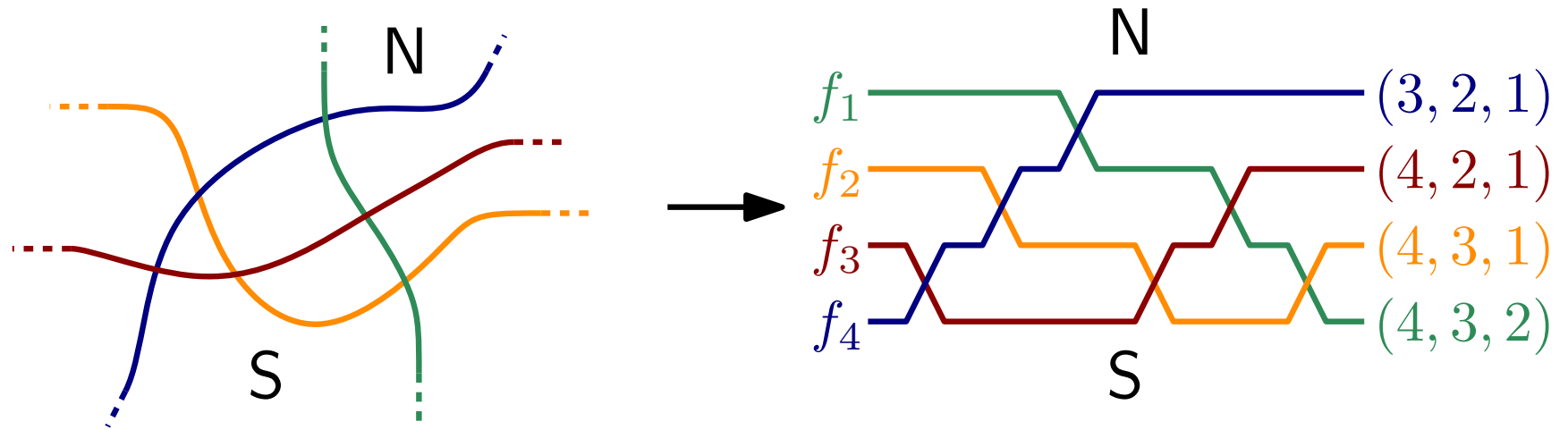




$n = 4$:
Genau 8
Arrangements.



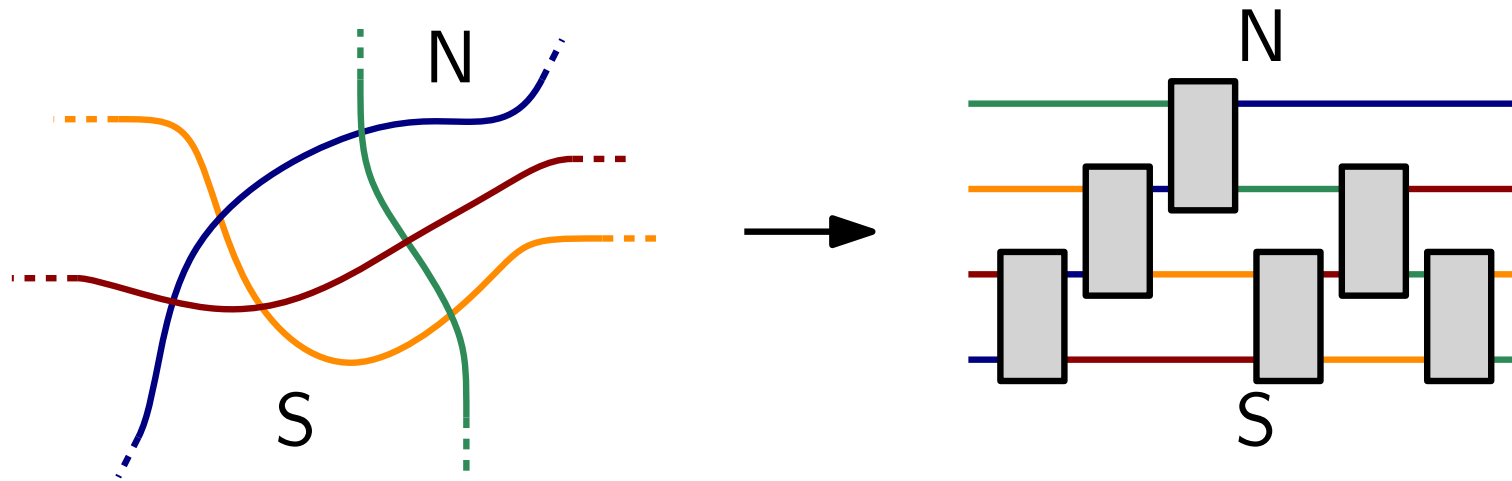
Drahtdiagramme



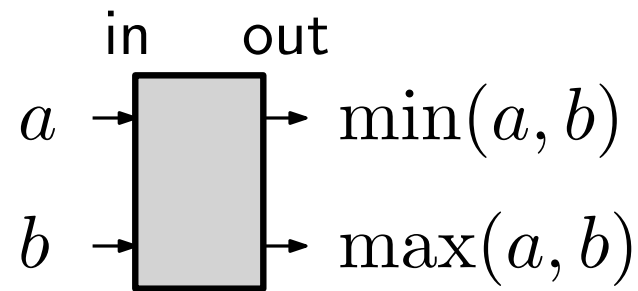
Kodierung mittels Permutationen:

Permutation $\pi_i \in S_{n-1}$ kodiert Schnittreihenfolge von f_i .

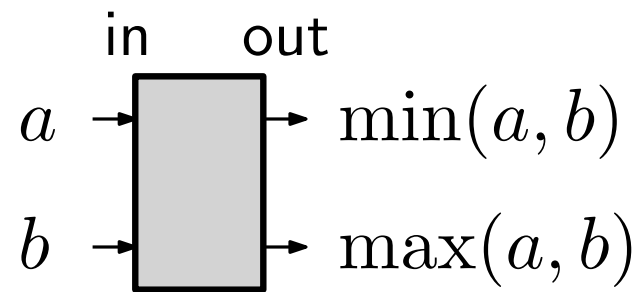
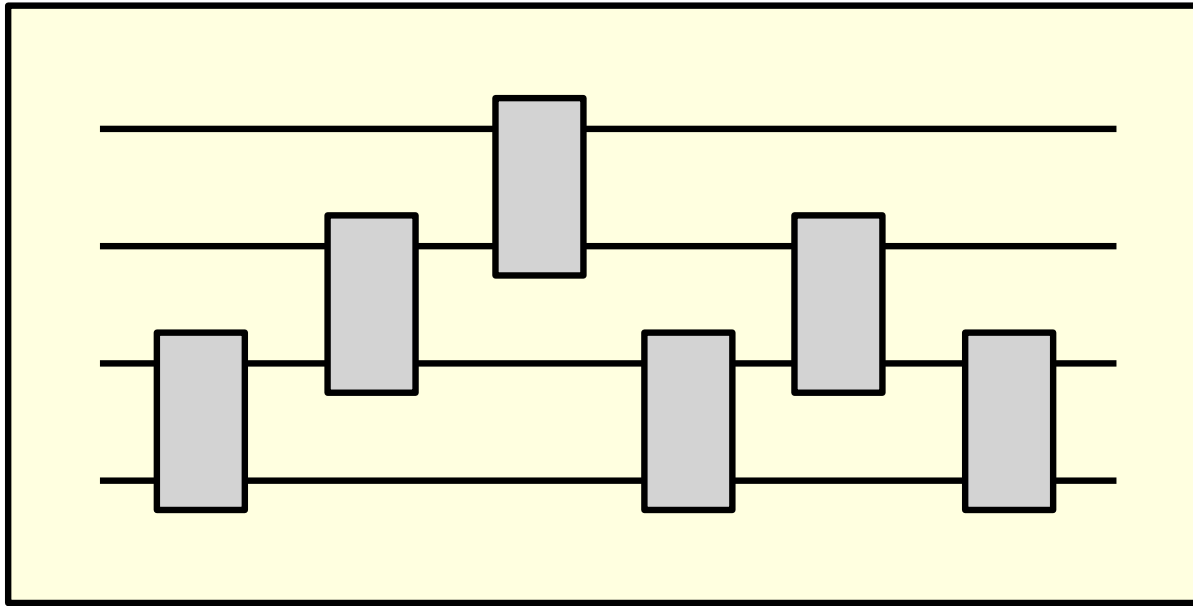
Drahtdiagramme



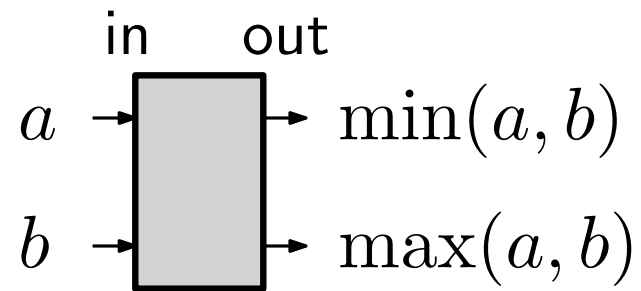
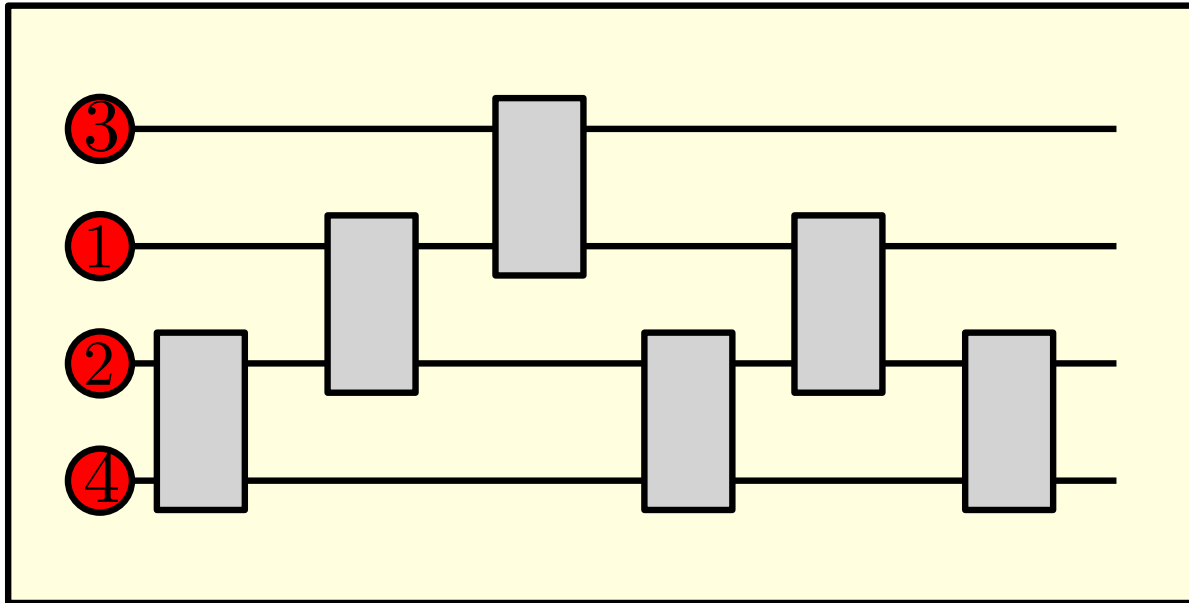
Drahtdiagramme als Sortiernetze:



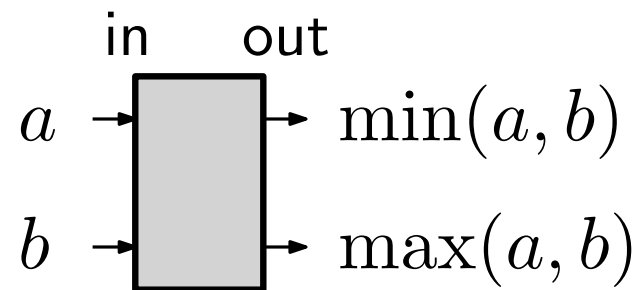
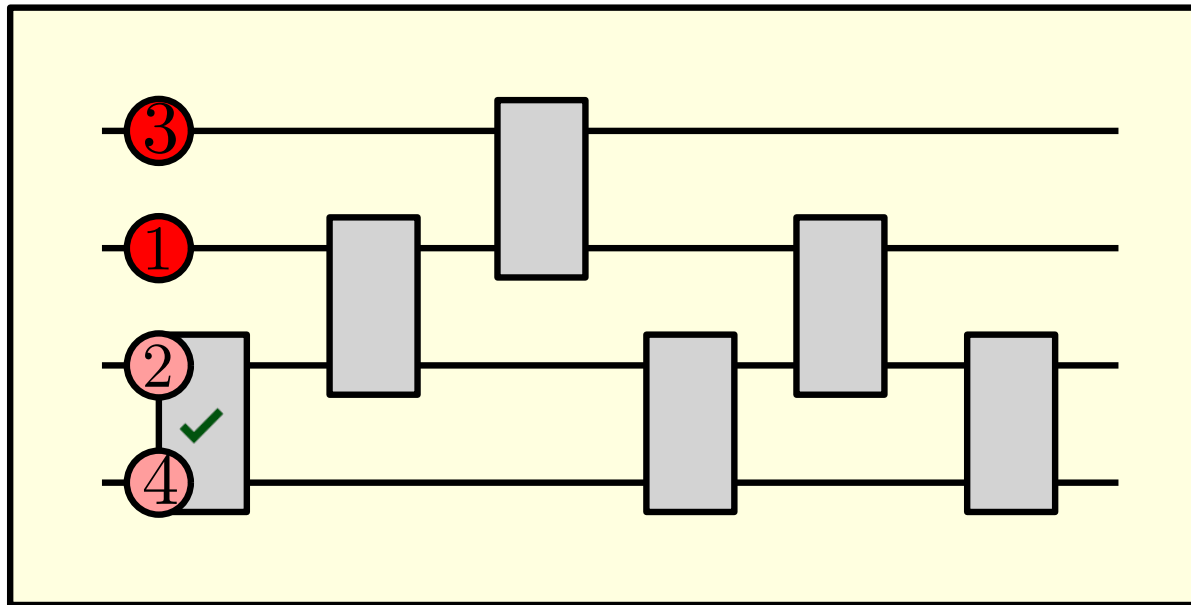
Drahtdiagramme



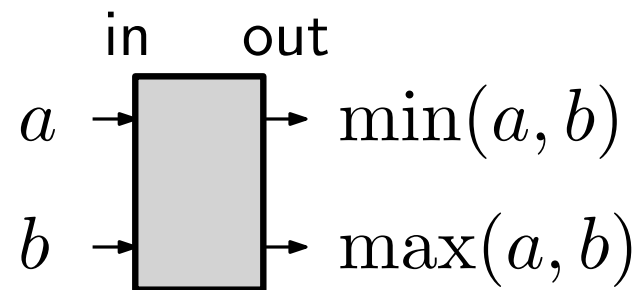
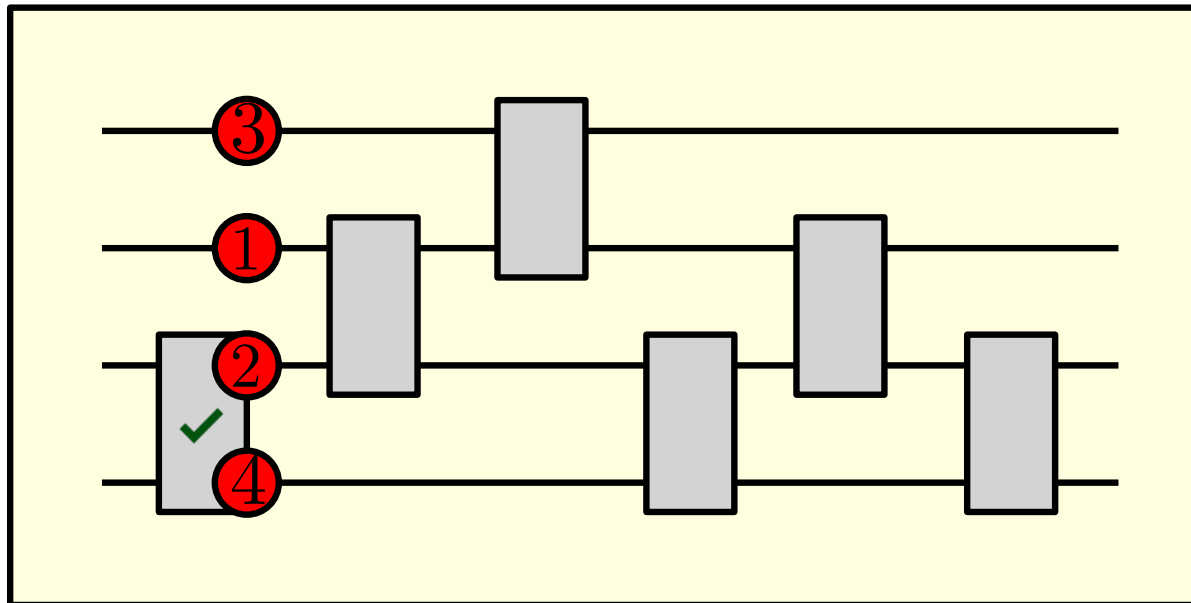
Drahtdiagramme



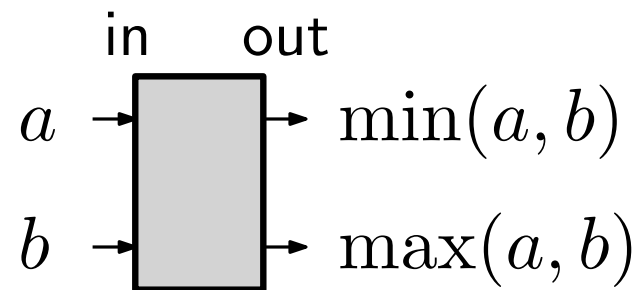
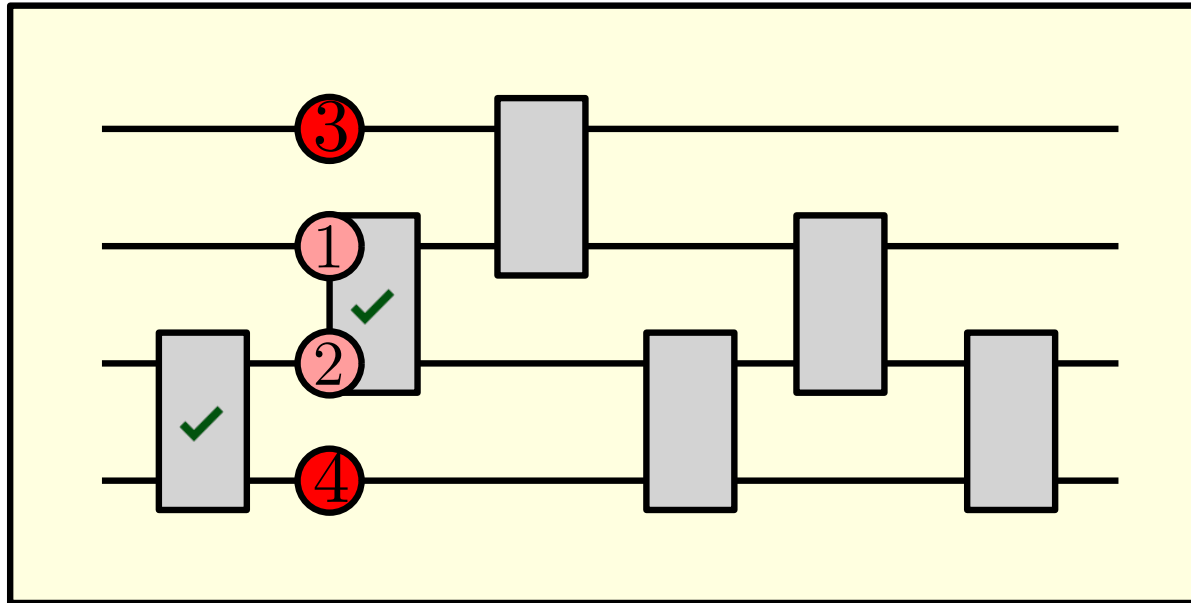
Drahtdiagramme



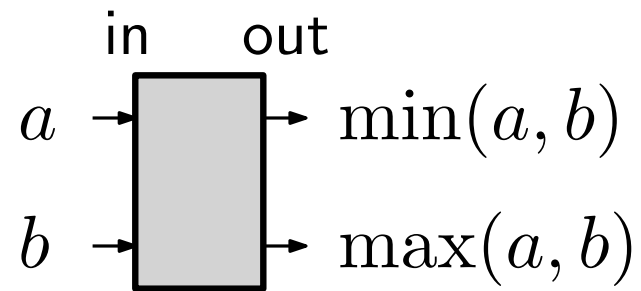
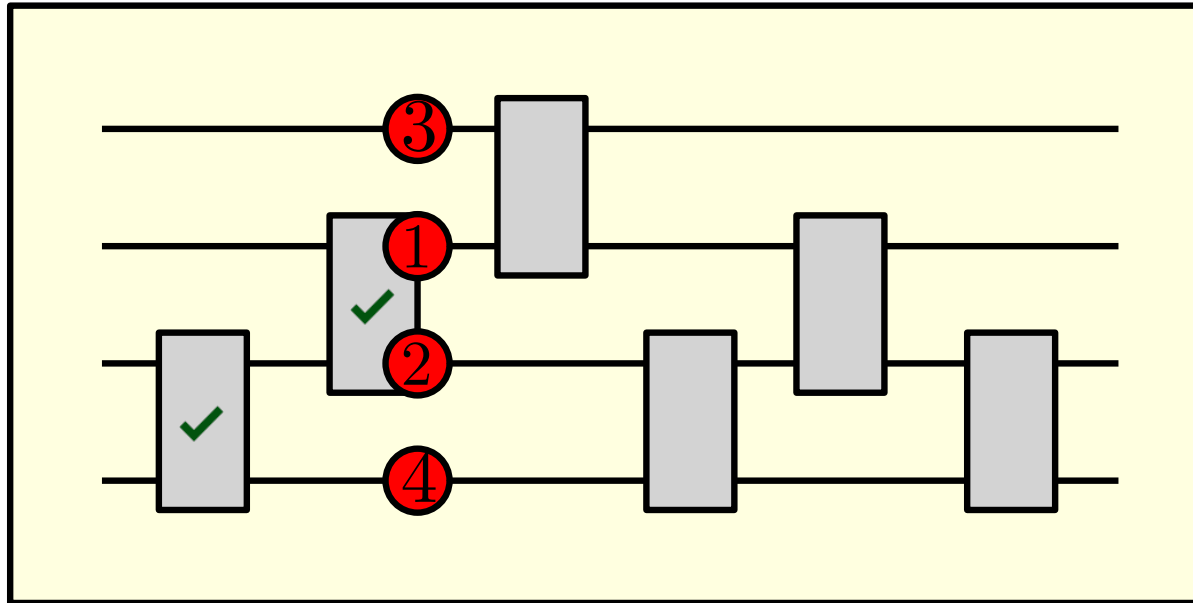
Drahtdiagramme



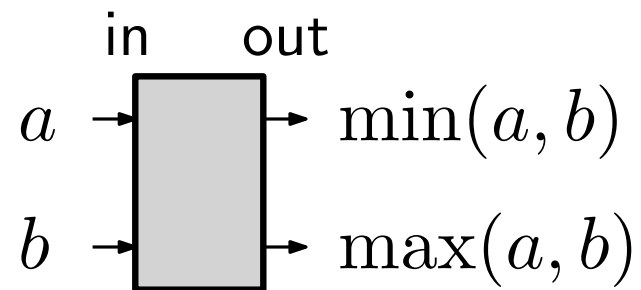
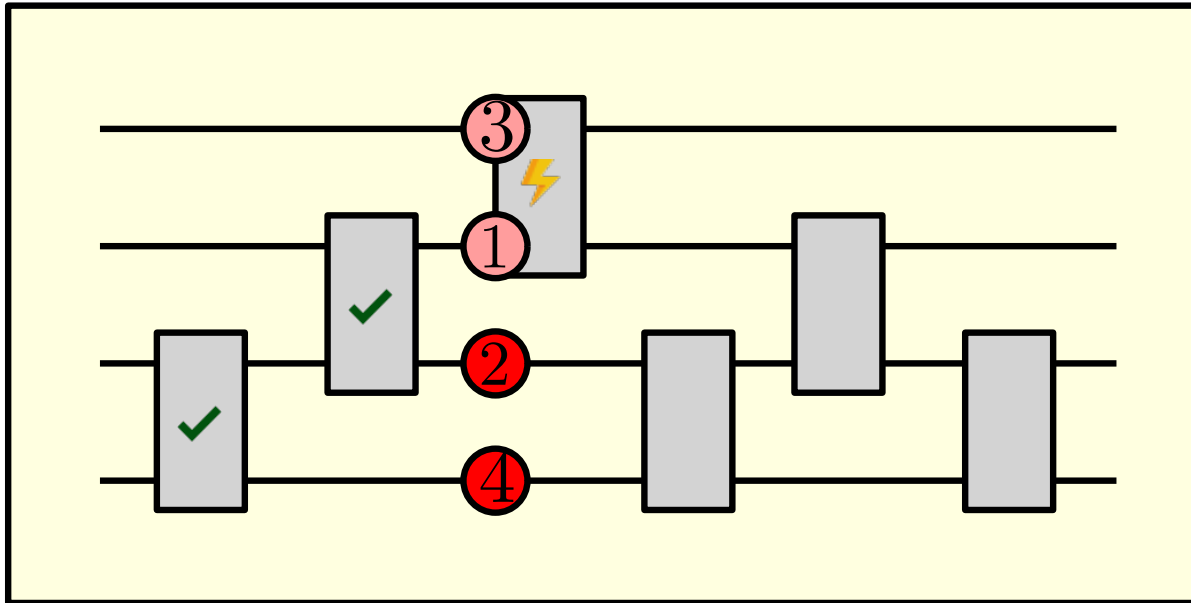
Drahtdiagramme



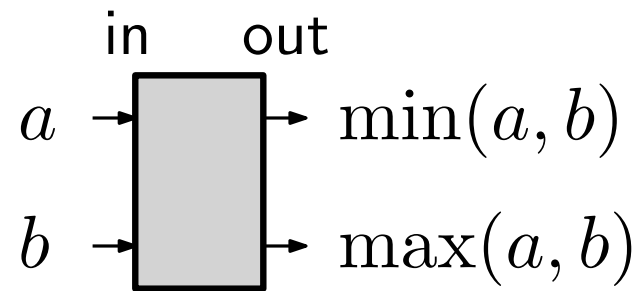
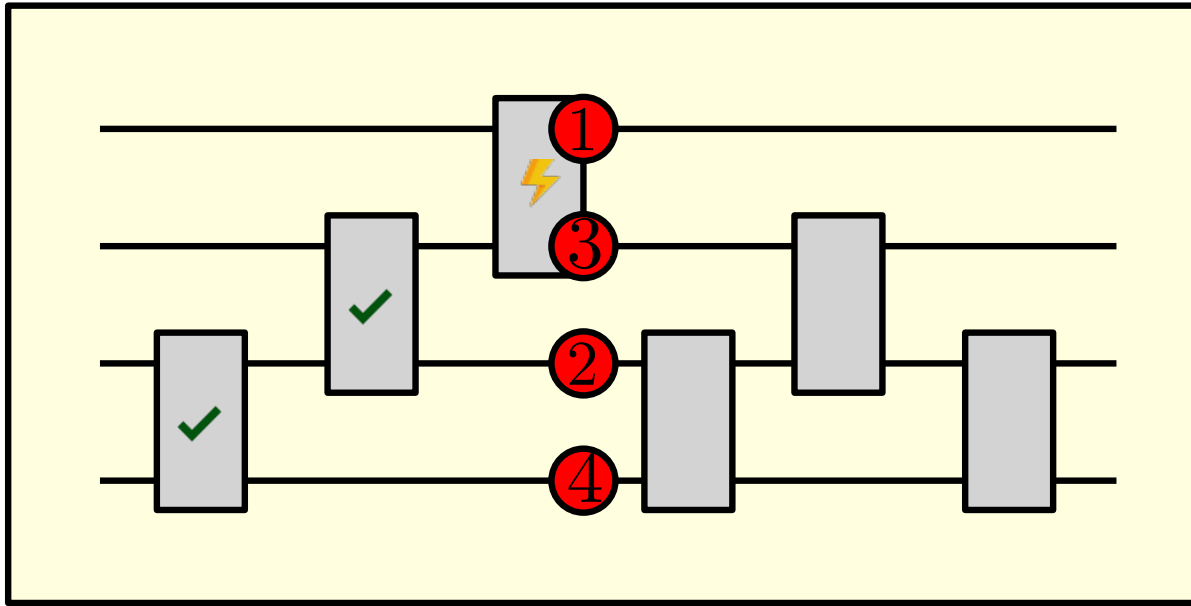
Drahtdiagramme



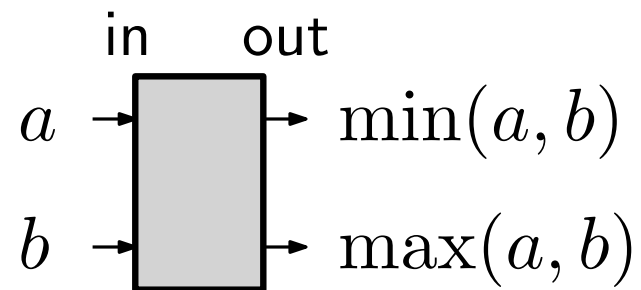
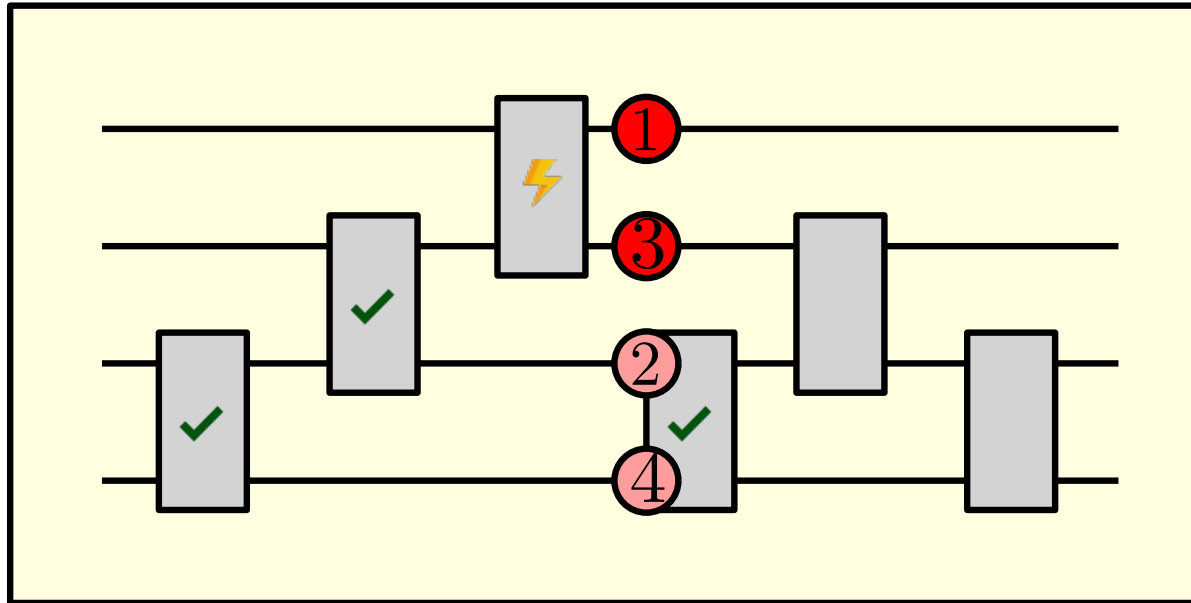
Drahtdiagramme



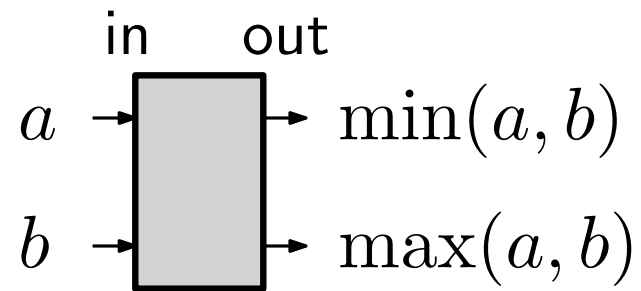
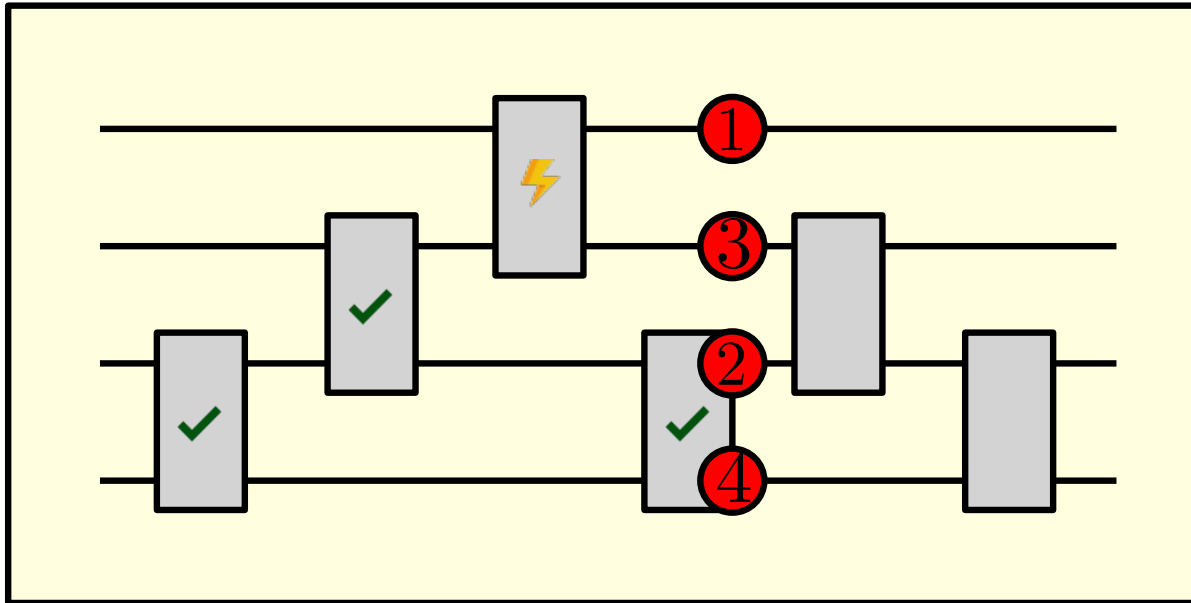
Drahtdiagramme



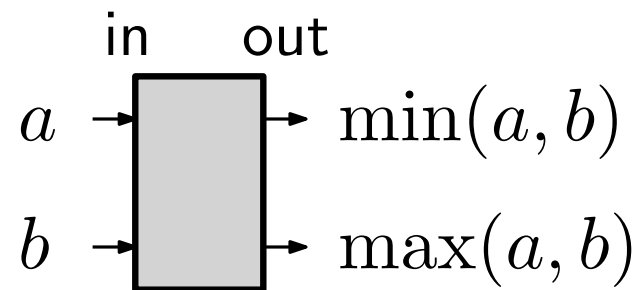
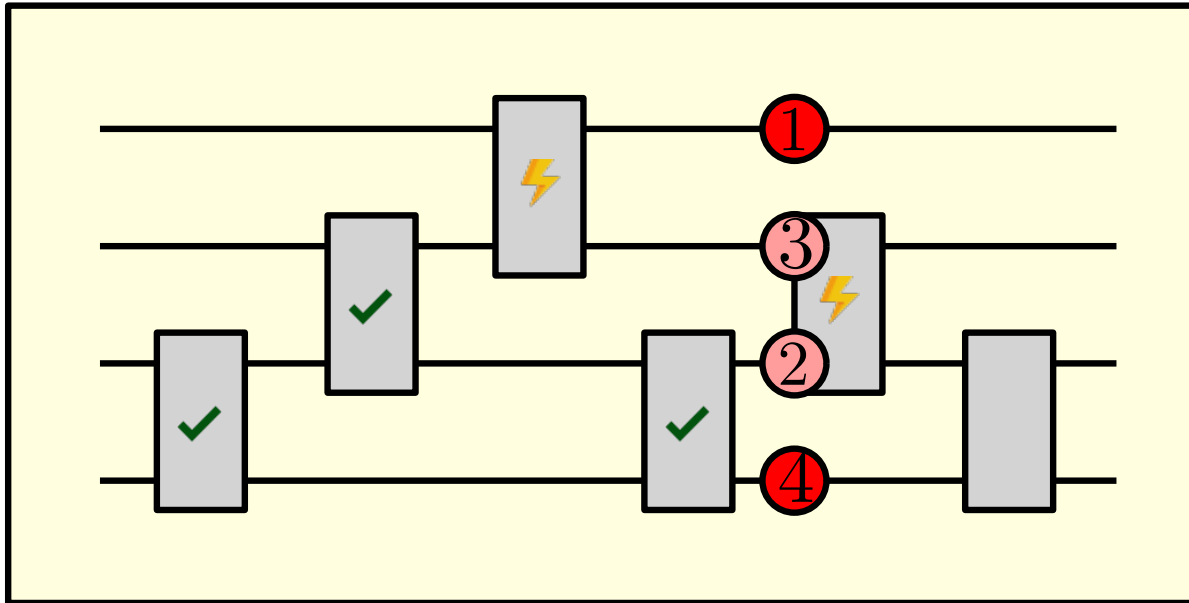
Drahtdiagramme



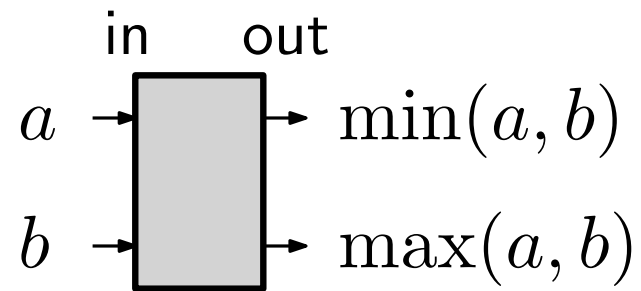
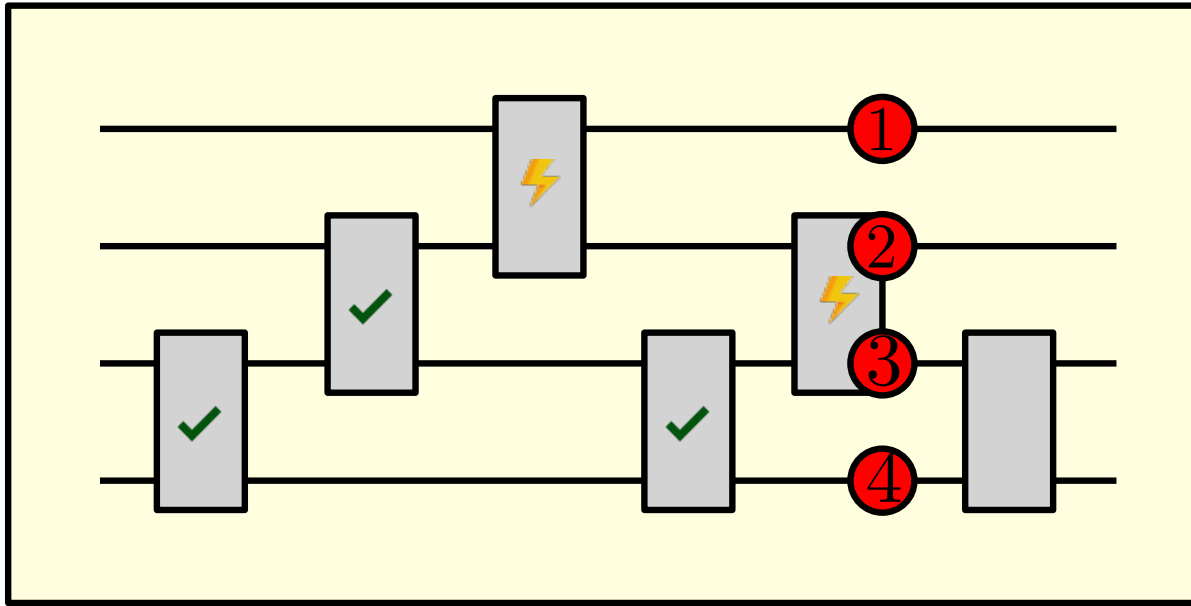
Drahtdiagramme



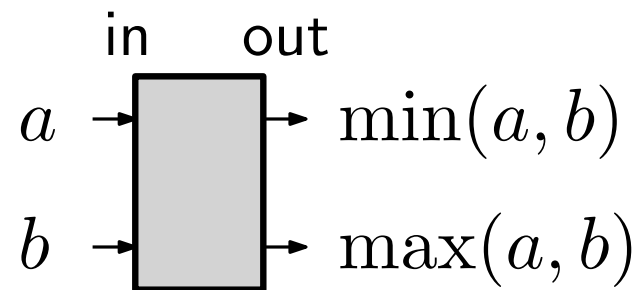
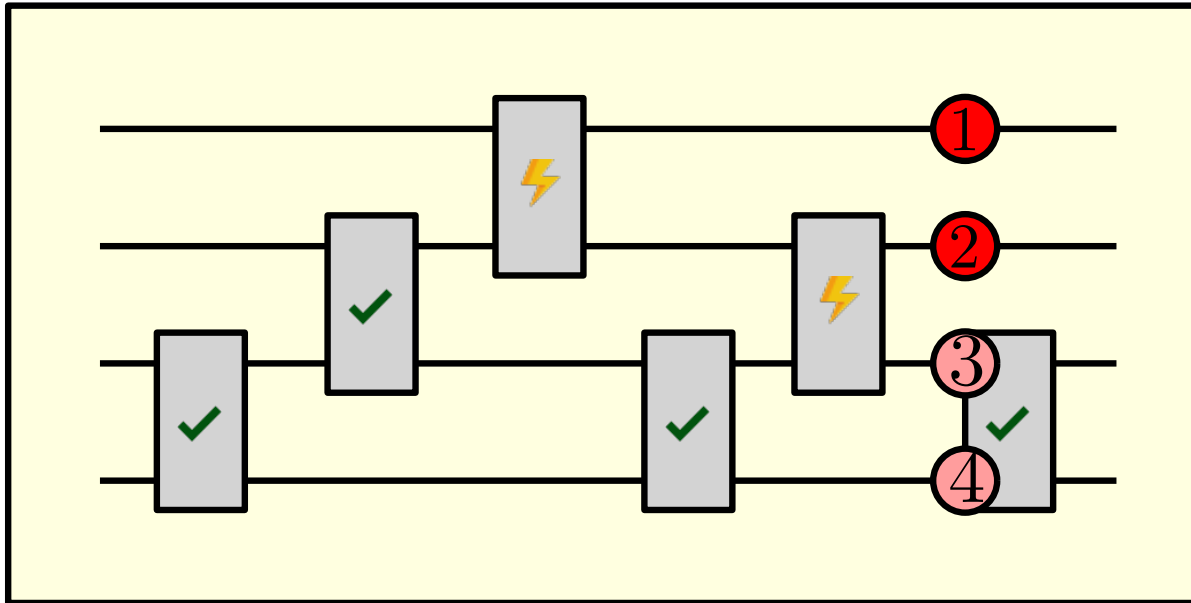
Drahtdiagramme



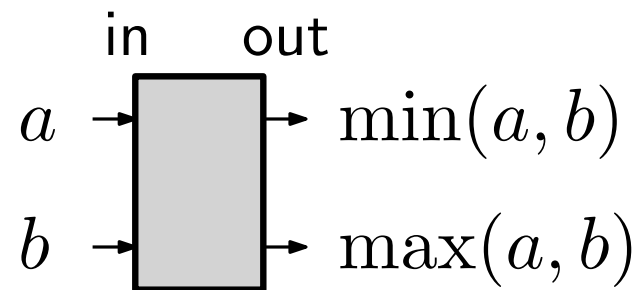
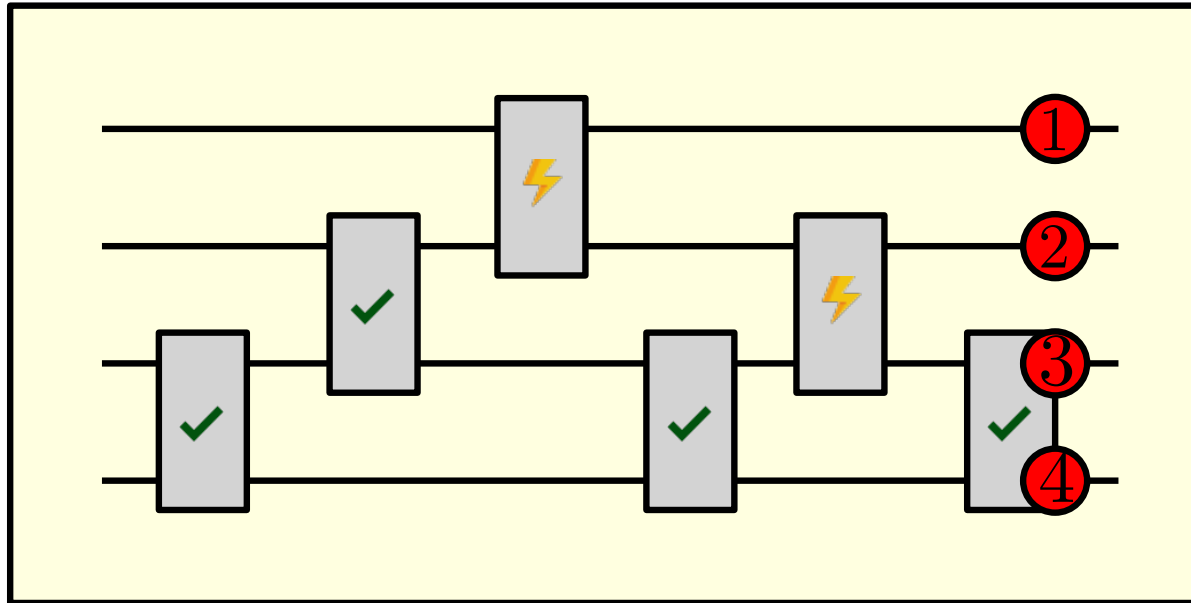
Drahtdiagramme



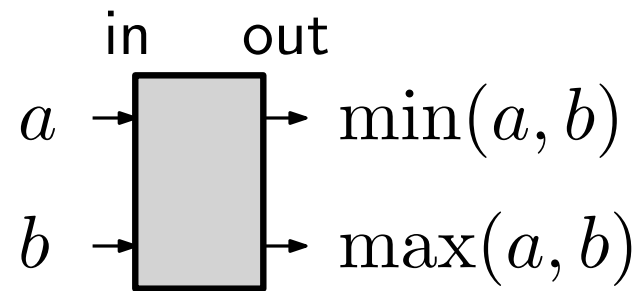
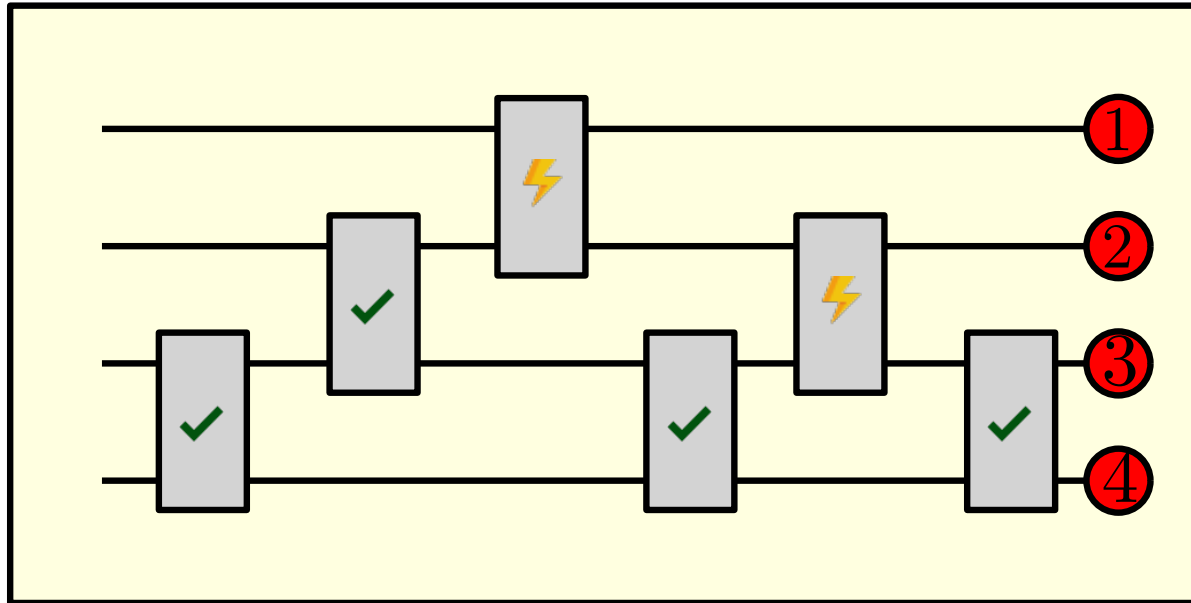
Drahtdiagramme



Drahtdiagramme



Drahtdiagramme



Drahtdiagramme

Proposition

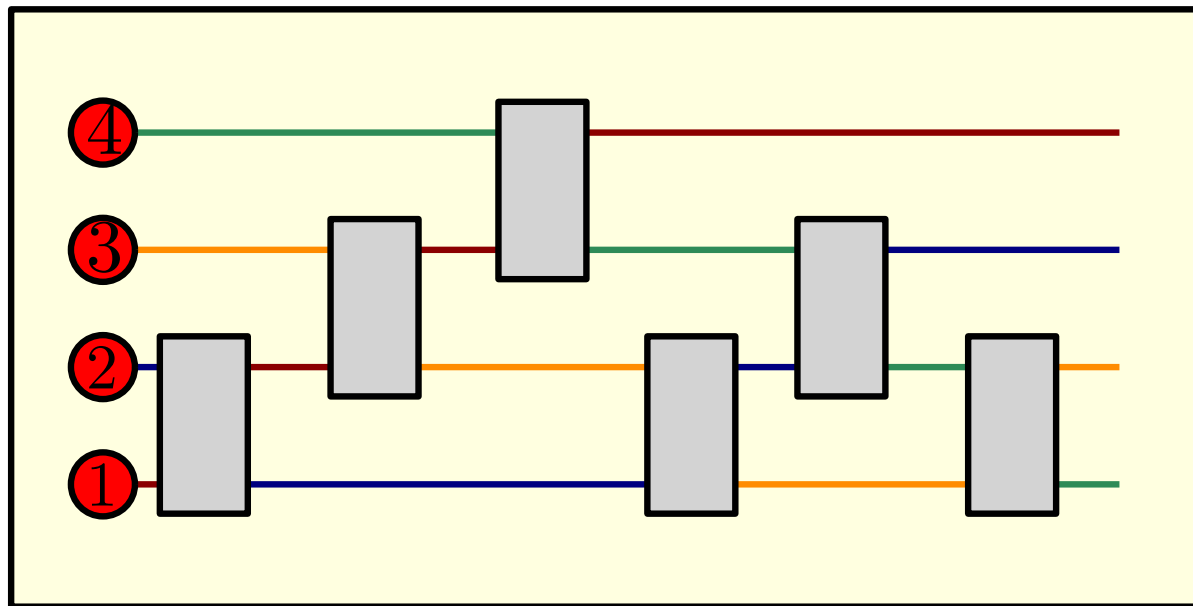
Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 1: Permutation $(n, \dots, 1)$ wird sortiert.

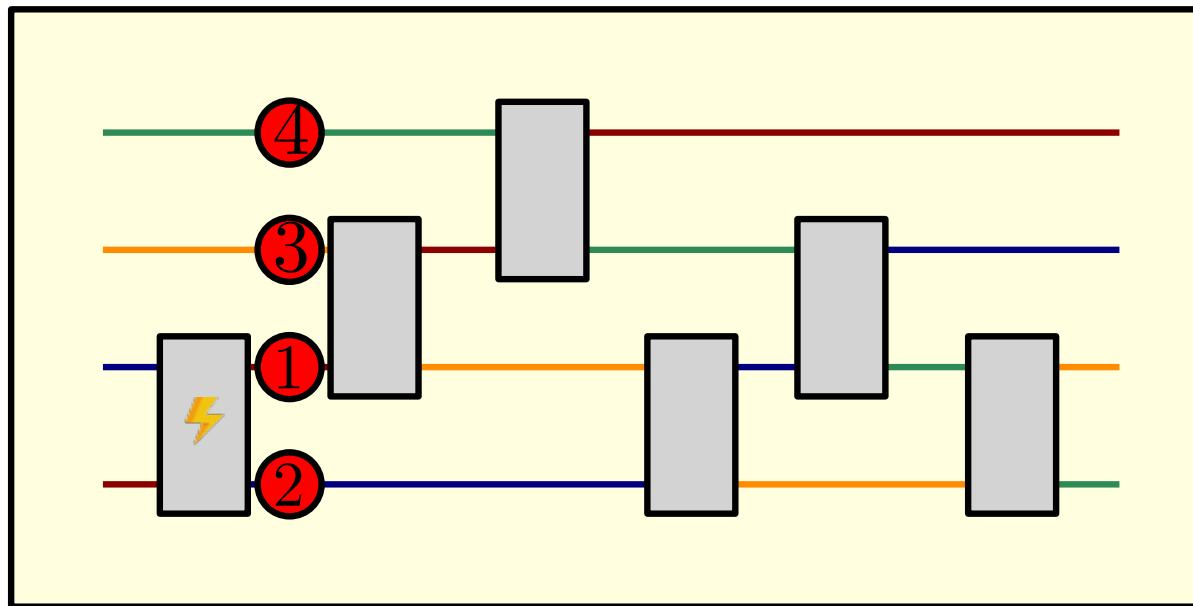


Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 1: Permutation $(n, \dots, 1)$ wird sortiert.

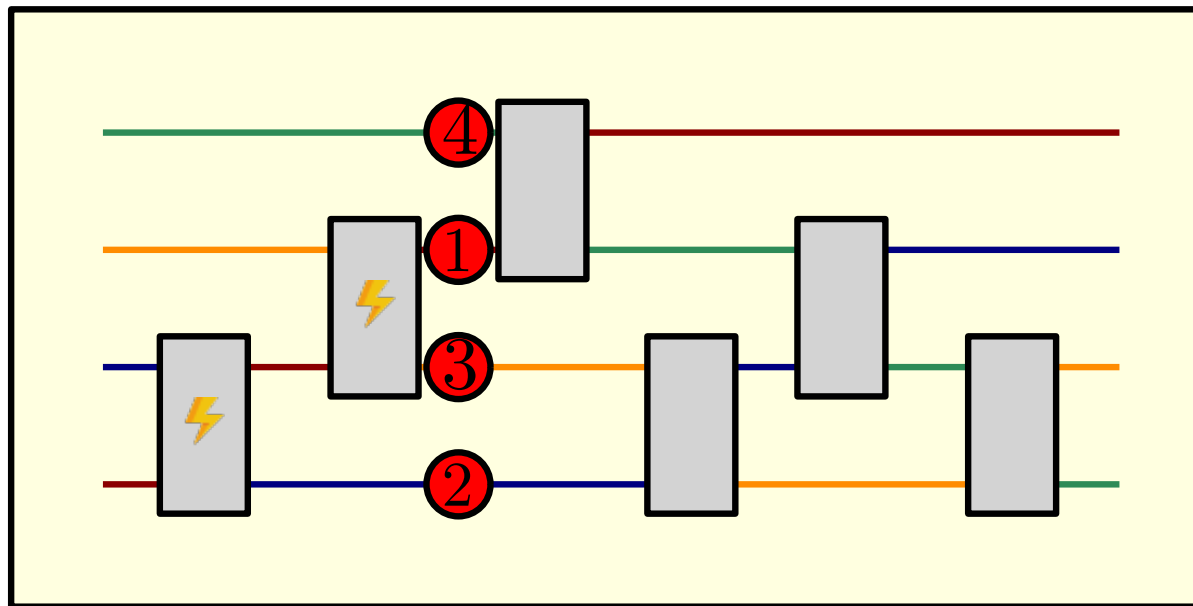


Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 1: Permutation $(n, \dots, 1)$ wird sortiert.

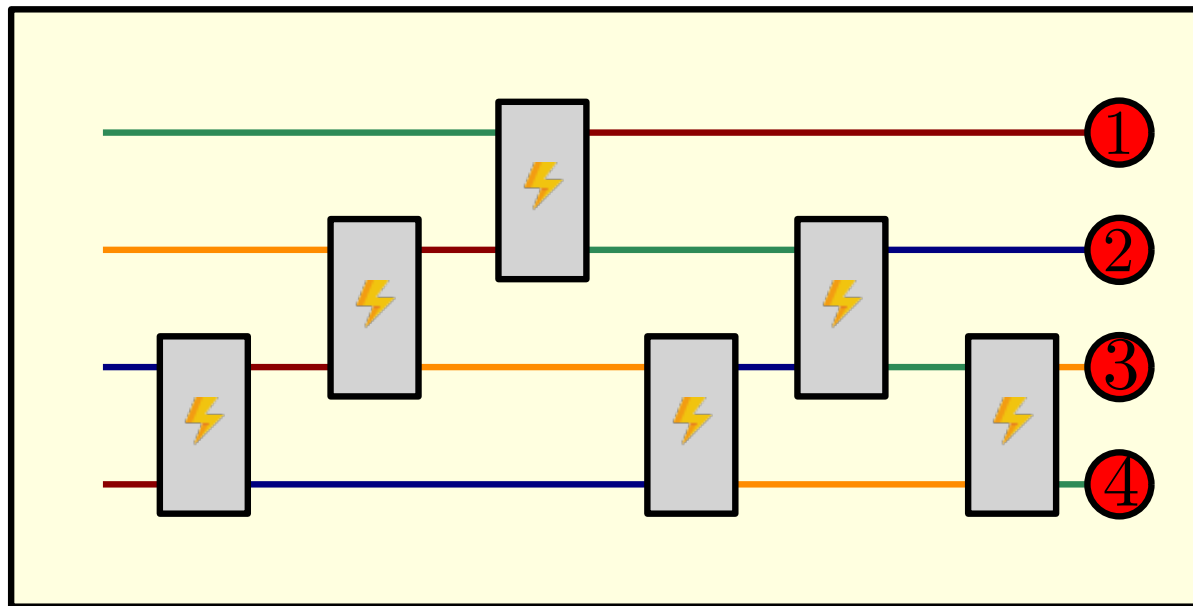


Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 1: Permutation $(n, \dots, 1)$ wird sortiert.



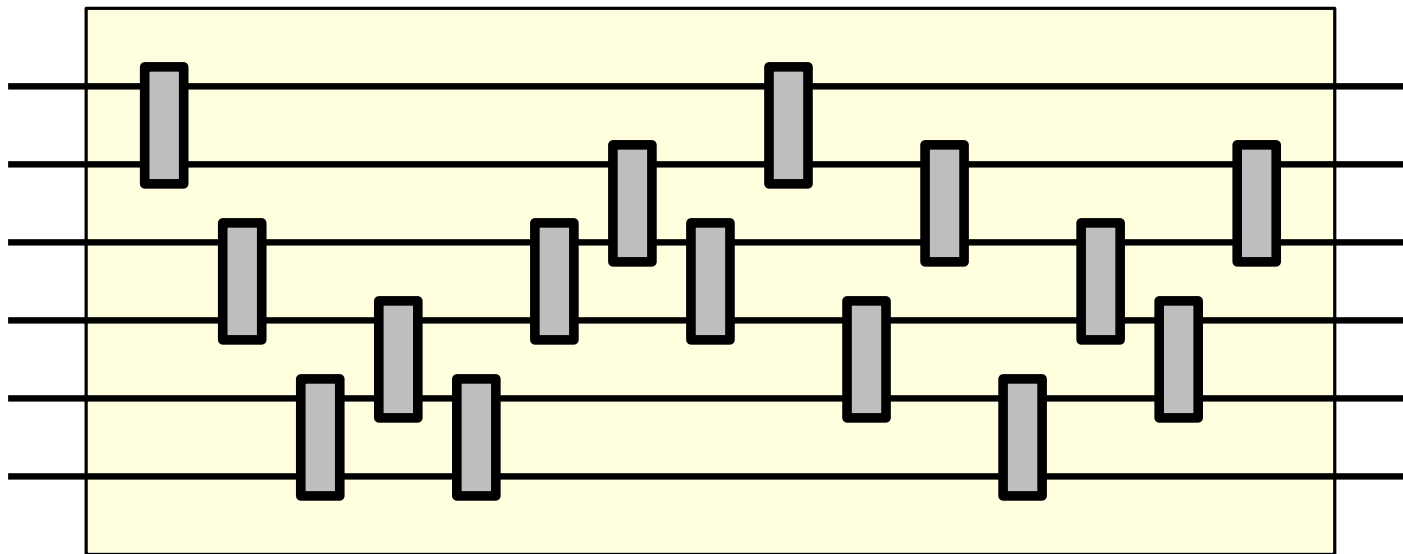
Beobachtung: Elemente verlaufen entlang der Pseudogeraden!

Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.

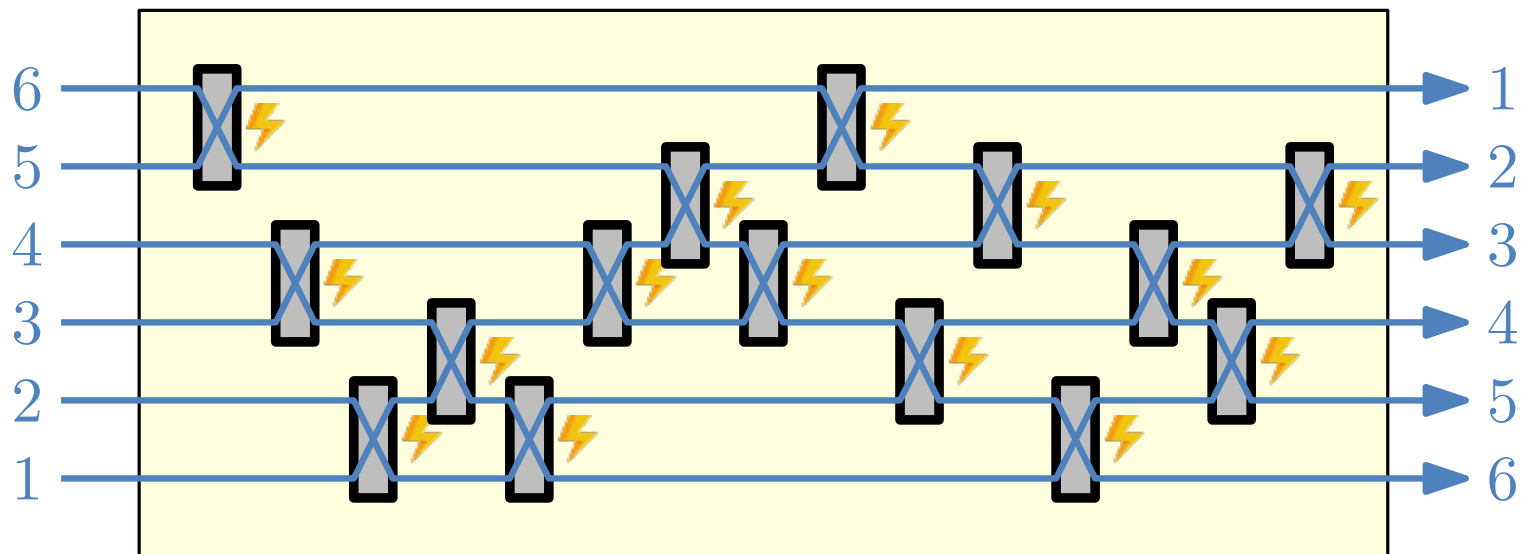


Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.

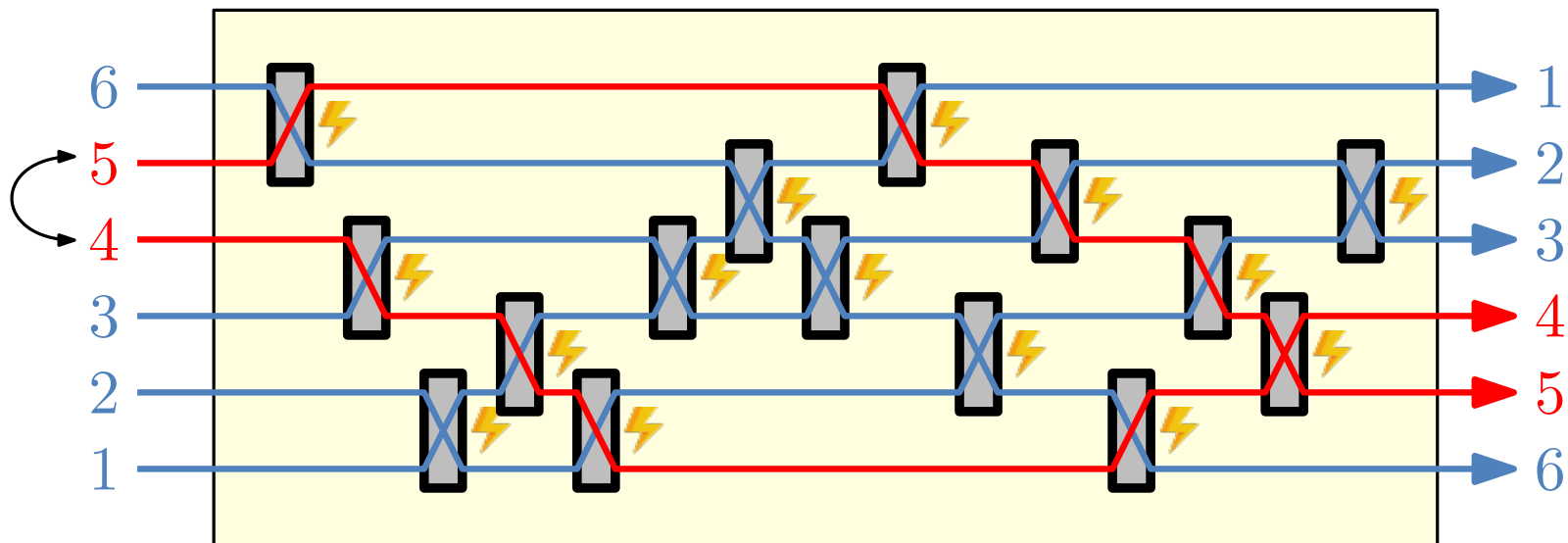


Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.

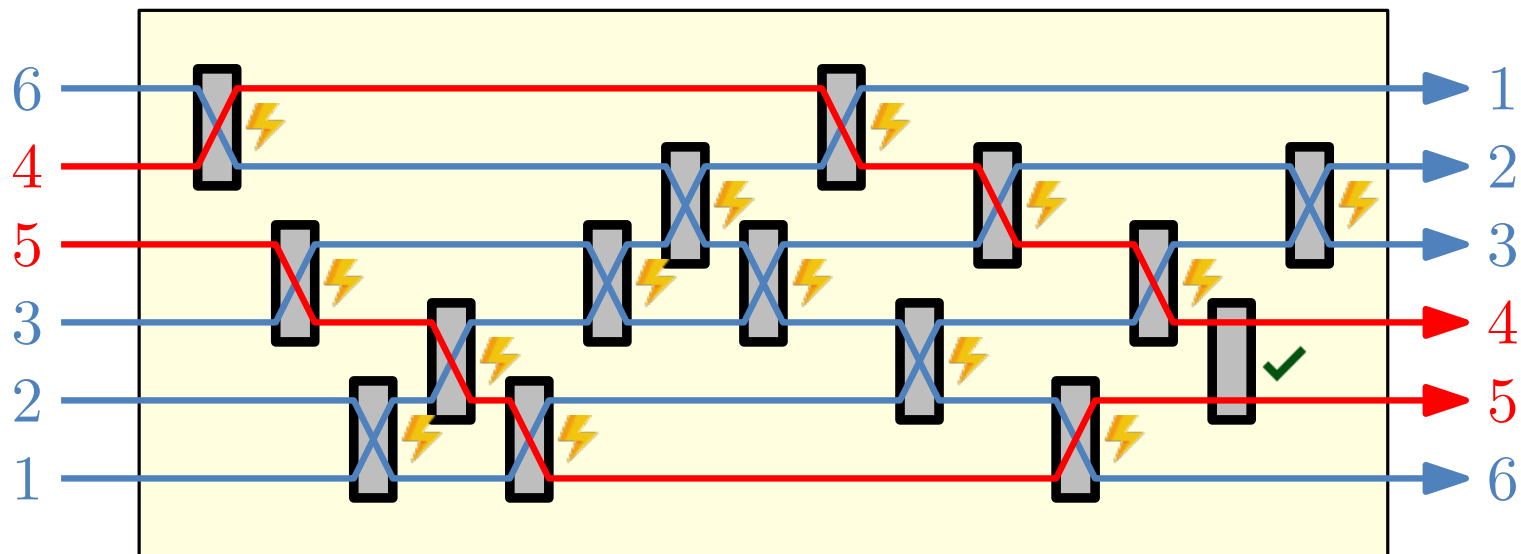


Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.



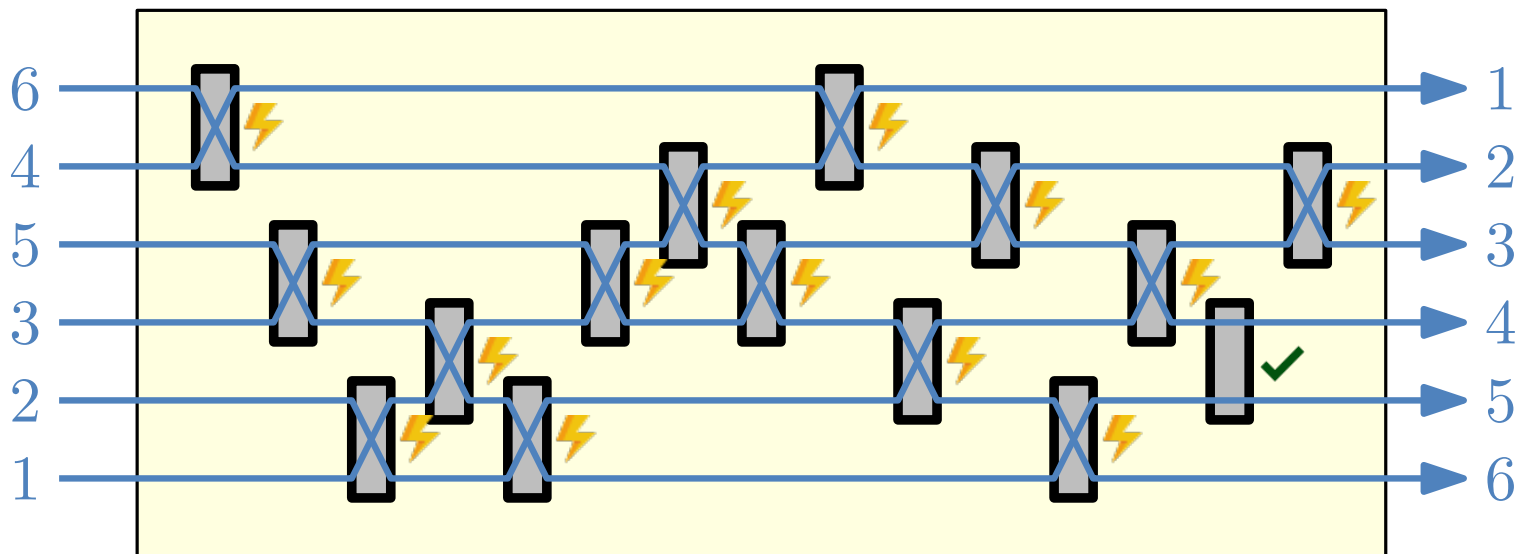
Beobachtung: Trotz Vertauschung bleibt Sortierung erhalten!

Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.



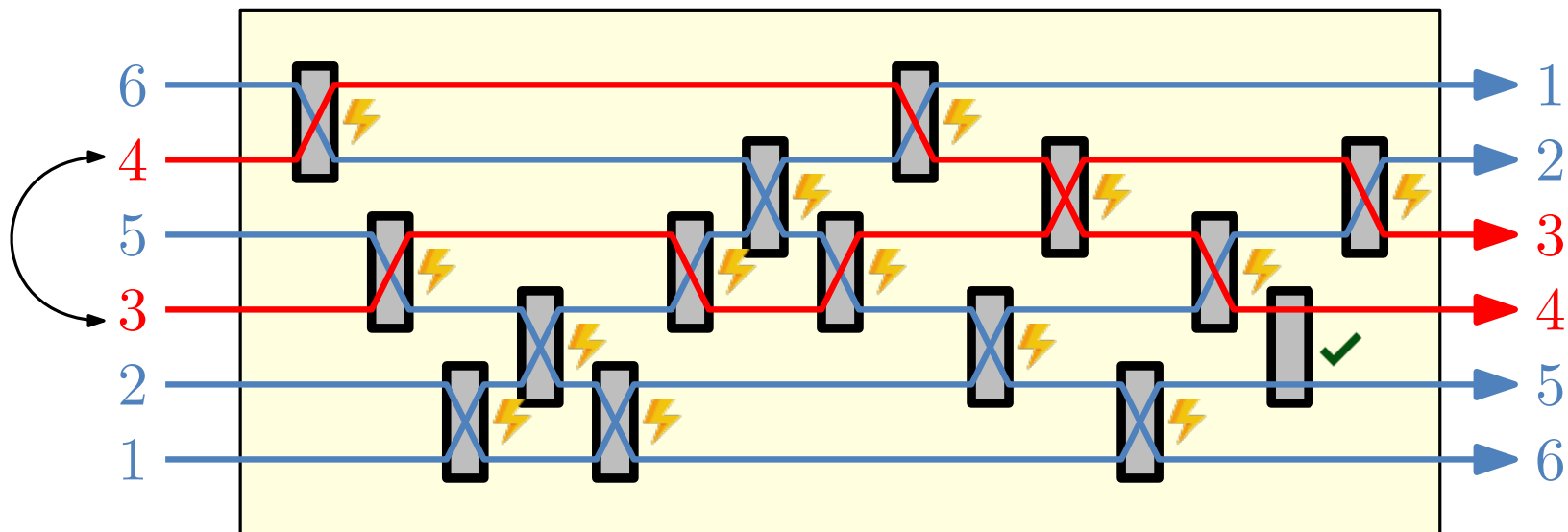
Beobachtung: Trotz Vertauschung bleibt Sortierung erhalten!

Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.



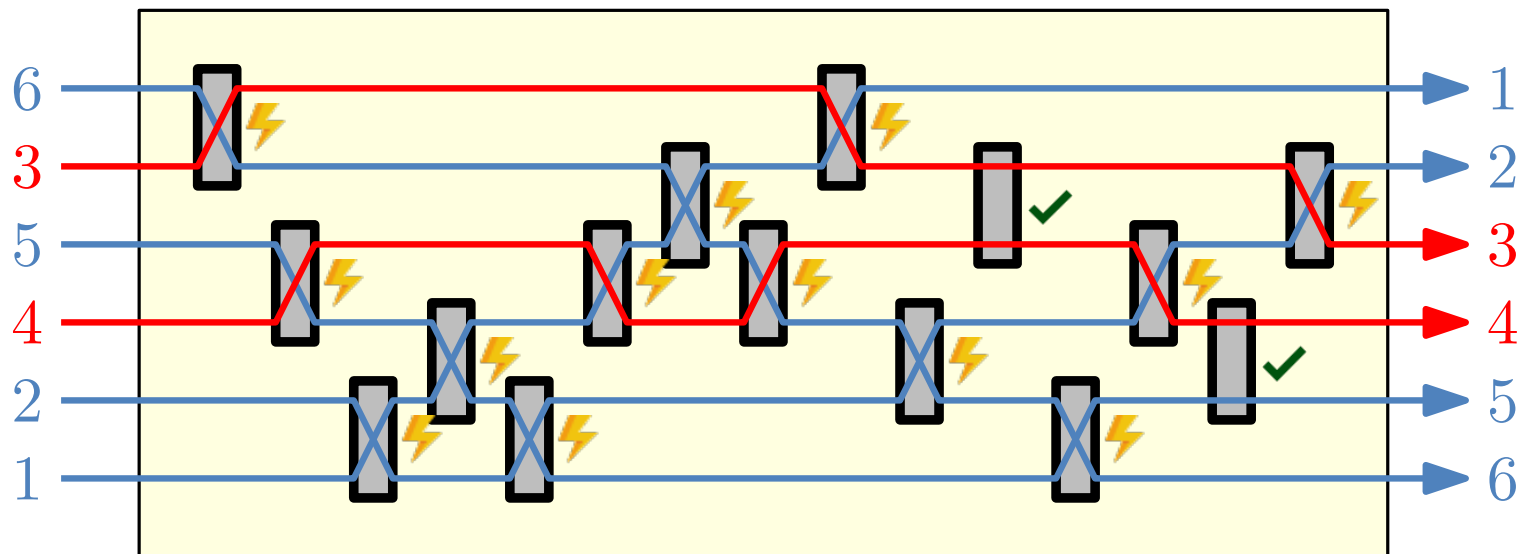
Beobachtung: Trotz Vertauschung bleibt Sortierung erhalten!

Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.



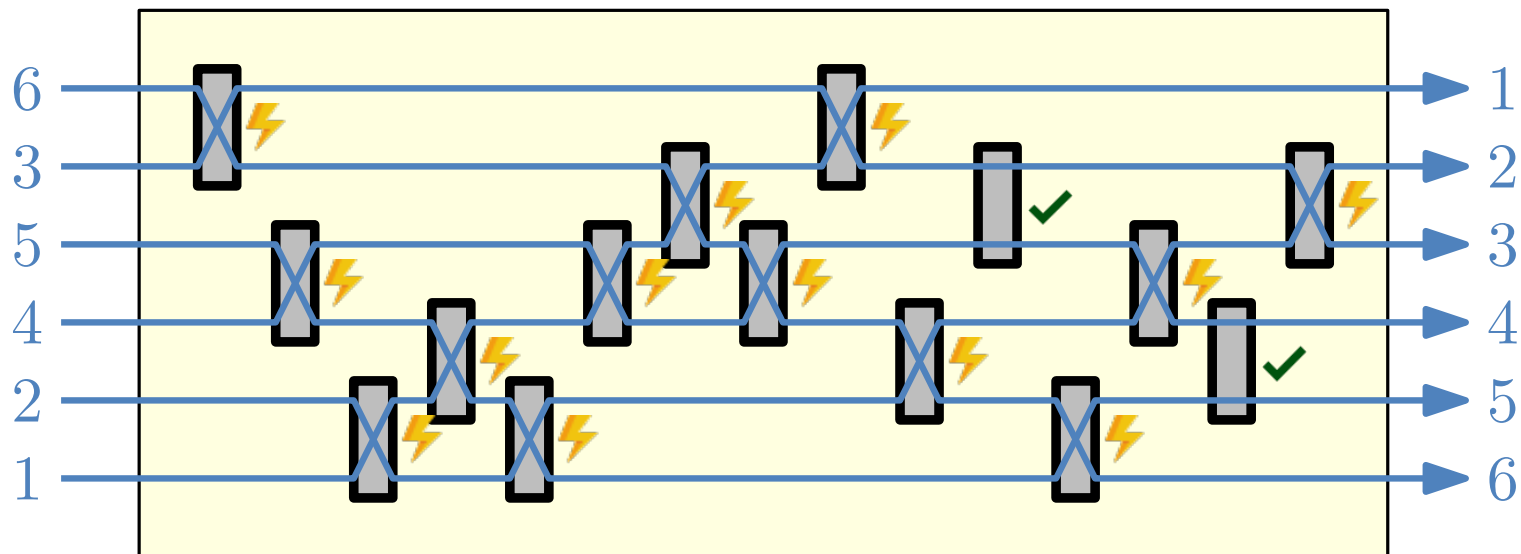
Beobachtung: Trotz Vertauschung bleibt Sortierung erhalten!

Drahtdiagramme

Proposition

Jedes Drahtdiagramm induziert ein Sortiernetz.

Beweis: Schritt 2: Jede Permutation wird sortiert.

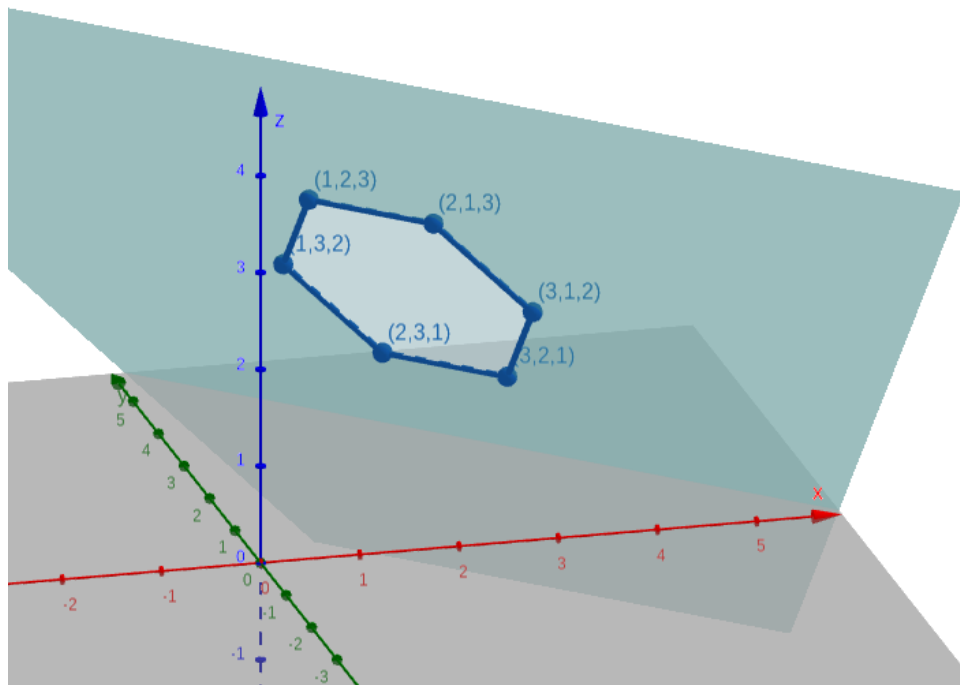


Beobachtung: Trotz Vertauschung bleibt Sortierung erhalten!

Monotone Pfade des Permutaeders

Permutaeder der Ordnung n :

$$P_n := \text{conv}(\{(\pi(1), \dots, \pi(n)) \in \mathbb{R}^n \mid \pi \in S_n\})$$

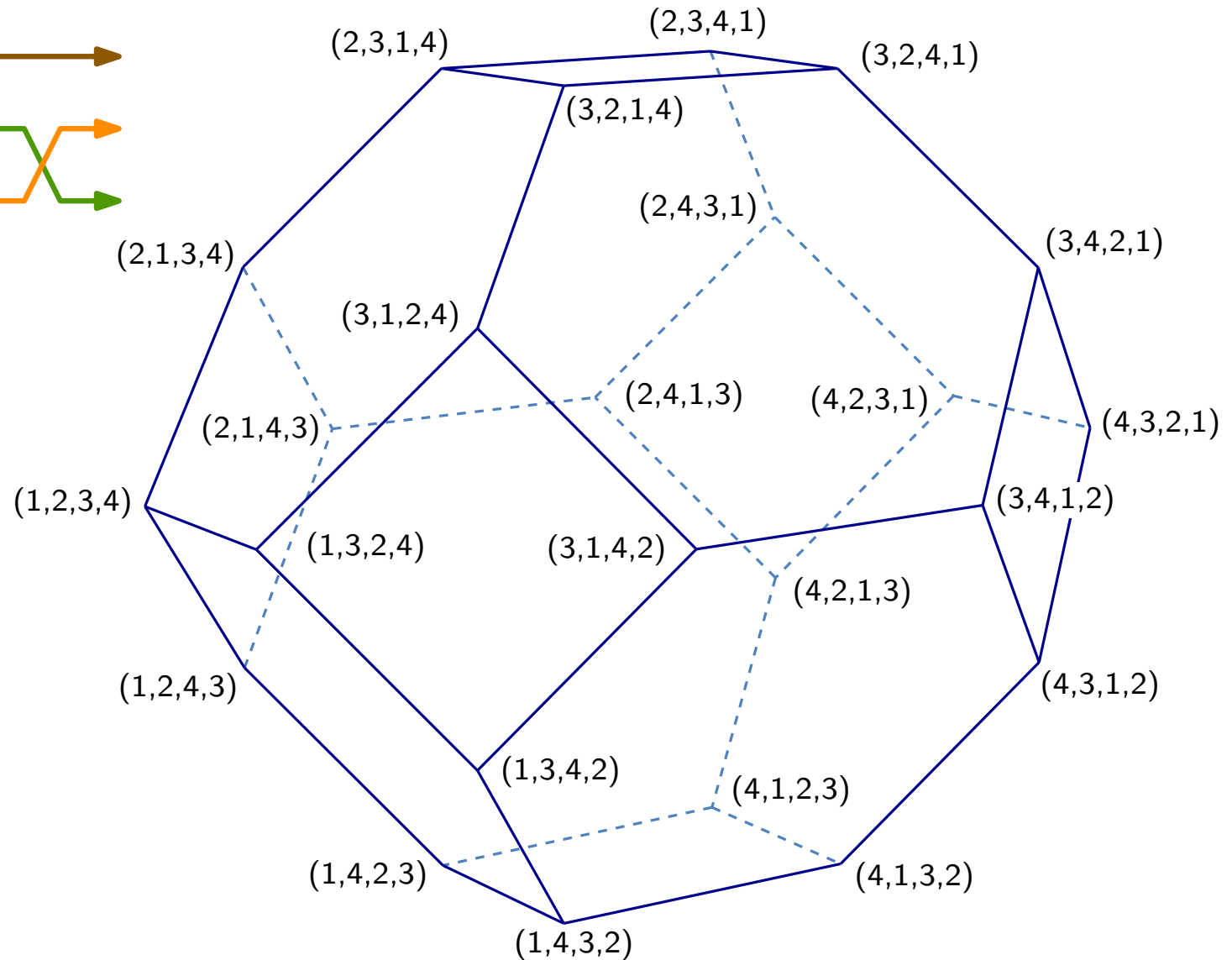


Beispiel: $n = 3$

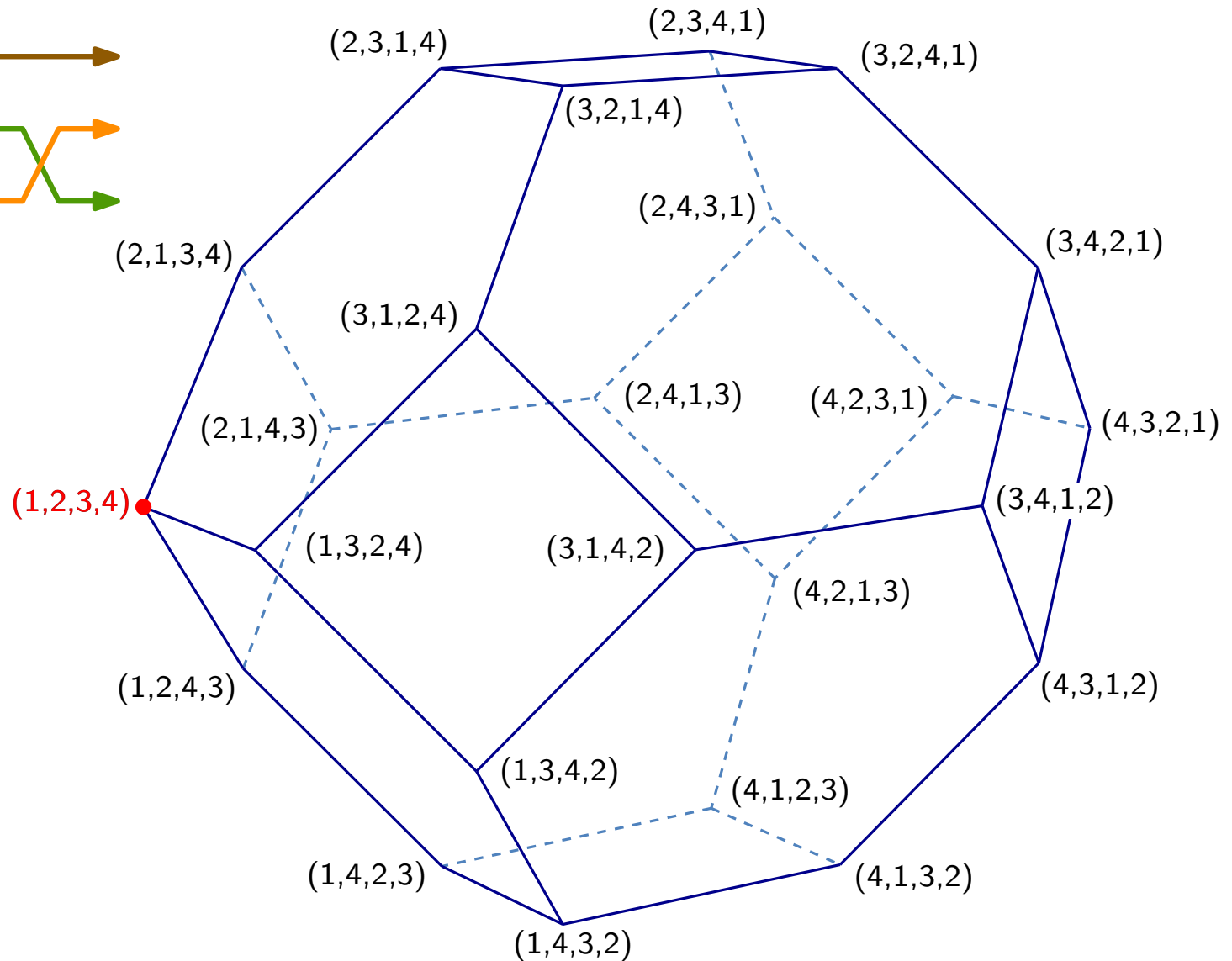
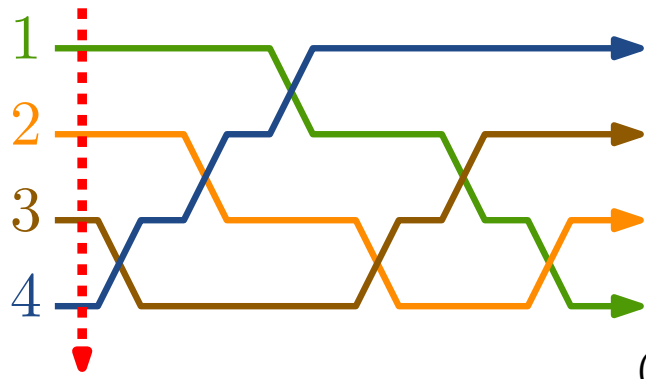
$$x_1 + \dots + x_n = n(n+1)/2$$

$$\implies \dim(P_n) = n - 1$$

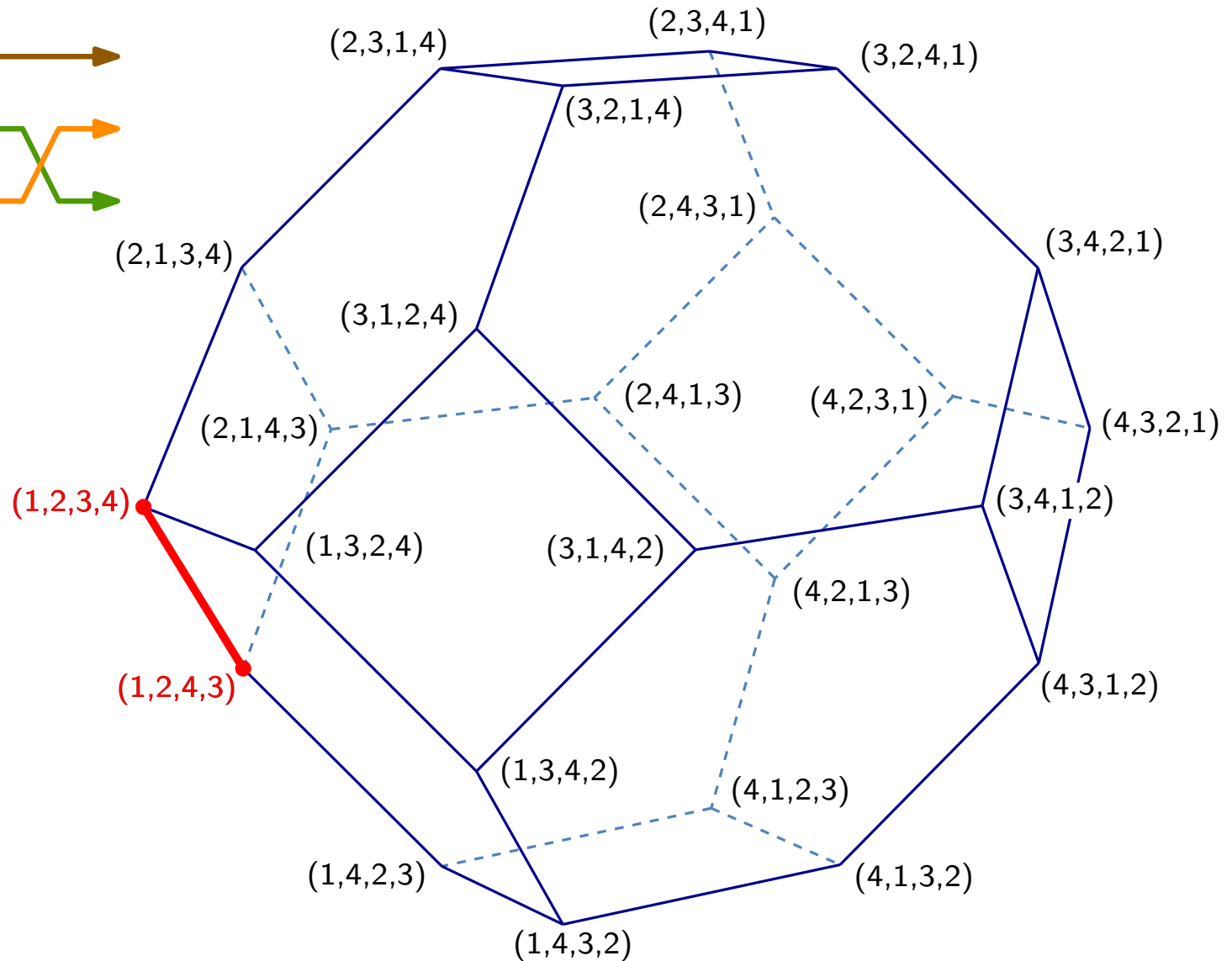
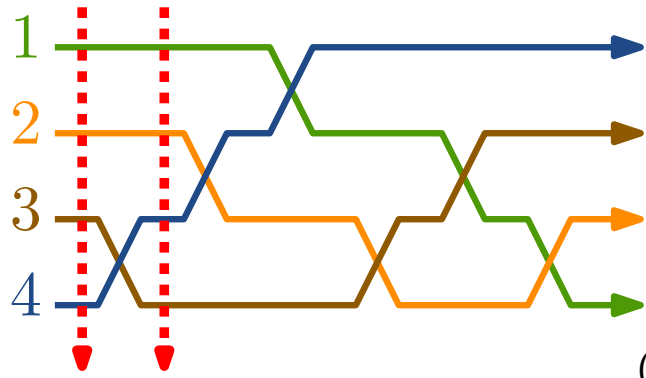
Monotone Pfade des Permutaeders



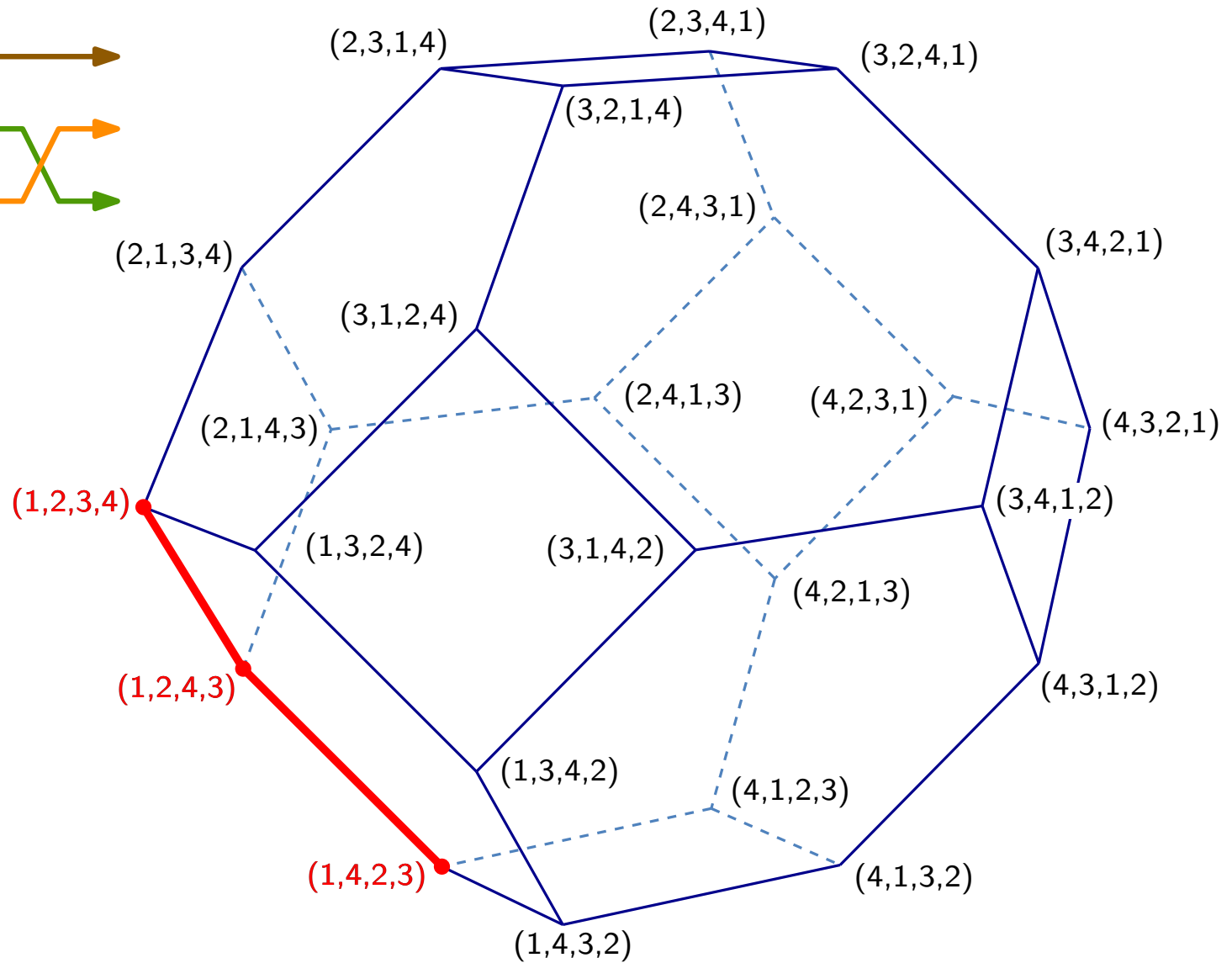
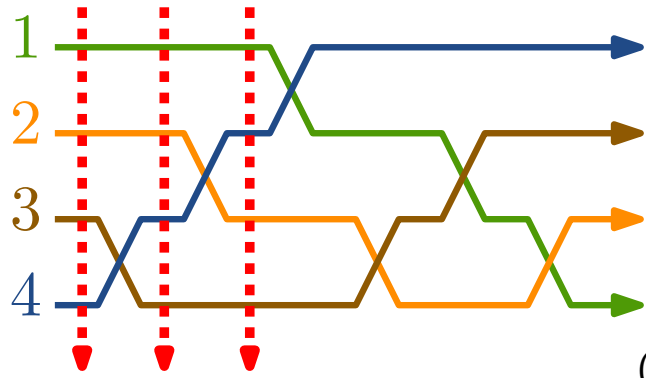
Monotone Pfade des Permutaeders



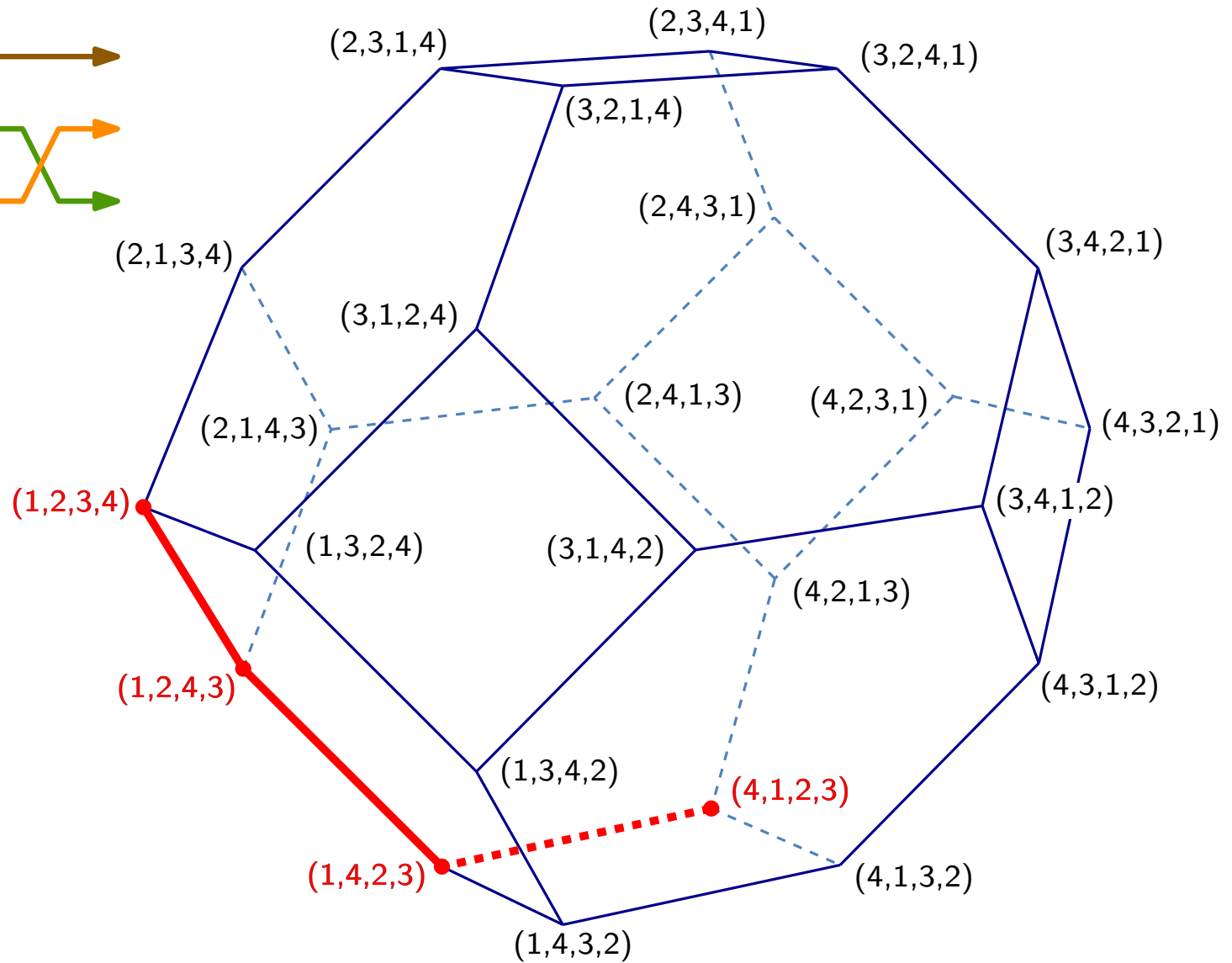
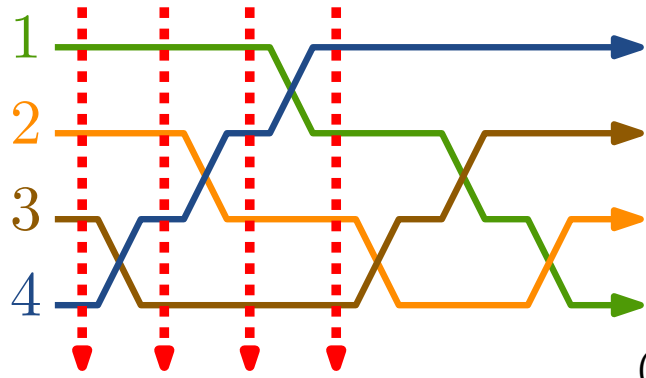
Monotone Pfade des Permutaeders



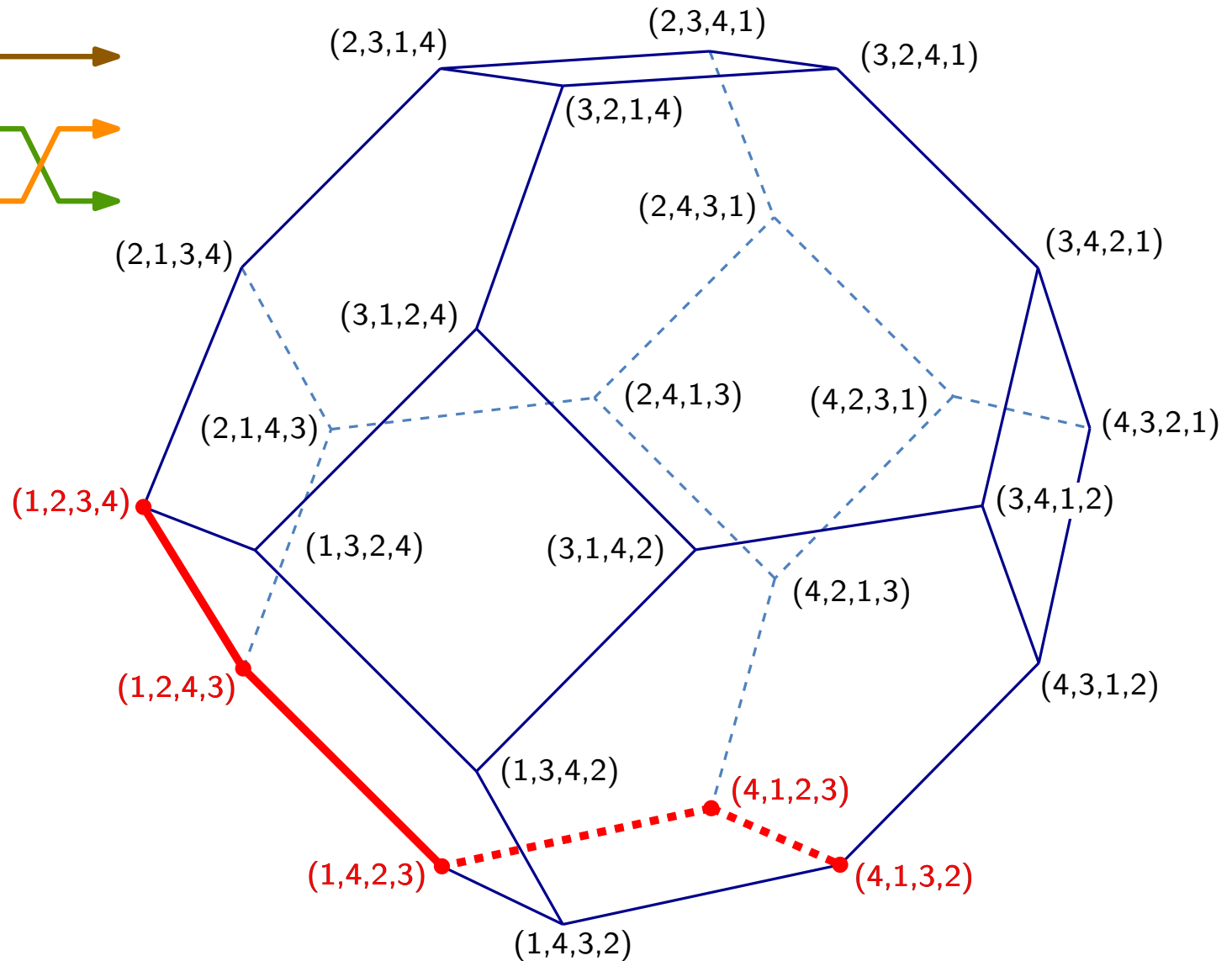
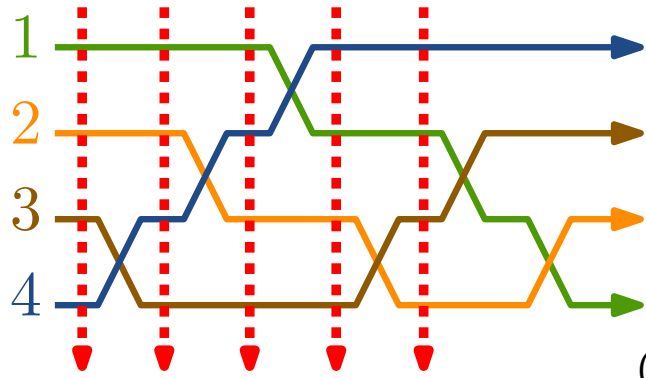
Monotone Pfade des Permutaeders



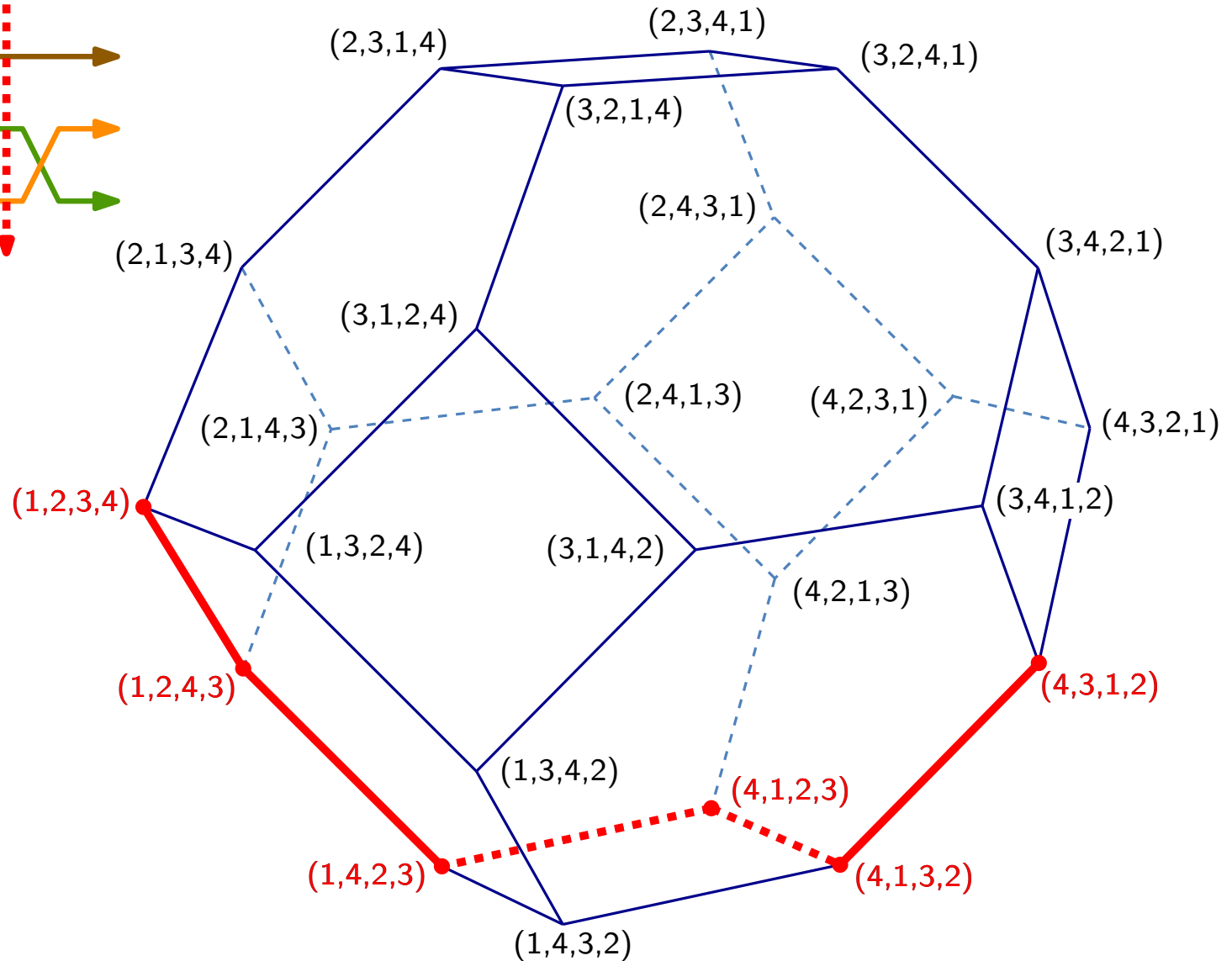
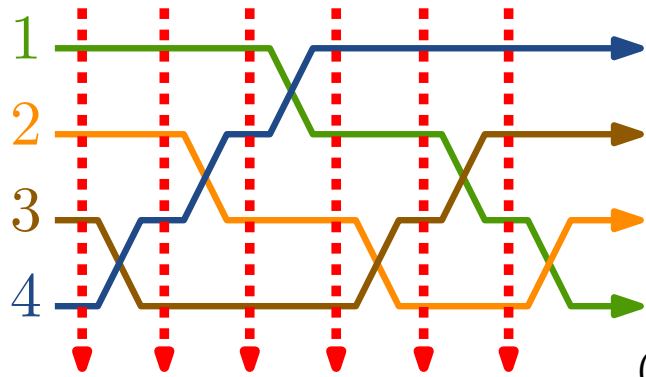
Monotone Pfade des Permutaeders



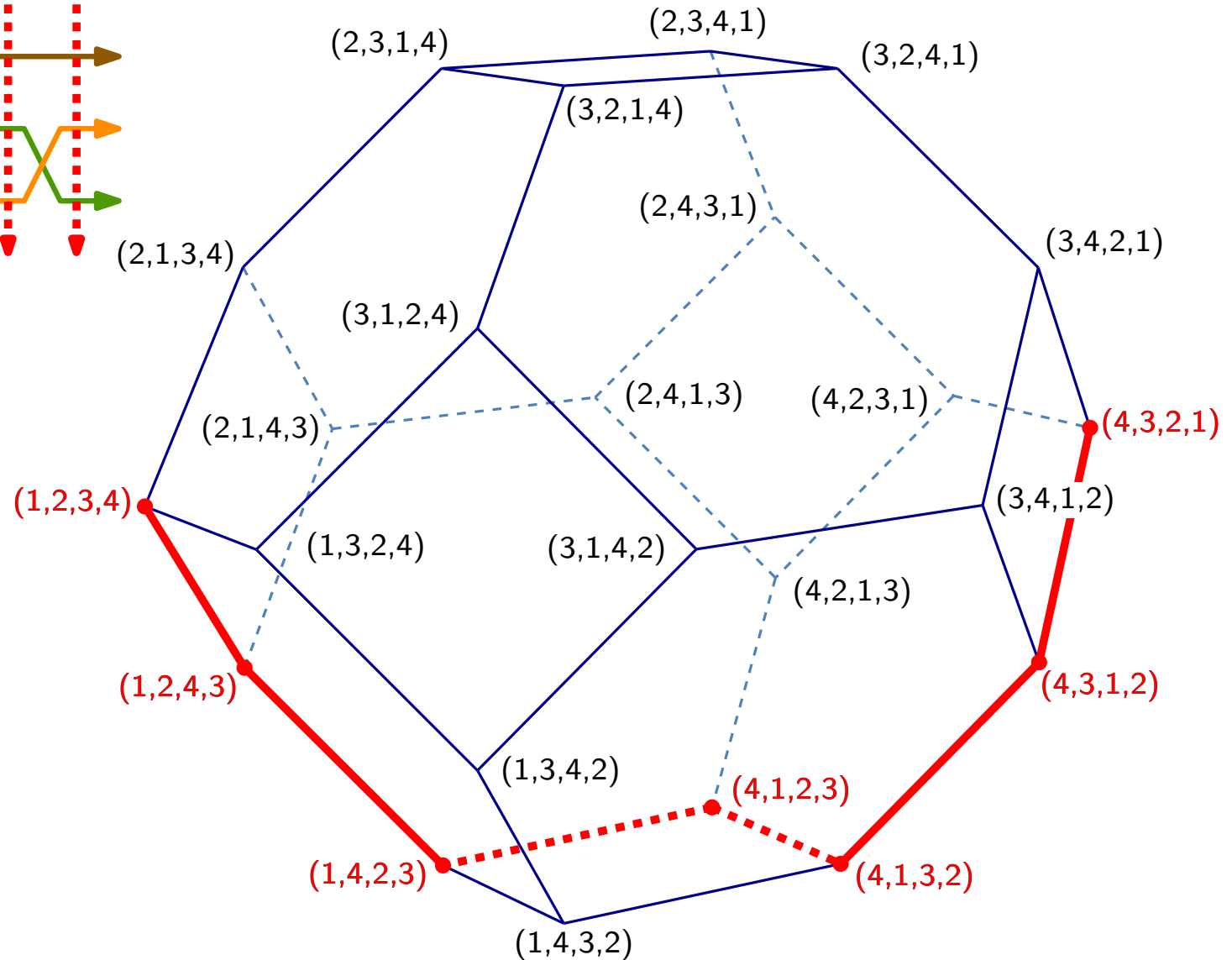
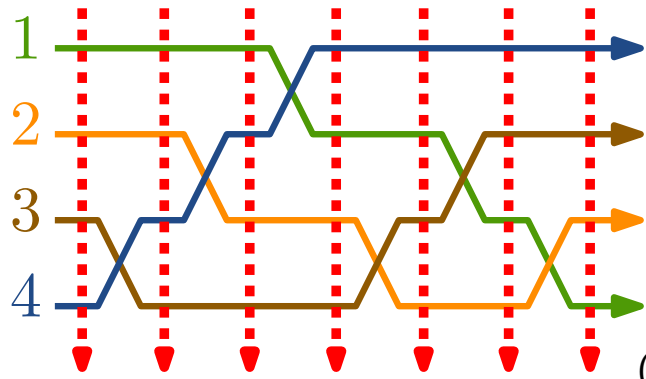
Monotone Pfade des Permutaeders



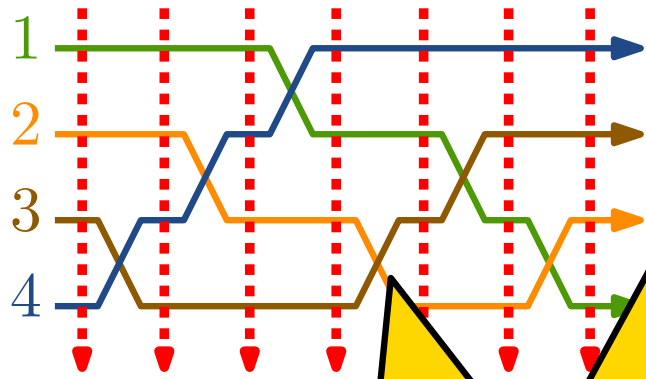
Monotone Pfade des Permutaeders



Monotone Pfade des Permutaeders

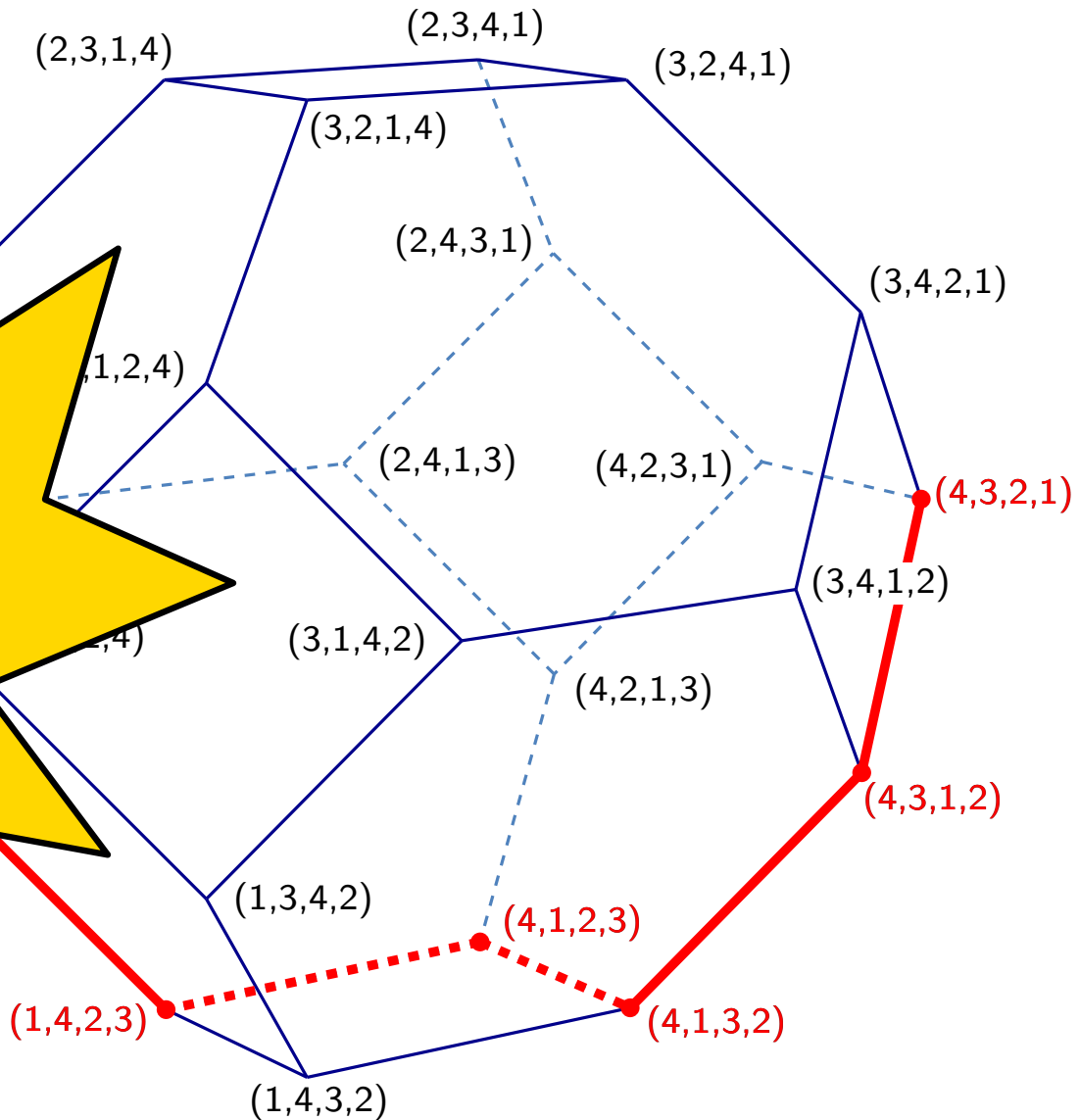


Monotone Pfade des Permutaeders

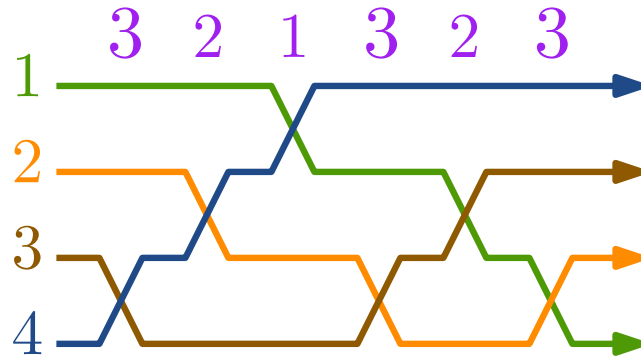


**Standard-Young-
Tableaux !!!**

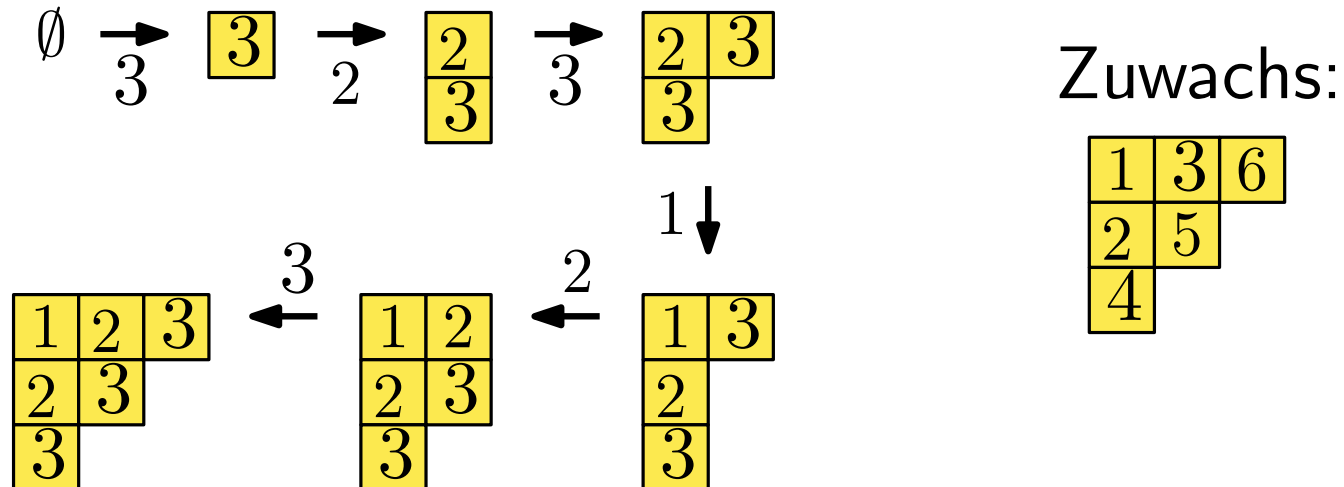
1	3	6
2	5	
4		



Edelman-Greene Bijektion



Sukzessive Schensted-Einfügungen:



Standard Young Tableaux

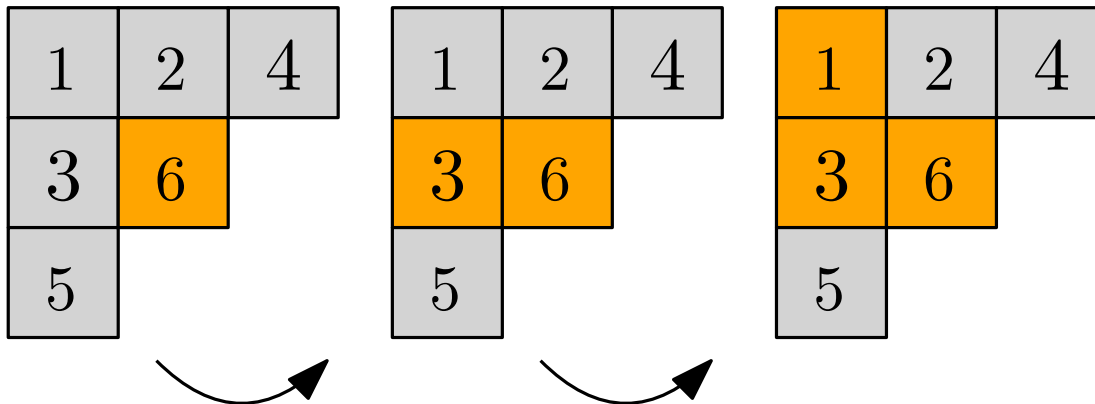
Schützenberger Operator: Wandelt Standard-Young-Tableau in neues Standard-Young-Tablau selber Form.

Standard Young Tableaux

Schützenberger Operator: Wandelt Standard-Young-Tableau in neues Standard-Young-Tablau selber Form.

Schritt I: Zellenpfad in Tableau bestimmen

- Starte mit Zelle mit größtem Eintrag
- Gehe immer weiter nach \uparrow oder \leftarrow , stets zu größerem Eintrag.
- Ende in Zelle (1, 1) mit Eintrag 1.

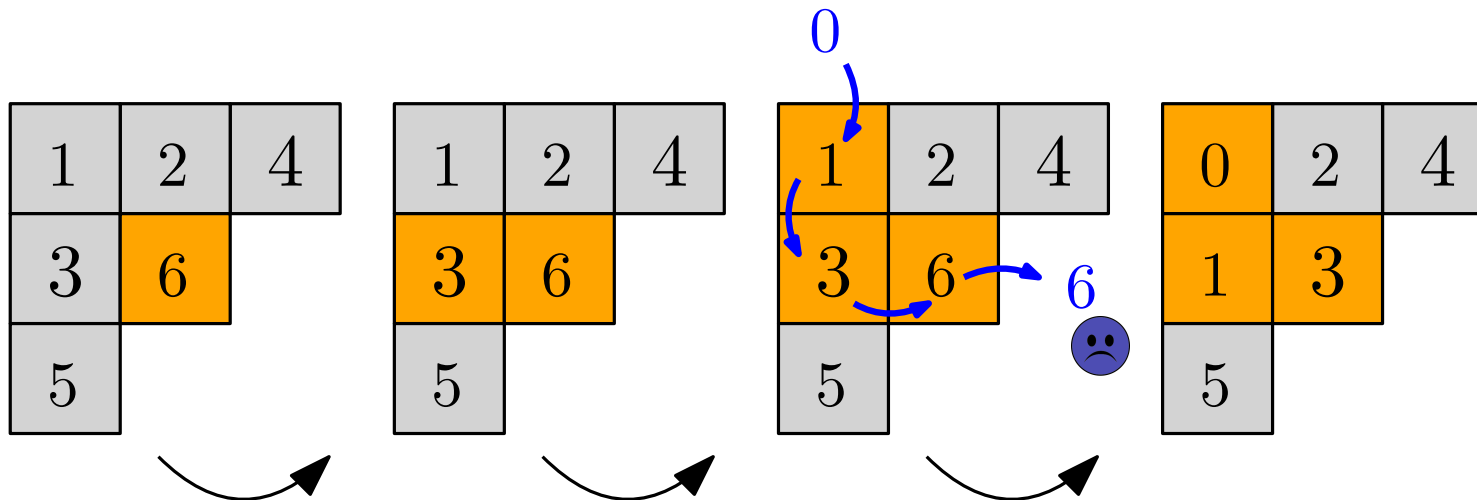


Standard Young Tableaux

Schützenberger Operator: Wandelt Standard-Young-Tableau in neues Standard-Young-Tablau selber Form.

Schritt II: Durchschieben

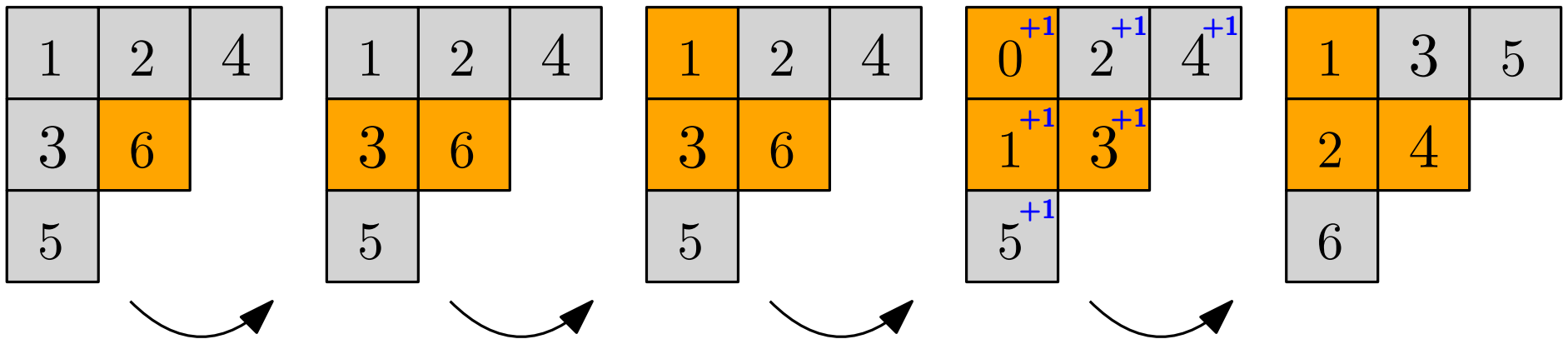
- Schiebe alle Einträge entlang des Pfades um eine Position weiter Richtung \downarrow / \rightarrow .
- Bei Zelle $(1, 1)$ schiebe 0 nach, anderes Ende fliegt raus.



Standard Young Tableaux

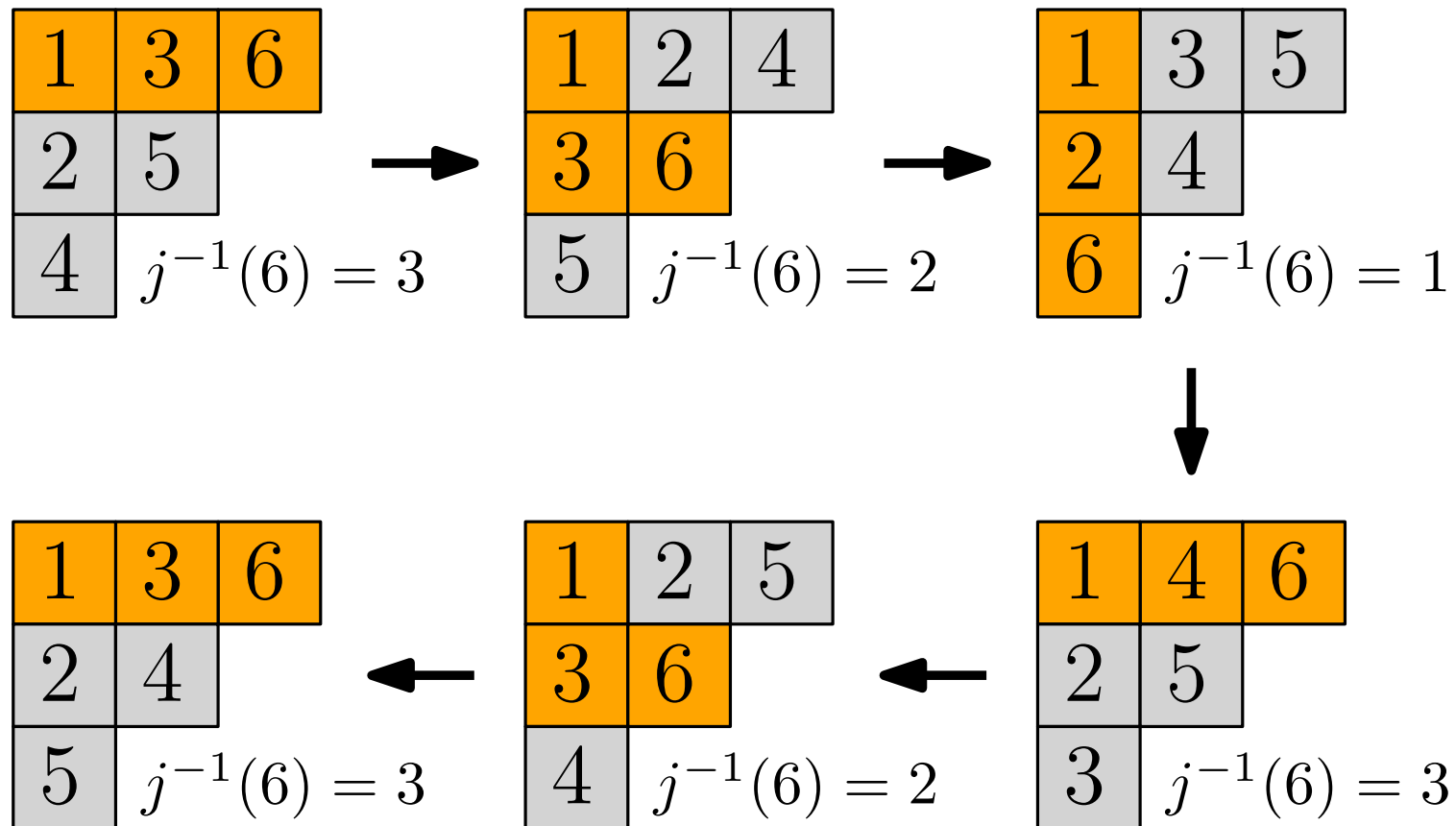
Schützenberger Operator: Wandelt Standard-Young-Tableau in neues Standard-Young-Tablau selber Form.

Schritt III: Addiere 1 zu allen Einträgen.



Standard Young Tableaux

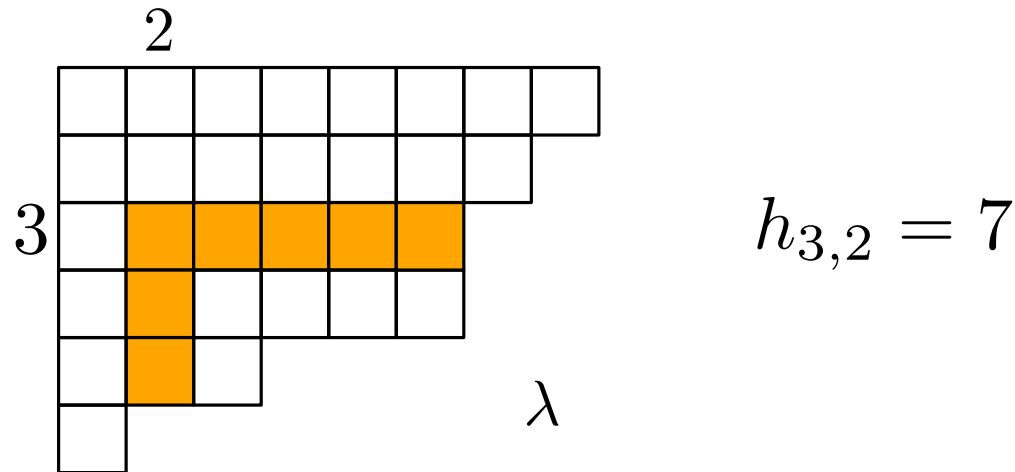
Wende Schützenberger-Operater $\binom{n}{2} - 1$ Mal hintereinander an:



Beobachtung: Folge der Spaltenindizes des höchsten Eintrags geben Switches in Drahtdiagramm: $(3, 2, 3, 1, 2, 3)$

Standard Young Tableaux

Hook-Länge in Young-Diagramm:



Hooklängen-Formel (Frame, Robinson, Thrall, 1953)

Die Anzahl Standard Young Tableaux der Form λ beträgt genau

$$\frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}.$$

Standard Young Tableaux

Korollar

Die Anzahl der Drahtdiagramme der Größe n beträgt genau

$$\frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1} (2n - 1 - 2i)^i} .$$



Ausgewählte Pseudogeraden eines zufällig erzeugten Drahtdiagramms,
 $n = 2000$. Entnommen von (Angel, Holroyd, Romik, Virág, 2007)

Standard Young Tableaux

Korollar

Die Anzahl der Drahtdiagramme der Größe n beträgt genau

$$\frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1} (2n - 1 - 2i)^i}.$$

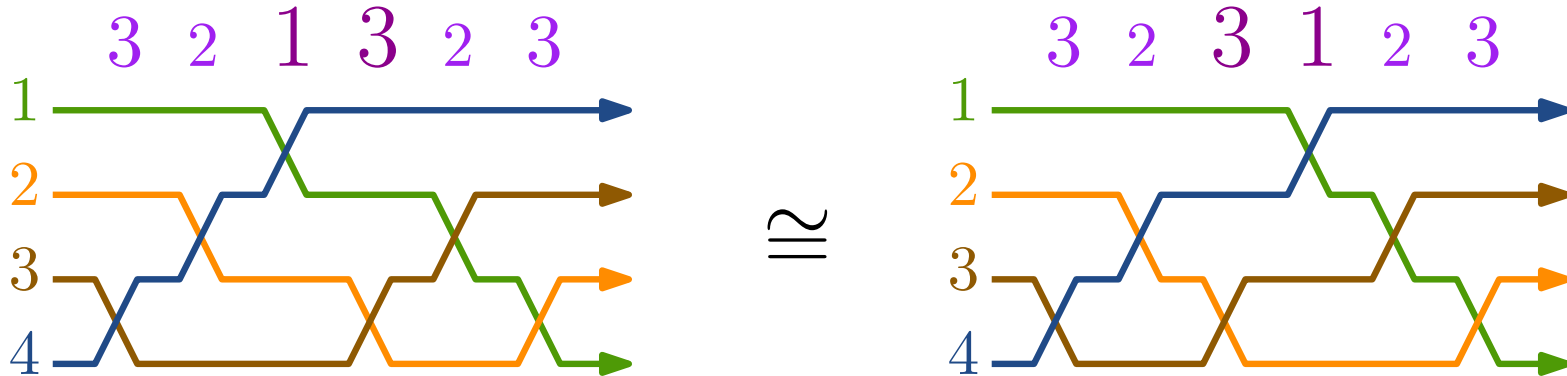
Zählt das auch
Pseudogeradenarran-
gements?



Ausgewählte Pseudogeraden eines zufällig erzeugten Drahtdiagramms,
 $n = 2000$. Entnommen von (Angel, Holroyd, Romik, Virág, 2007)

Klassen von Drahtdiagrammen

Verschiedene Drahtdiagramme gehören zum selben Arrangement!



- Zwei Drahtdiagramme

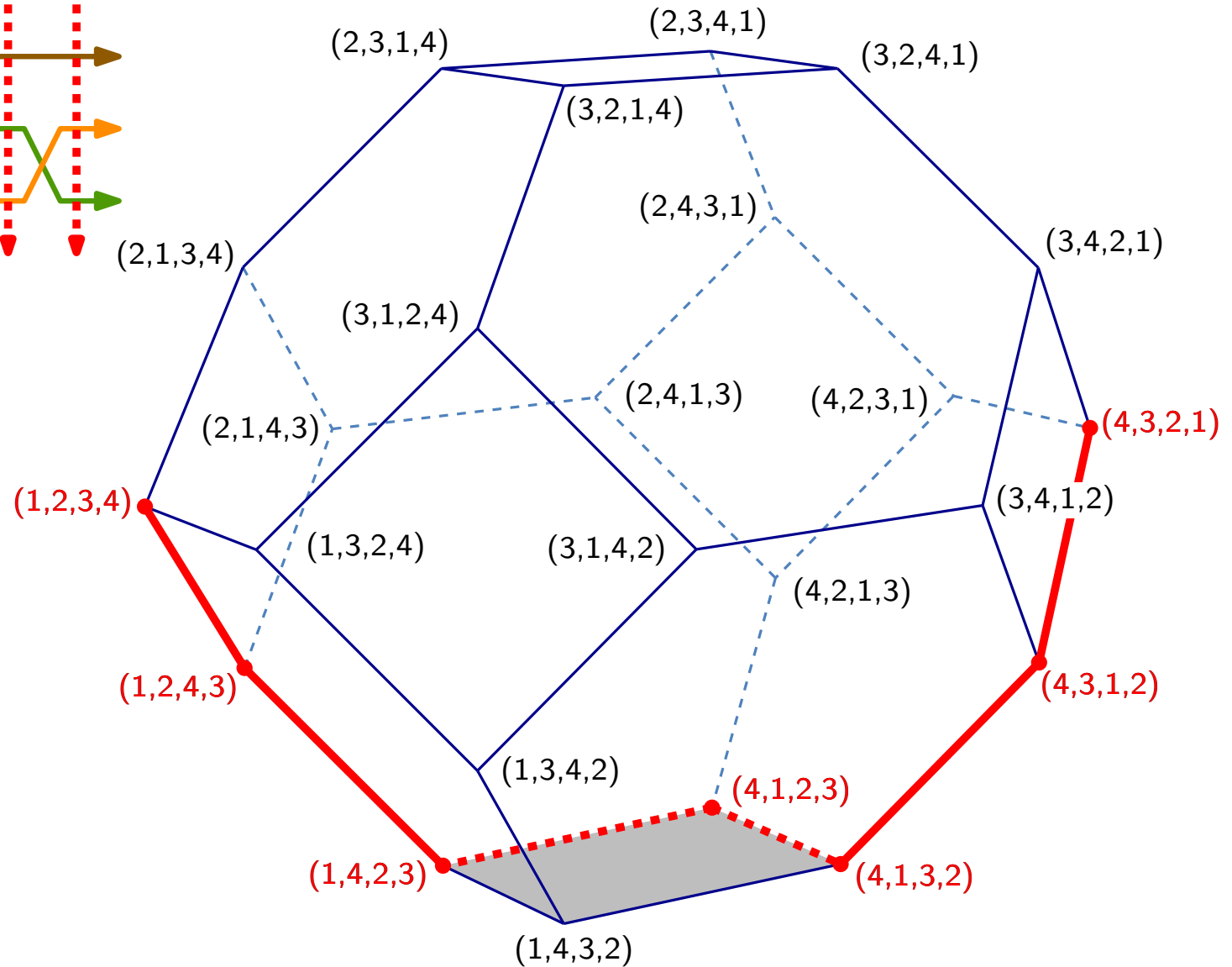
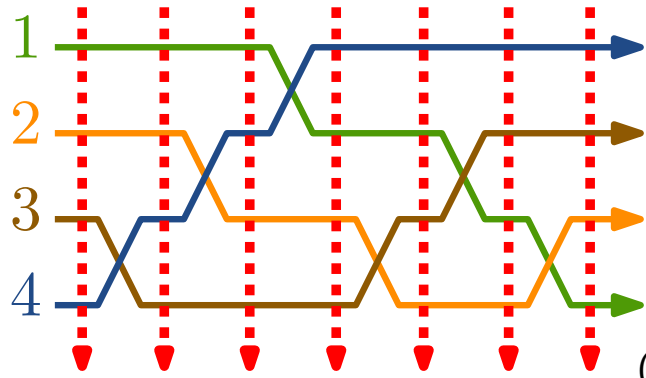
$$S = (s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_{\binom{n}{2}})$$

und $S' = (s_1, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_{\binom{n}{2}})$

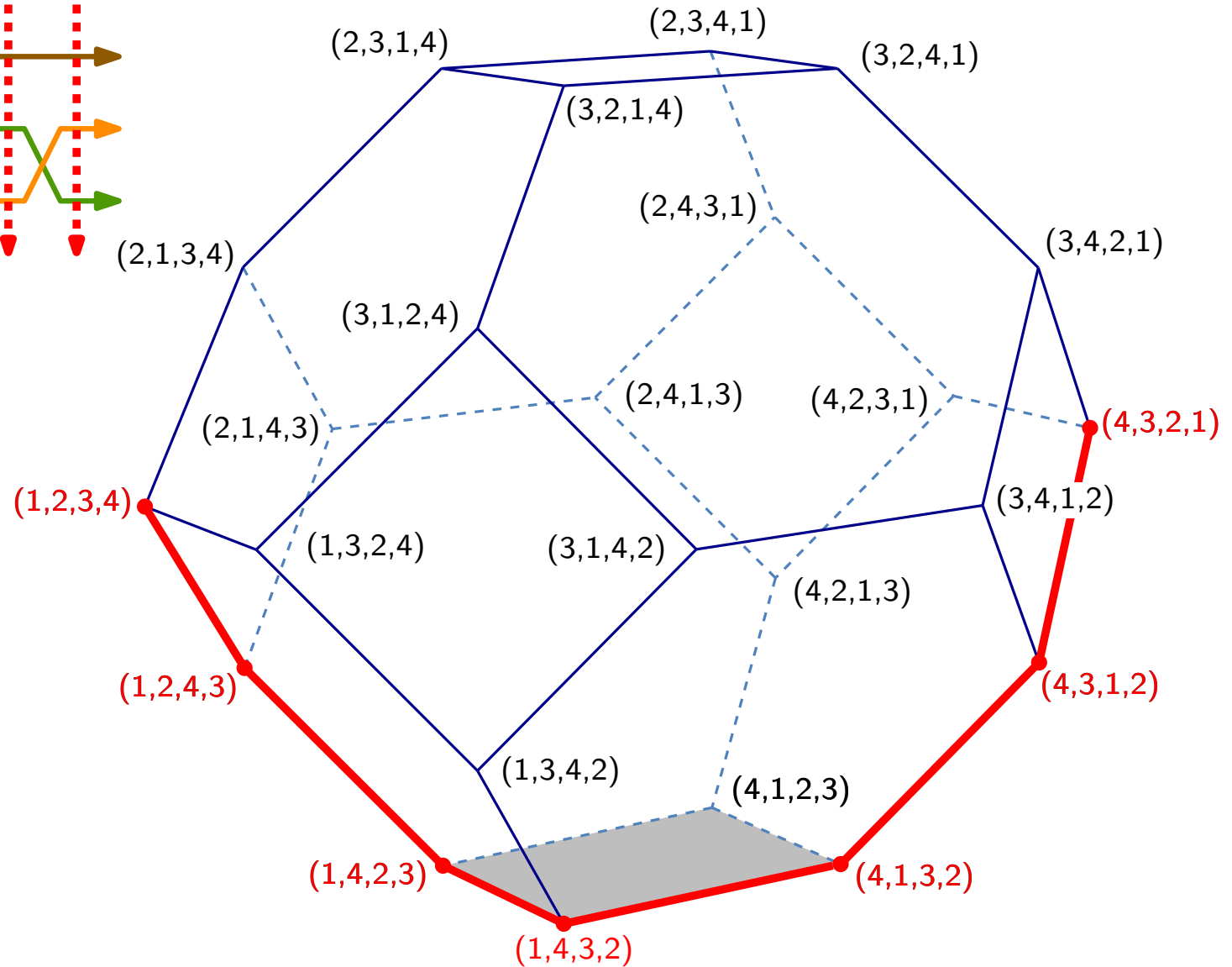
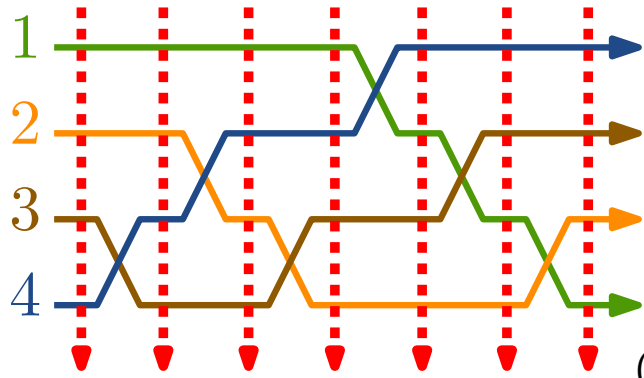
heißen *direkt äquivalent*, falls $|s_i - s_{i+1}| \geq 2$.

- Drahtdiagramme S und S' heißen *äquivalent* ($S \sim S'$), falls es $S = S_1, \dots, S_r = S'$ gibt, wobei S_i und S_{i+1} direkt äquivalent.

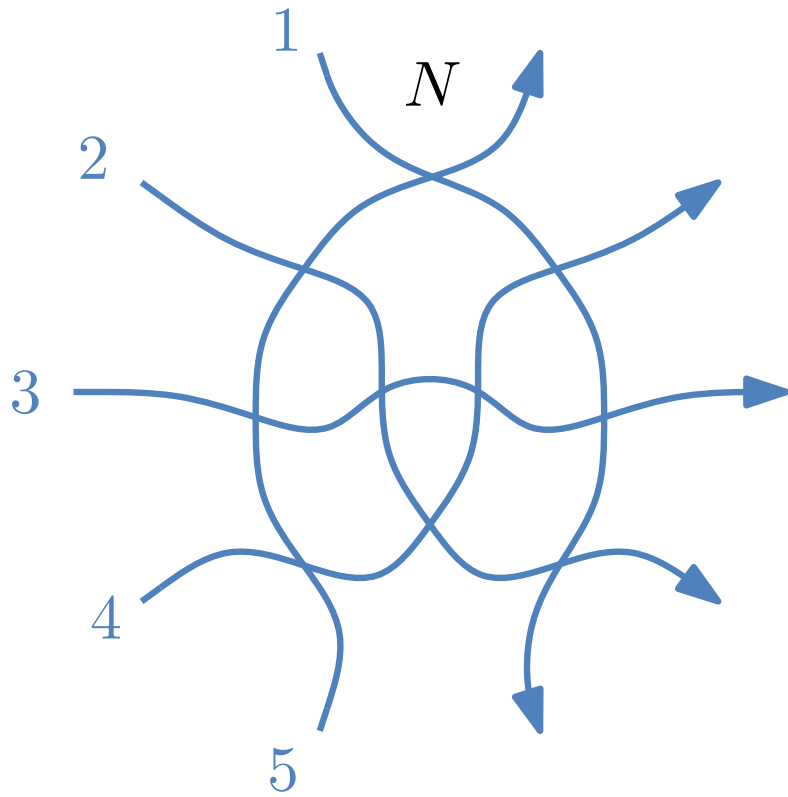
Klassen von Drahtdiagrammen



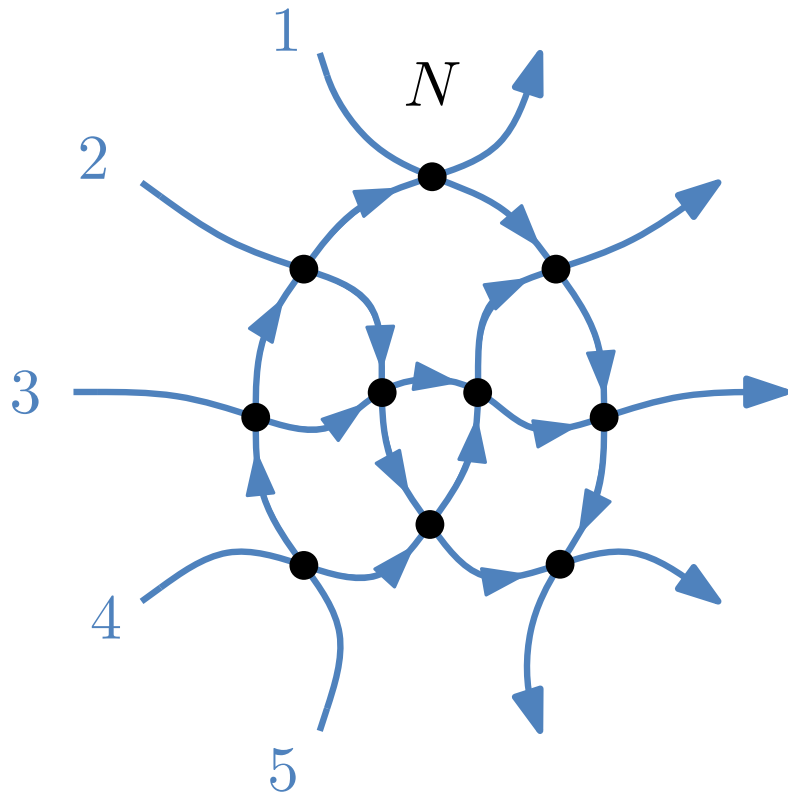
Klassen von Drahtdiagrammen



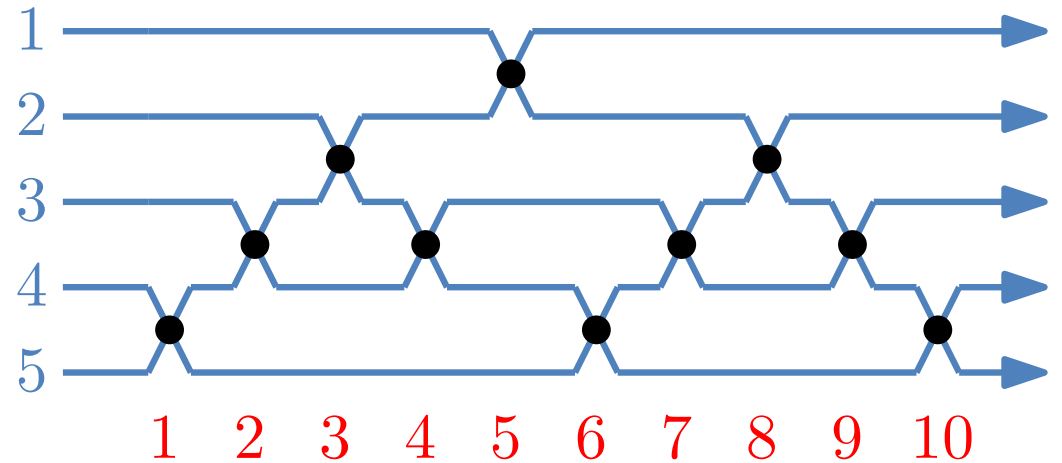
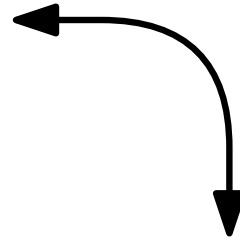
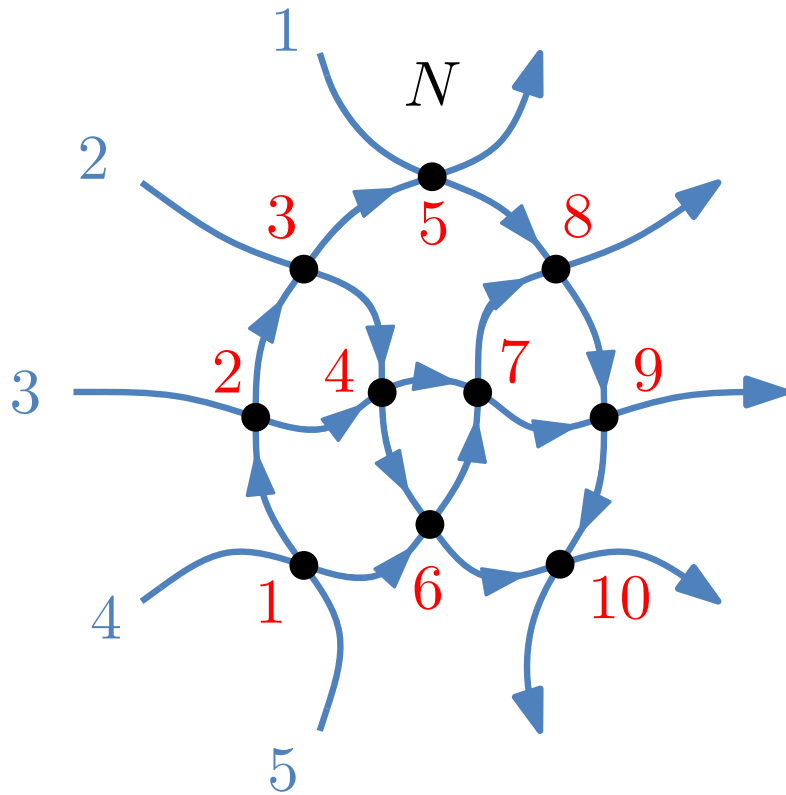
Klassen von Drahtdiagrammen



Klassen von Drahtdiagrammen

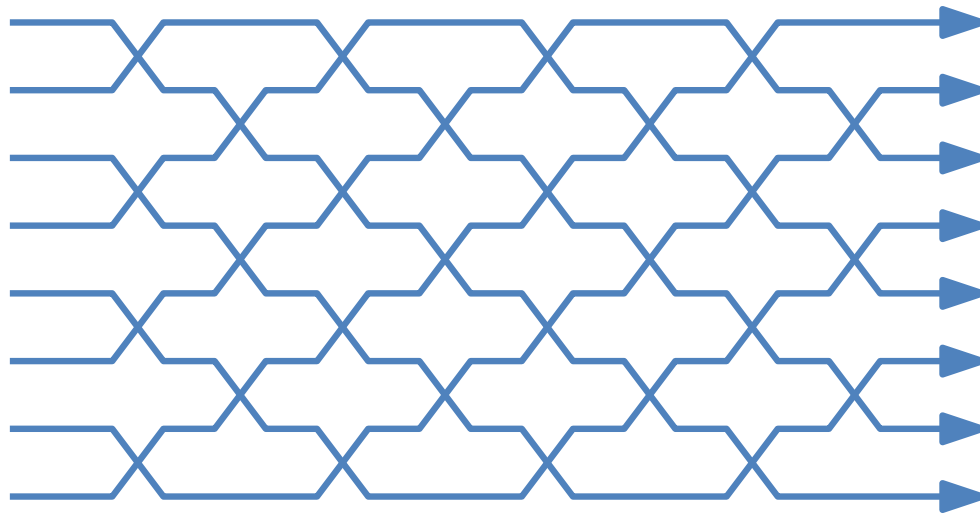


Klassen von Drahtdiagrammen

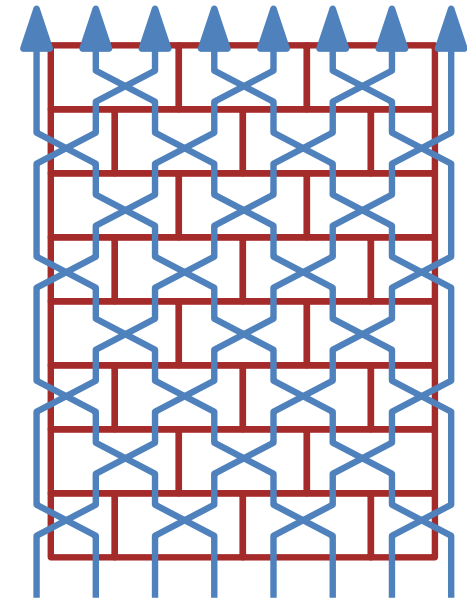


„Maurervermutung“

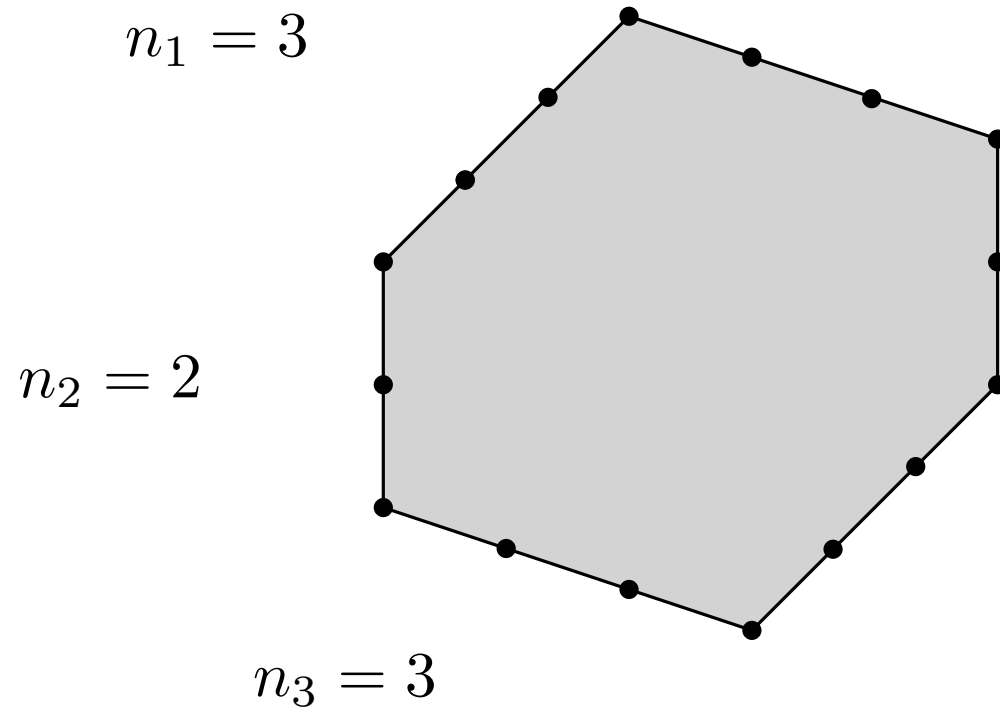
– **Vermutung** (Gutierres, Mamede, Santos, 2020) –
Die *Mauerarrangements* sind die Pseudogeradenarrangements mit den meisten zugehörigen Drahtdiagrammen.



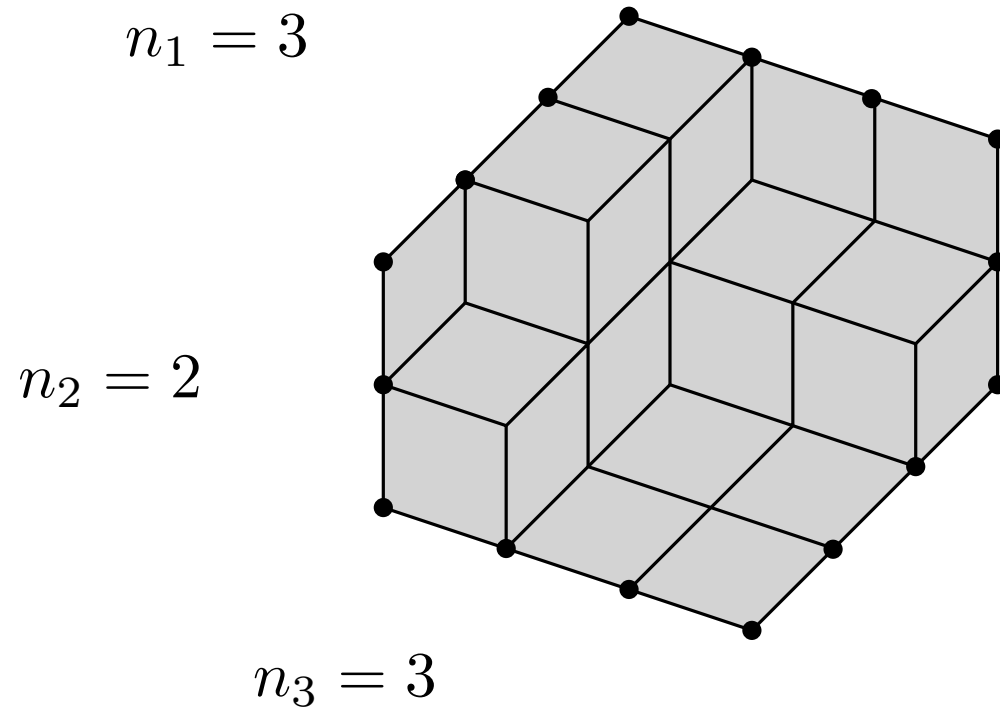
Mauerarrangement für $n = 8$



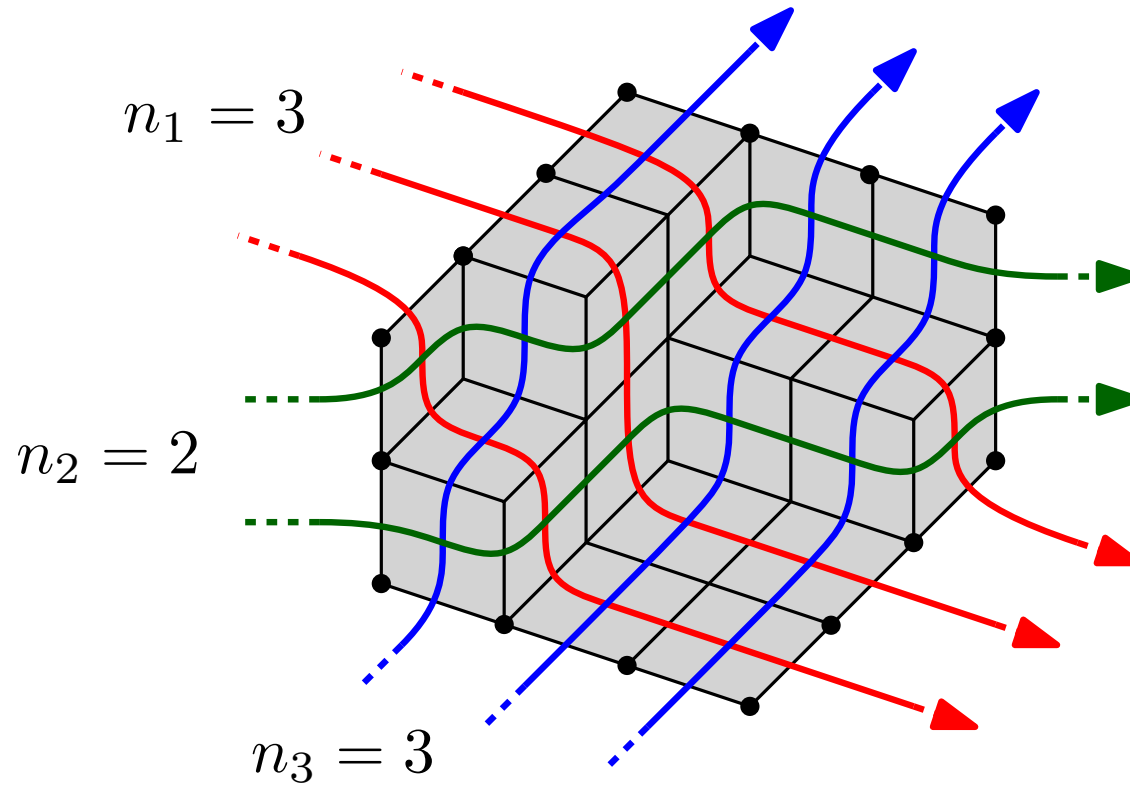
Rhombenpflasterungen



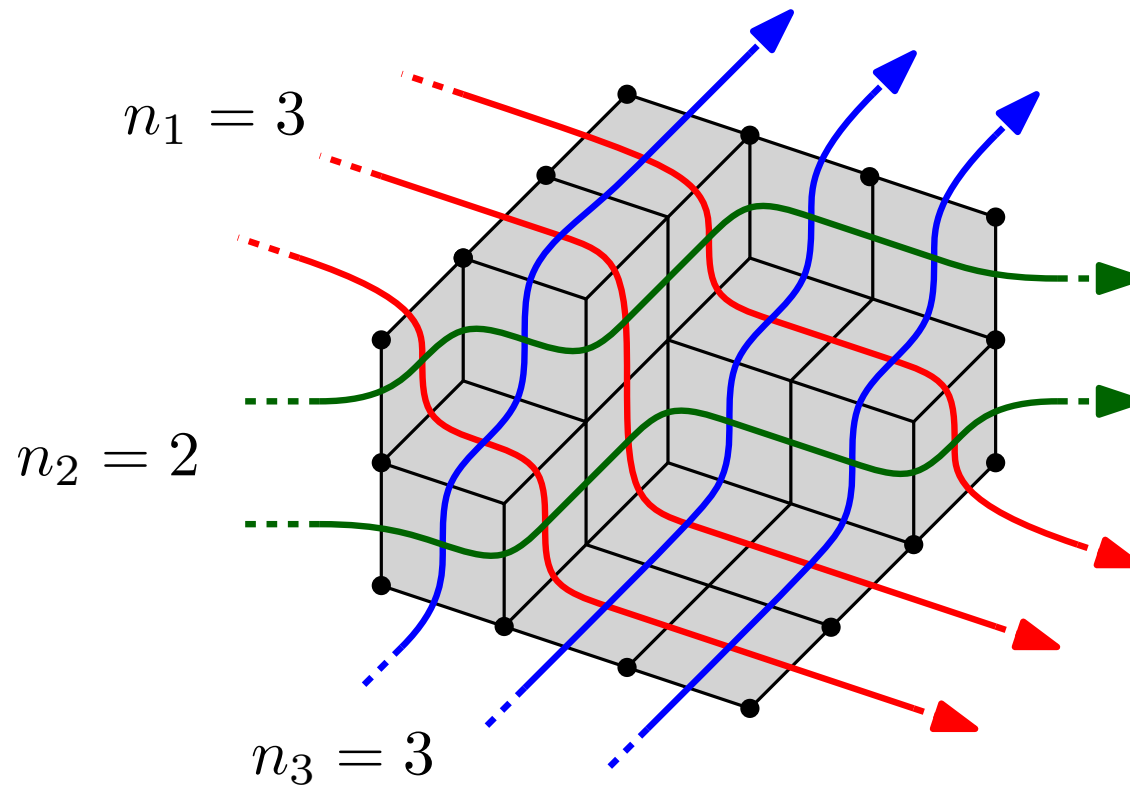
Rhombenpflasterungen



Rhombenpflasterungen



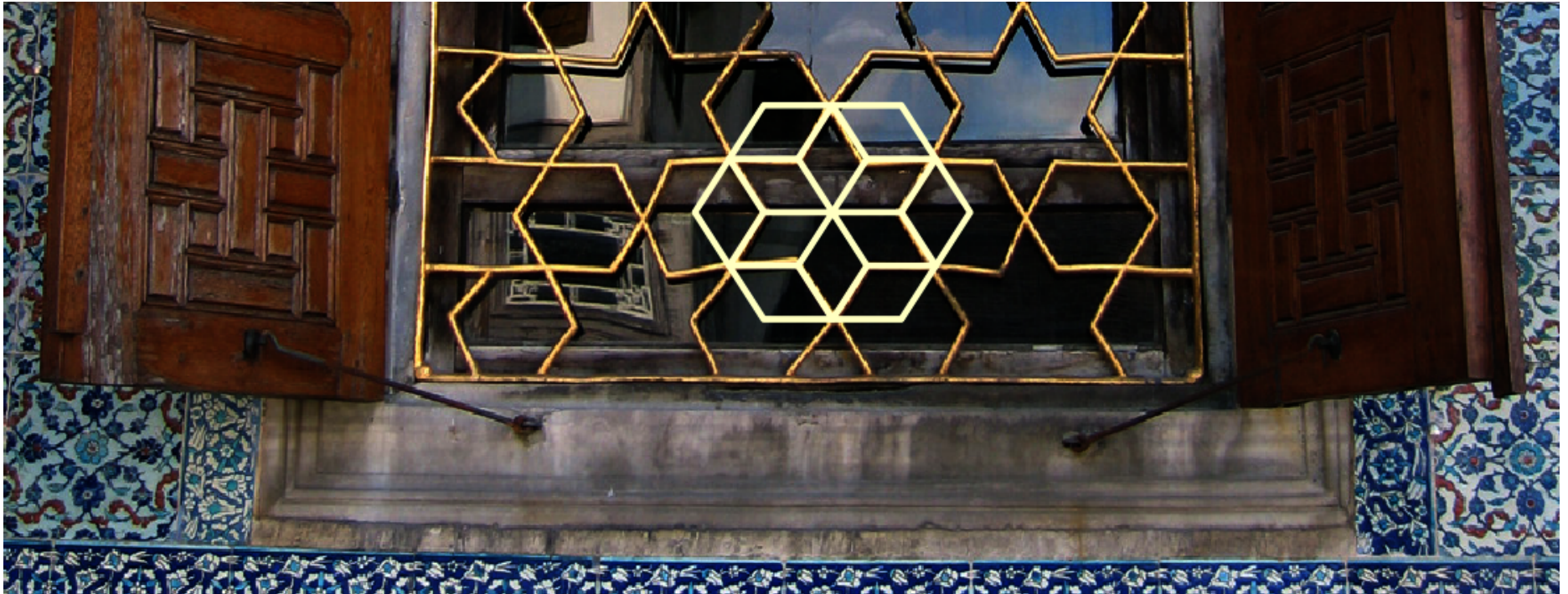
Rhombenpflasterungen



⇒ *Verallgemeinertes Pseudogeradenarrangement:*

- *Parallelklassen* mit n_1, \dots, n_r Pseudogeraden
- (Nur) Pseudogeraden verschiedener Klassen kreuzen sich.

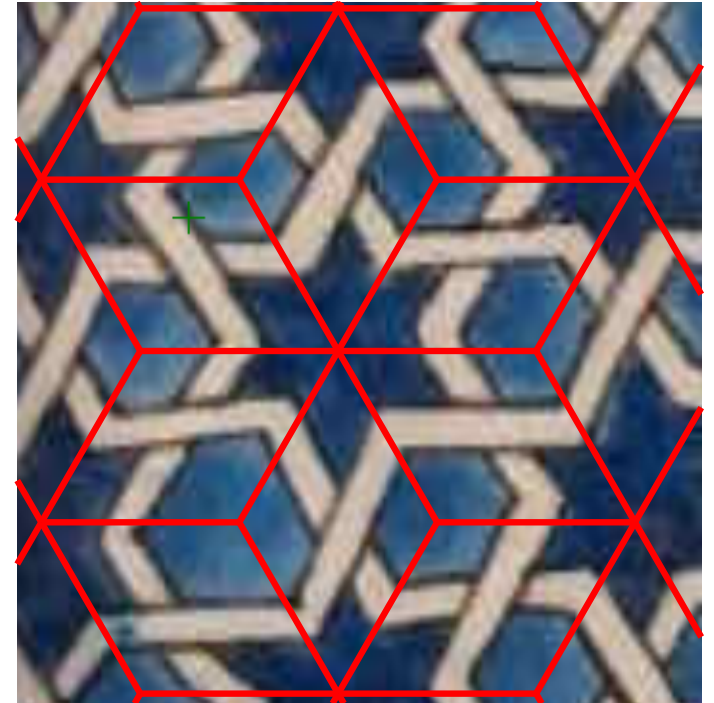
Rhombenpflasterungen



Serinho, CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>), via Wikimedia Commons

Topkapı Palast, Istanbul, Turkey

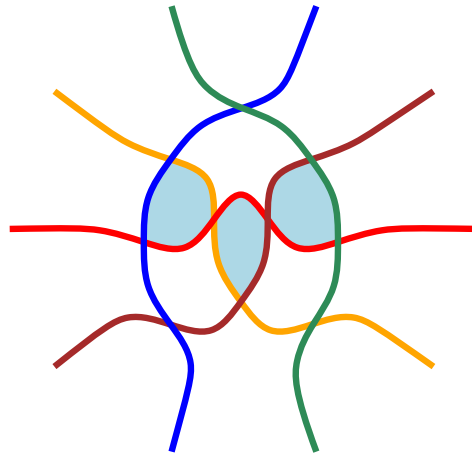
Rhombenpflasterungen



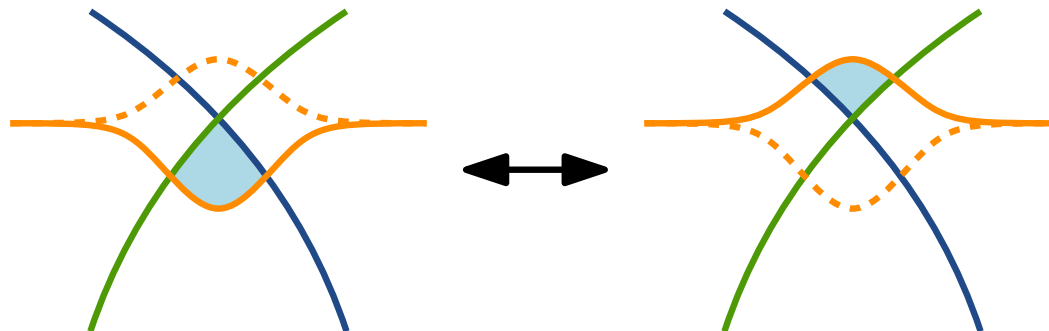
Aslan Pasha Moschee
Ioannina, Griechenland

Dreiecksflips

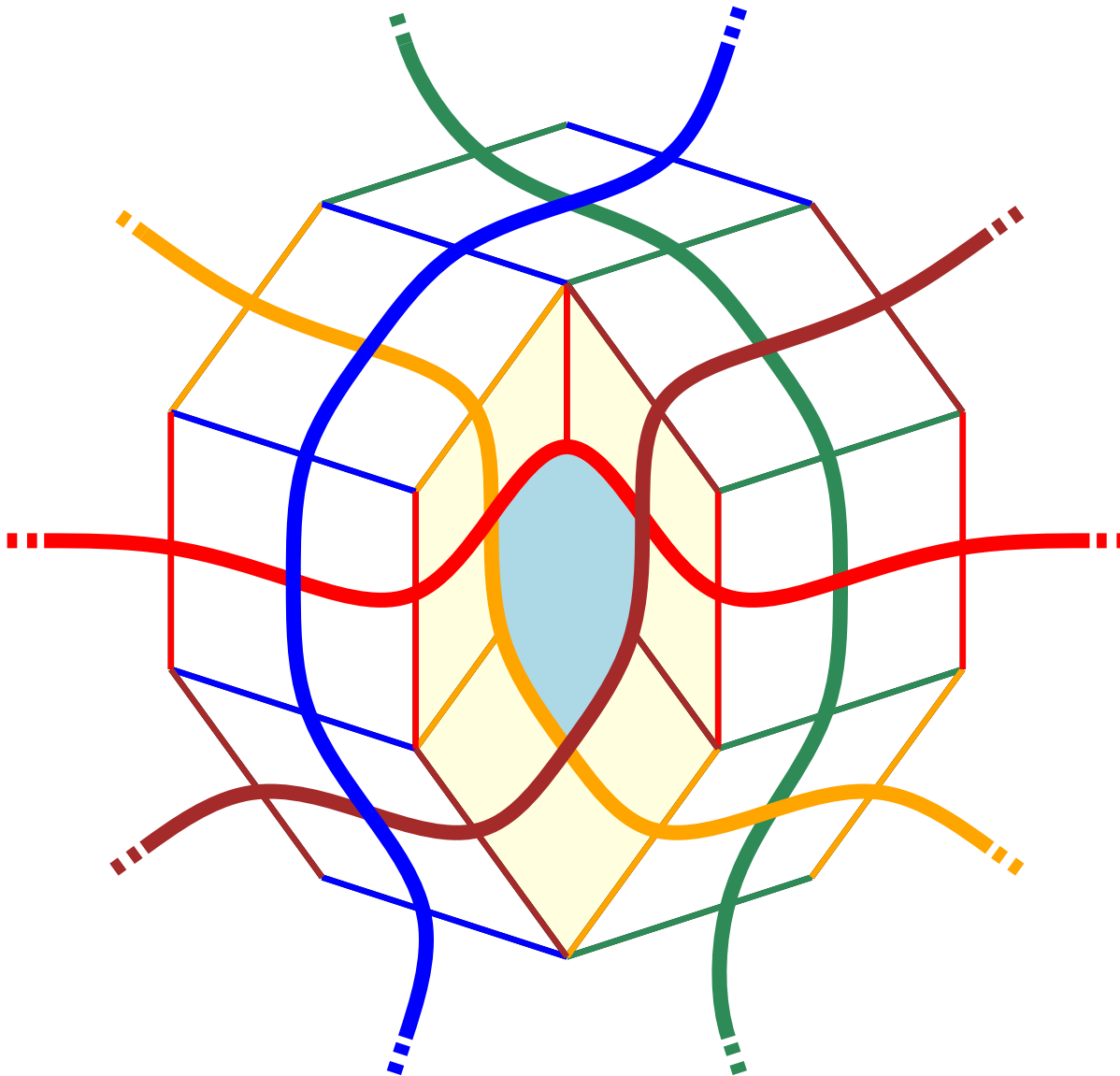
Dreieck: Genau durch 3 Pseudogeraden beschränkte Zelle.



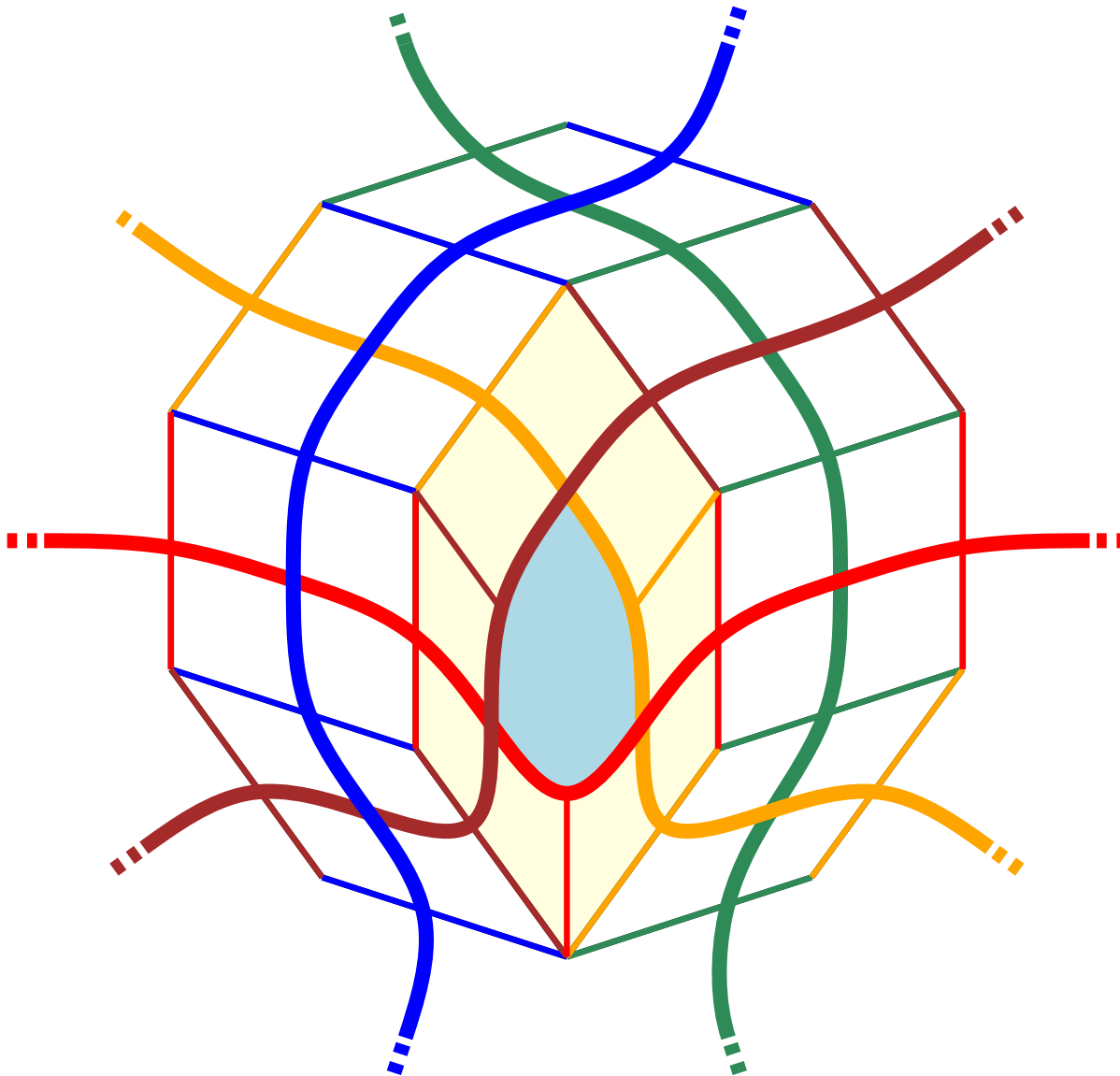
Dreieckslip: Ziehe eine der beteiligten Pseudogeraden über gegenüberliegende Ecke.



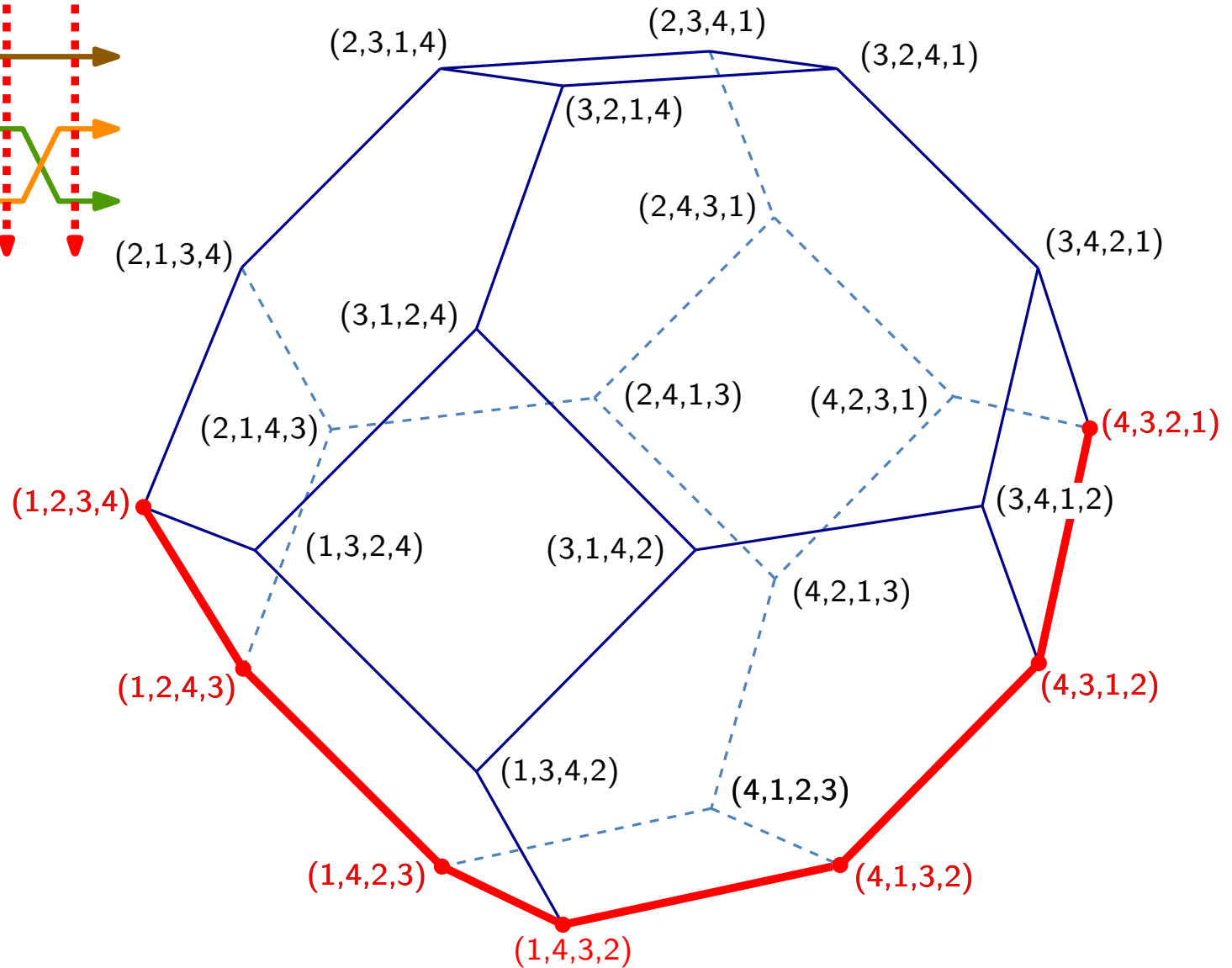
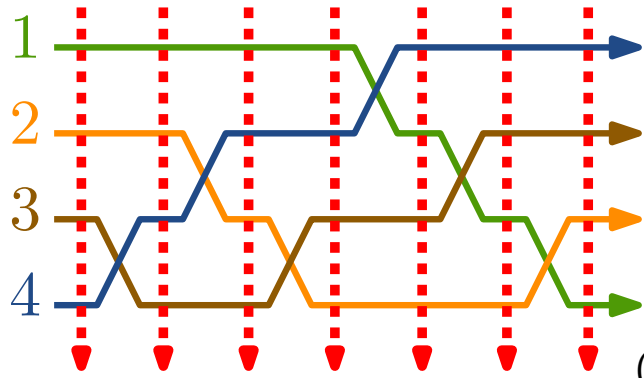
Dreiecksflips



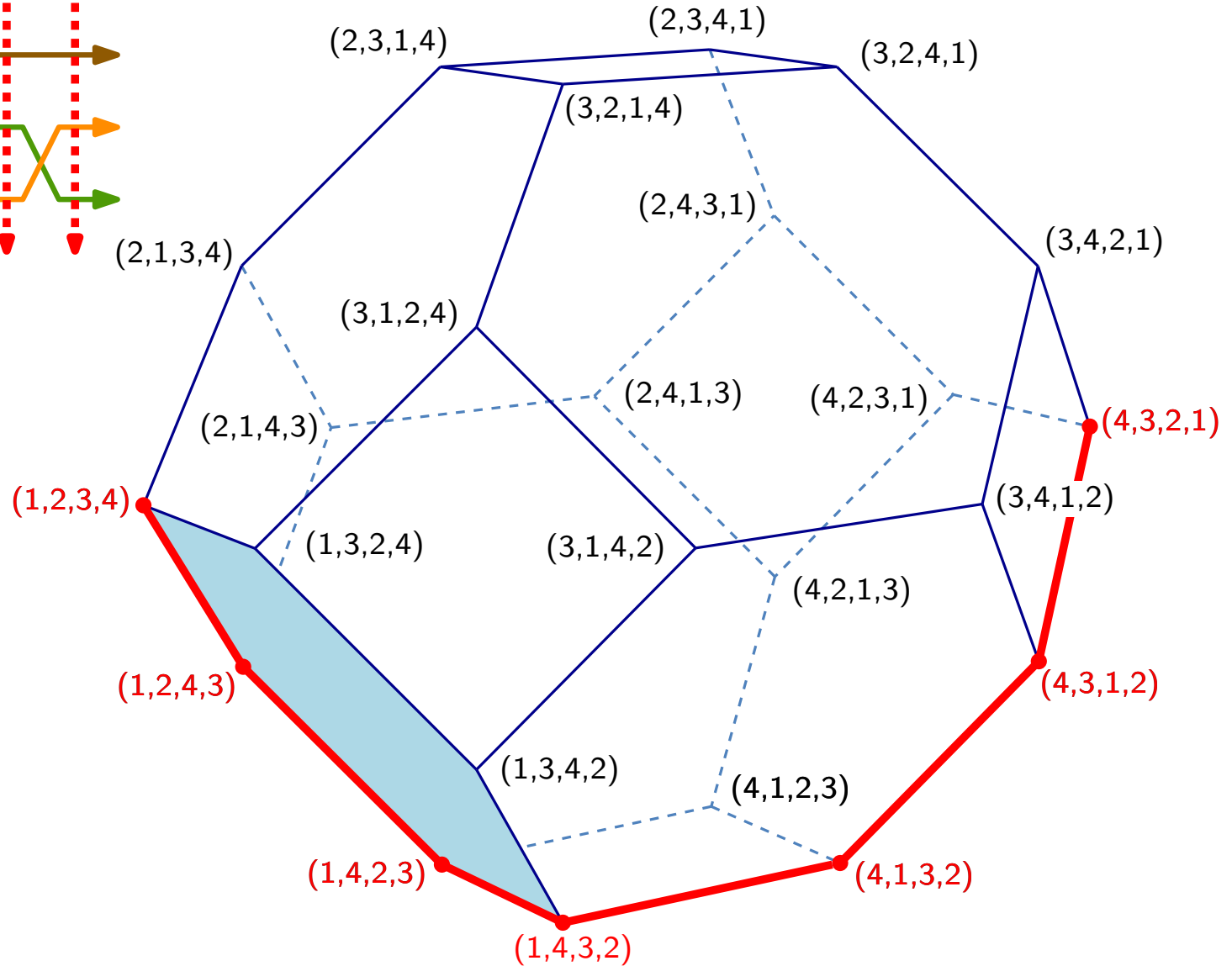
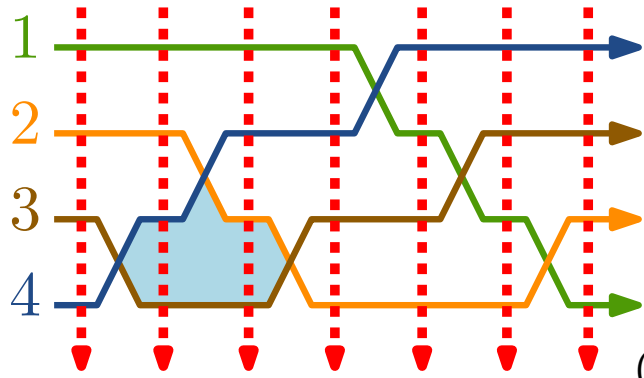
Dreiecksflips



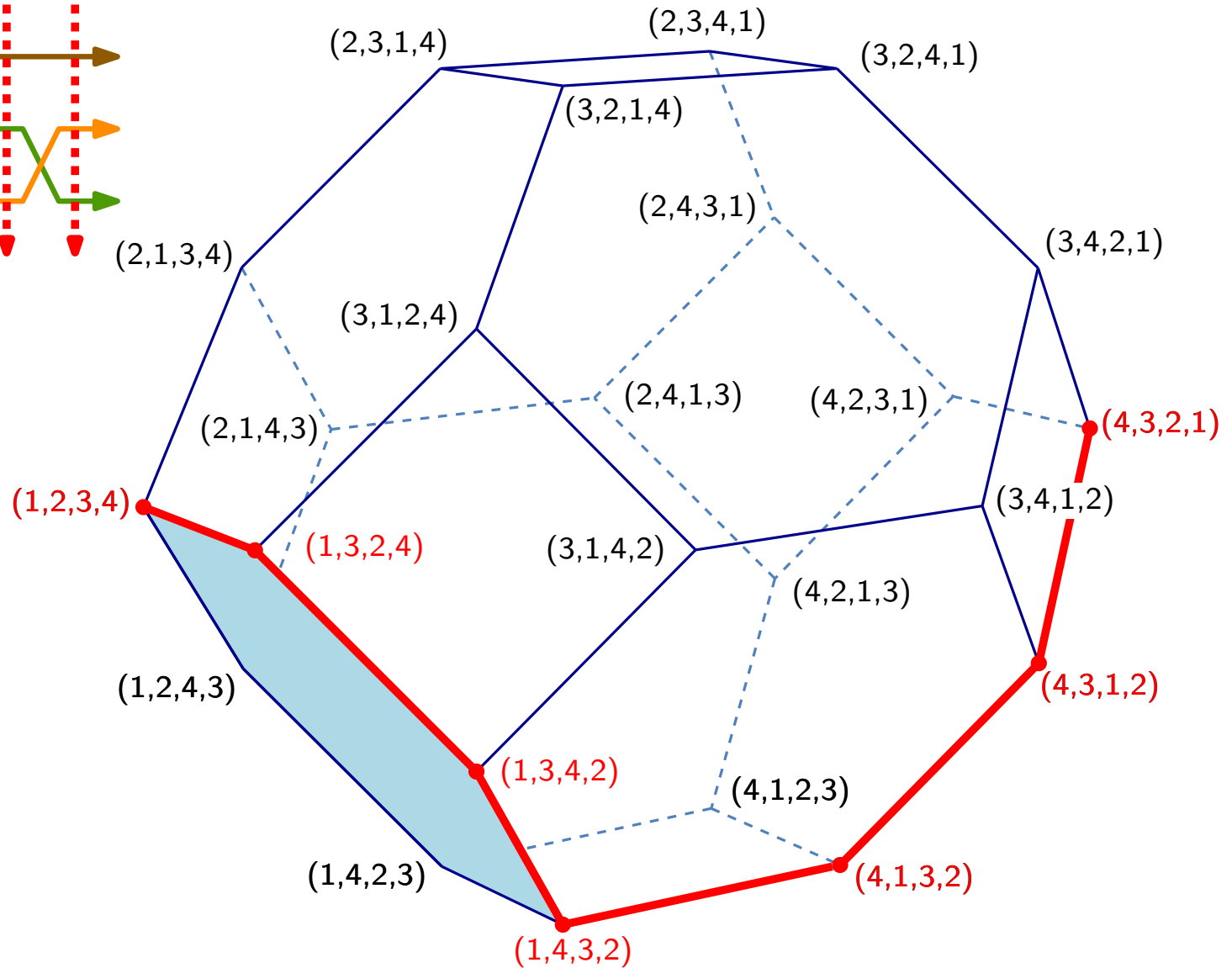
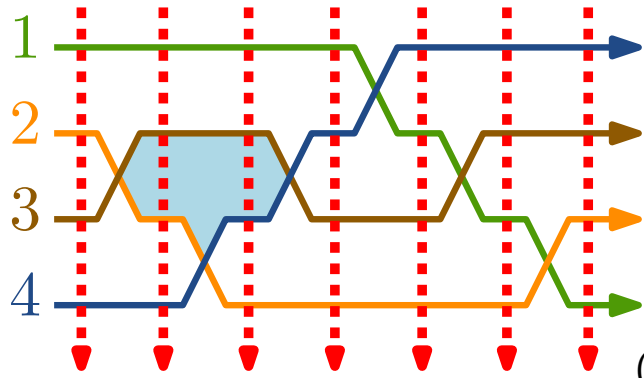
Dreiecksflips



Dreiecksflips



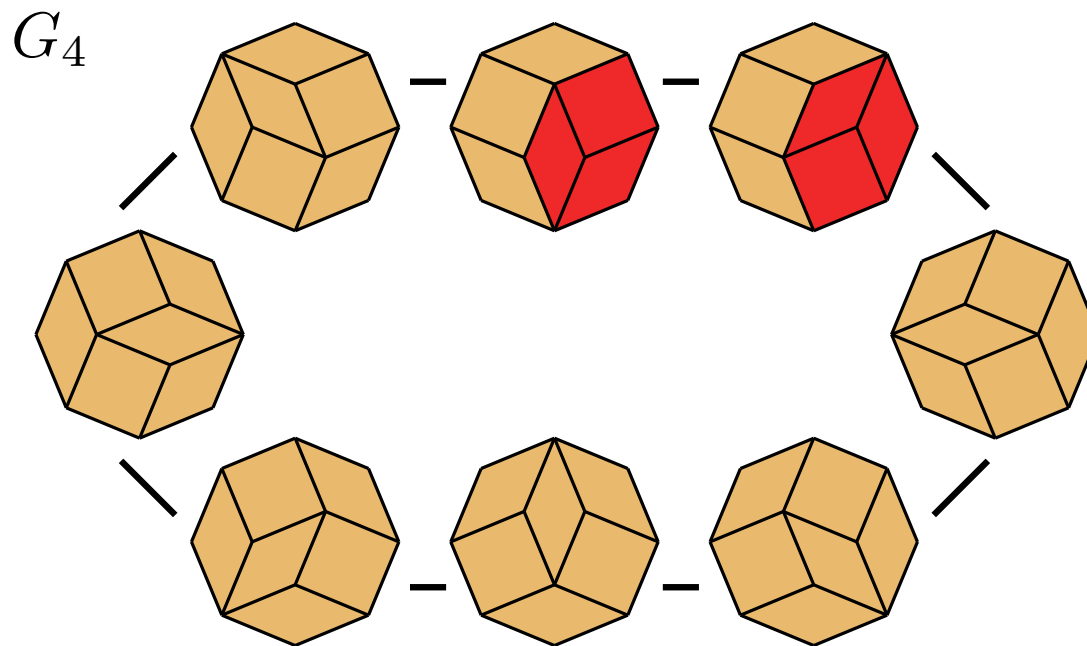
Dreiecksflips



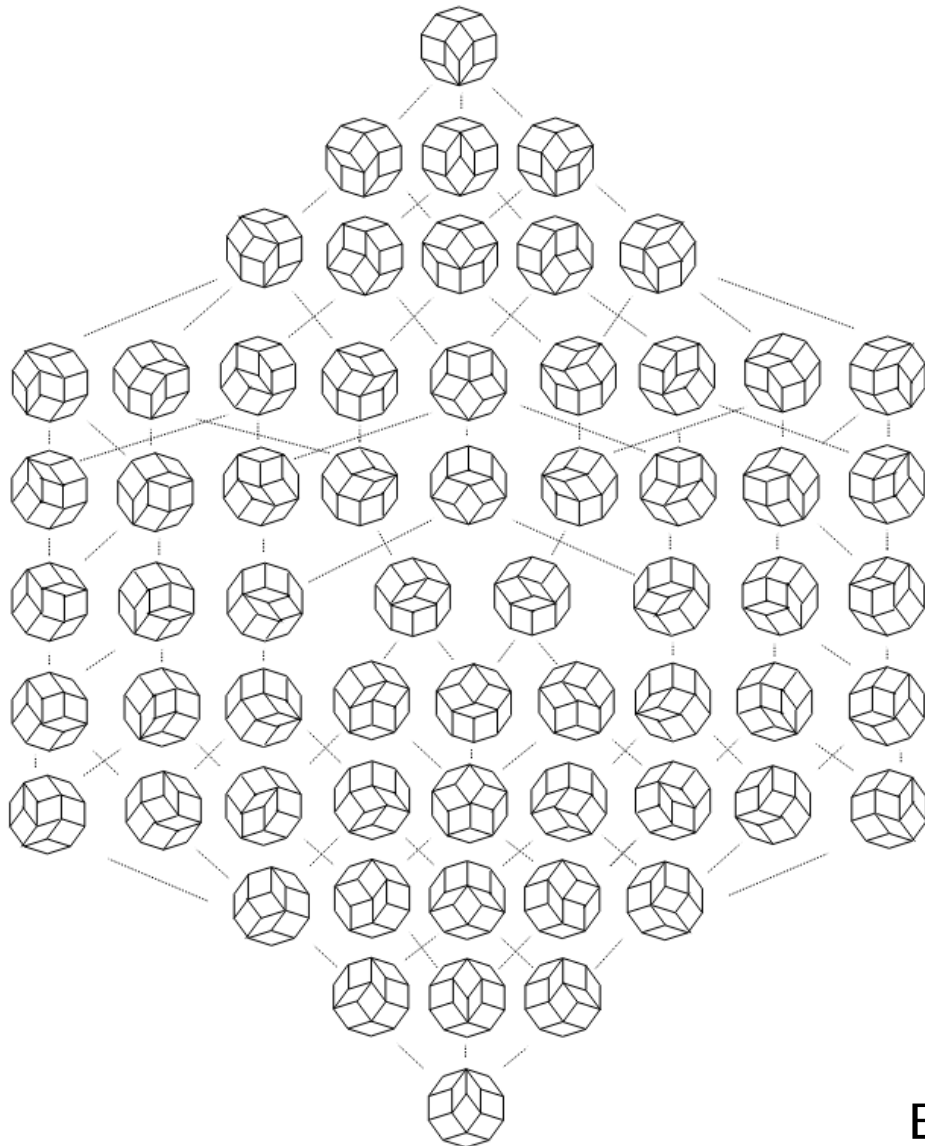
Dreiecksflips

Flip Graph G_n :

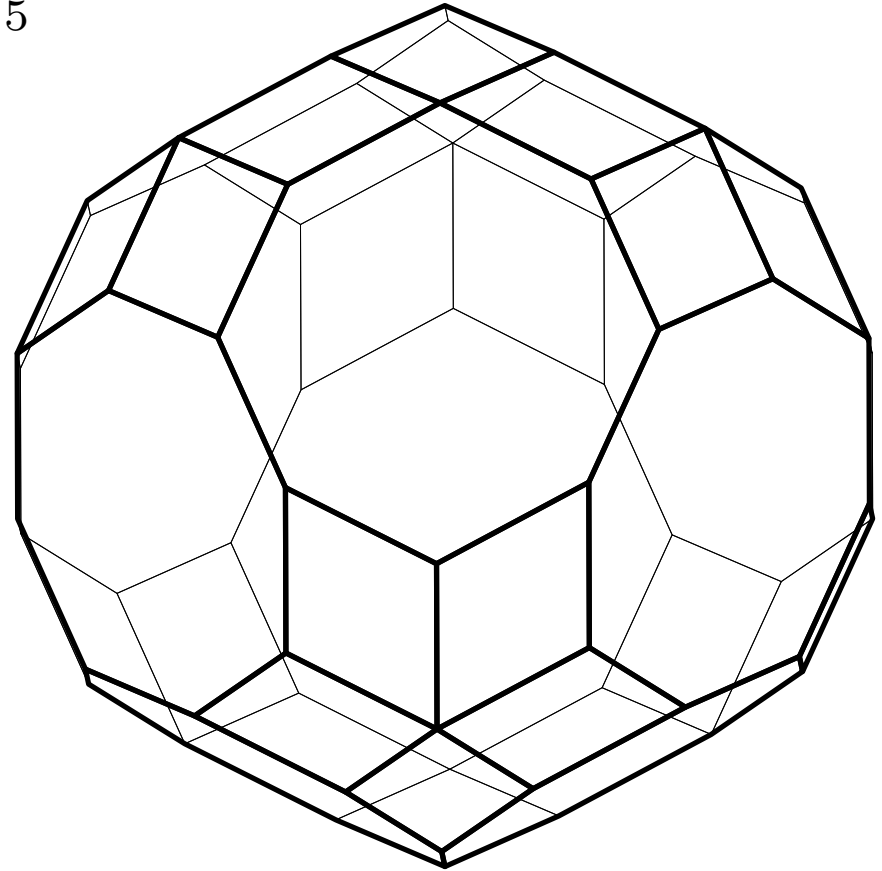
- Knoten \sim Arrangements mit n Pseudogeraden
- Kanten \sim Dreiecksflips



Dreiecksflips



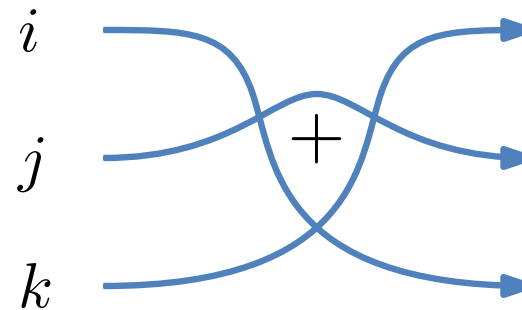
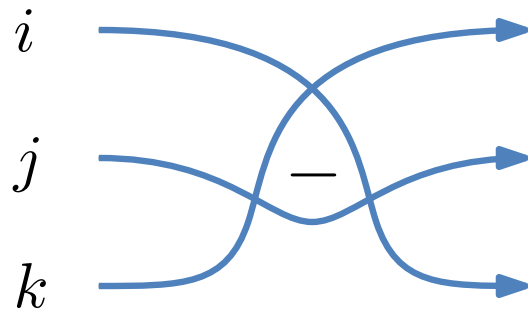
G_5



Entnommen aus (Felsner & Ziegler, 1999)

Dreiecksorientierungen

Für jedes Tripel $i < j < k$ zwei Fälle:



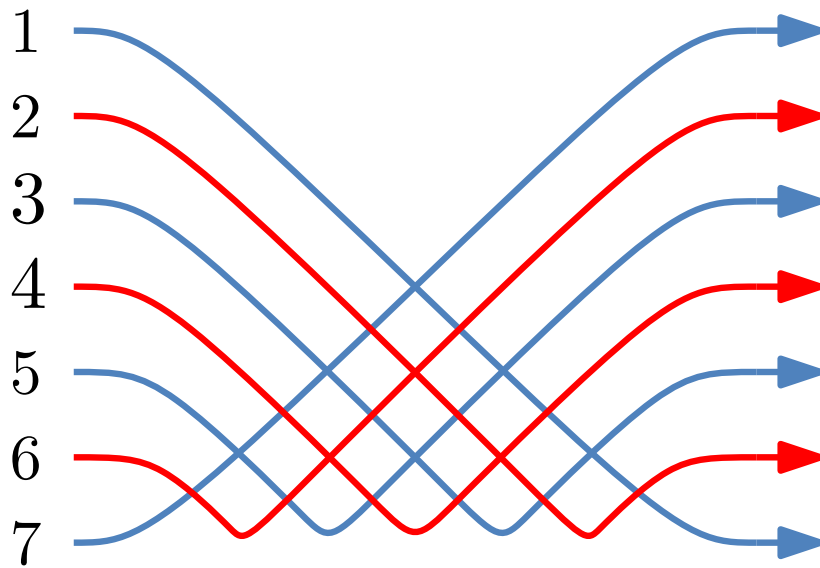
Arrangement \mathcal{A} definiert Abbildung: $\chi_{\mathcal{A}} : \binom{[n]}{3} \rightarrow \{-, +\}$
„Fingerabdruck“ von \mathcal{A}



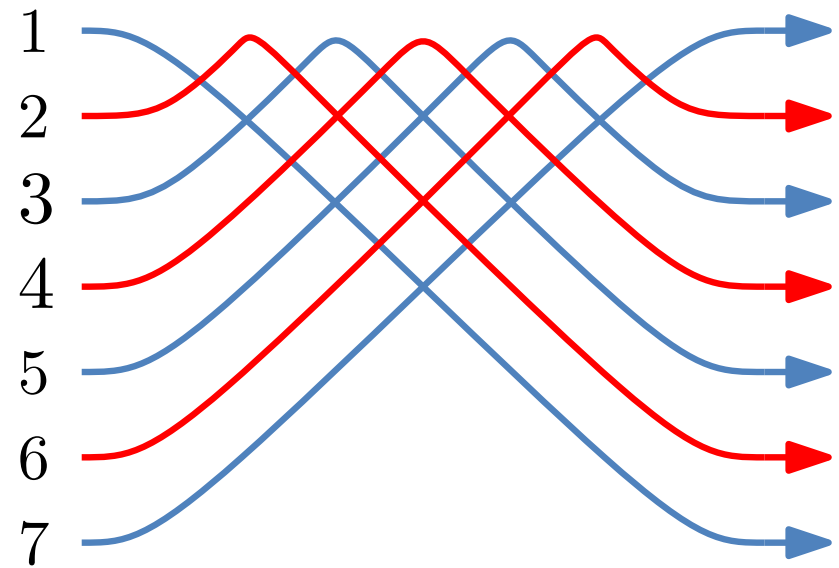
- Aus $\chi_{\mathcal{A}}$ kann \mathcal{A} eindeutig rekonstruiert werden!
- Nicht alle $2^{\binom{n}{3}}$ Vorzeichenbelegungen $f : \binom{[n]}{3} \rightarrow \{-, +\}$ kodieren Pseudogeradenarrangements.

Dreiecksorientierungen

Alle-Minus-Arrangement: $\chi_{\mathcal{A}} = -$



Alle-Plus-Arrangement: $\chi_{\mathcal{A}} = +$



Dreiecksflips

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

Dreiecksflips

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

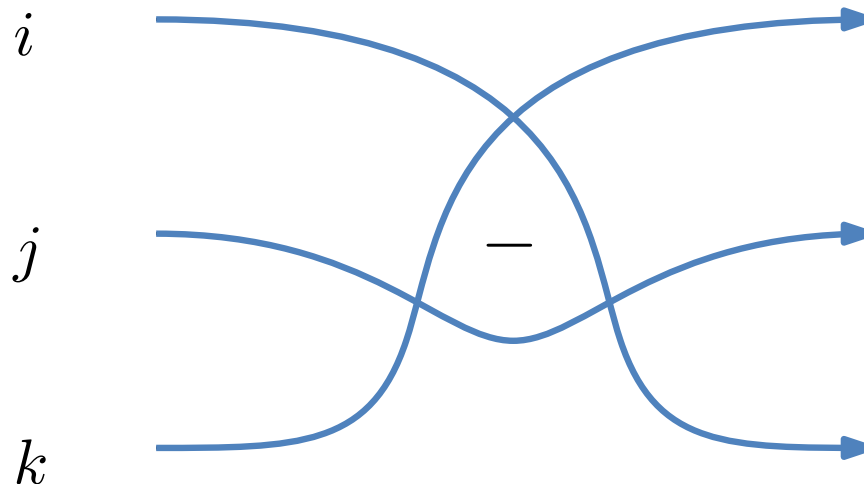
— **Lemma** —
Sofern \mathcal{A} nicht das Alle-Plus-Arrangement ist, enthält \mathcal{A} ein Tripel $i < j < k$ mit $\chi_{\mathcal{A}}(\{ijk\}) = -$, welches ein Dreieck bildet.

Dreiecksflips

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

— **Lemma** —
Sofern \mathcal{A} nicht das Alle-Plus-Arrangement ist, enthält \mathcal{A} ein Tripel $i < j < k$ mit $\chi_{\mathcal{A}}(\{ijk\}) = -$, welches ein Dreieck bildet.

Beweis:

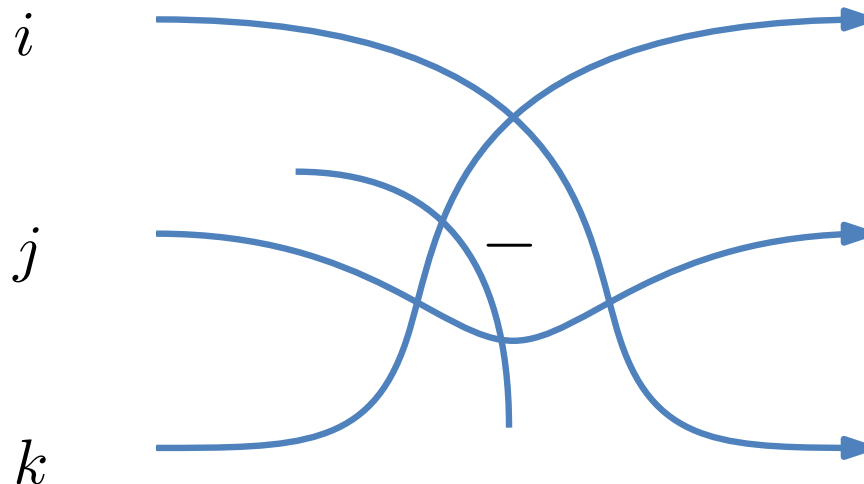


Dreiecksflips

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

— **Lemma** —
Sofern \mathcal{A} nicht das Alle-Plus-Arrangement ist, enthält \mathcal{A} ein Tripel $i < j < k$ mit $\chi_{\mathcal{A}}(\{ijk\}) = -$, welches ein Dreieck bildet.

Beweis:

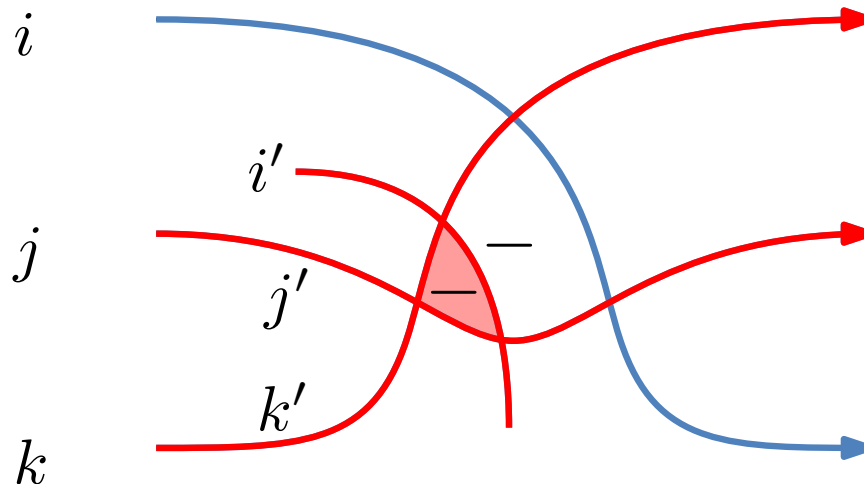


Dreiecksflips

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

Lemma —
Sofern \mathcal{A} nicht das Alle-Plus-Arrangement ist, enthält \mathcal{A} ein Tripel $i < j < k$ mit $\chi_{\mathcal{A}}(\{ijk\}) = -$, welches ein Dreieck bildet.

Beweis:

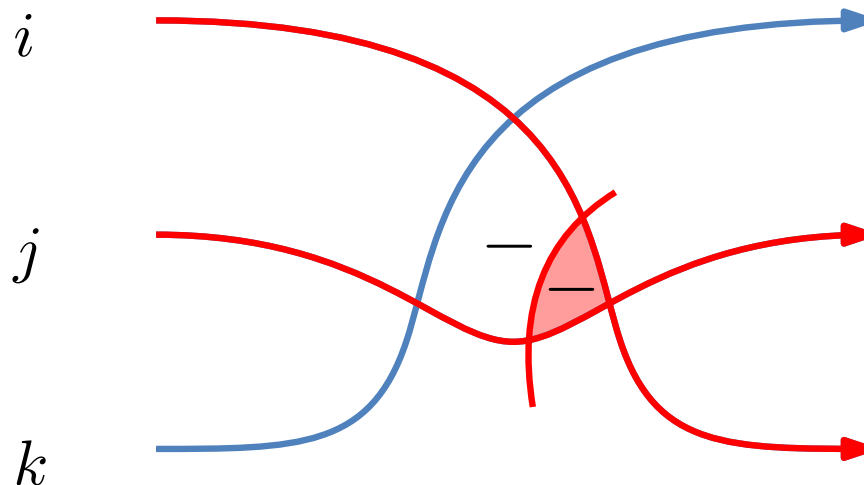


Dreiecksflips

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

— **Lemma** —
Sofern \mathcal{A} nicht das Alle-Plus-Arrangement ist, enthält \mathcal{A} ein Tripel $i < j < k$ mit $\chi_{\mathcal{A}}(\{ijk\}) = -$, welches ein Dreieck bildet.

Beweis:

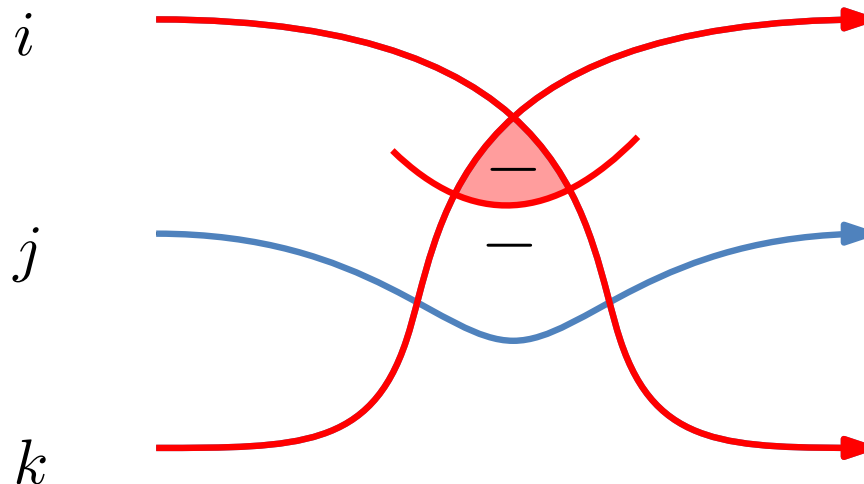


Dreiecksflips

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend und hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

— **Lemma** —
Sofern \mathcal{A} nicht das Alle-Plus-Arrangement ist, enthält \mathcal{A} ein Tripel $i < j < k$ mit $\chi_{\mathcal{A}}(\{ijk\}) = -$, welches ein Dreieck bildet.

Beweis:



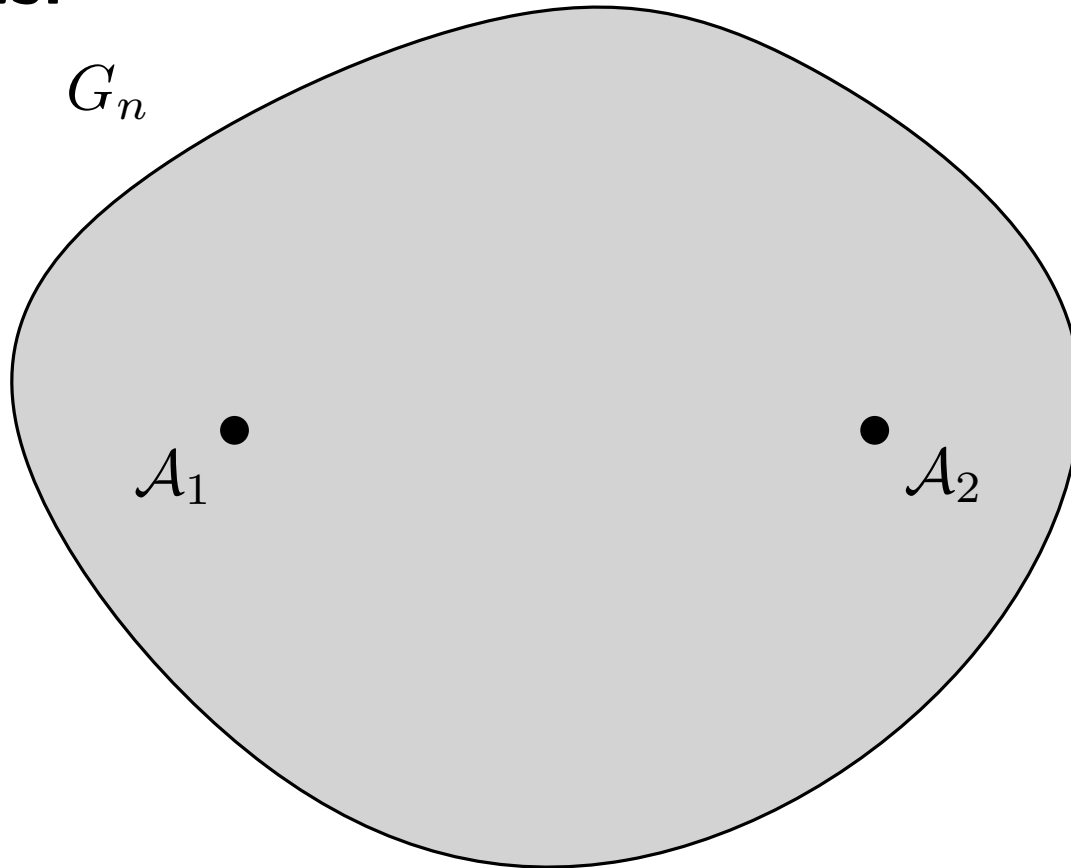
Zusammenhang Flipgraph

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

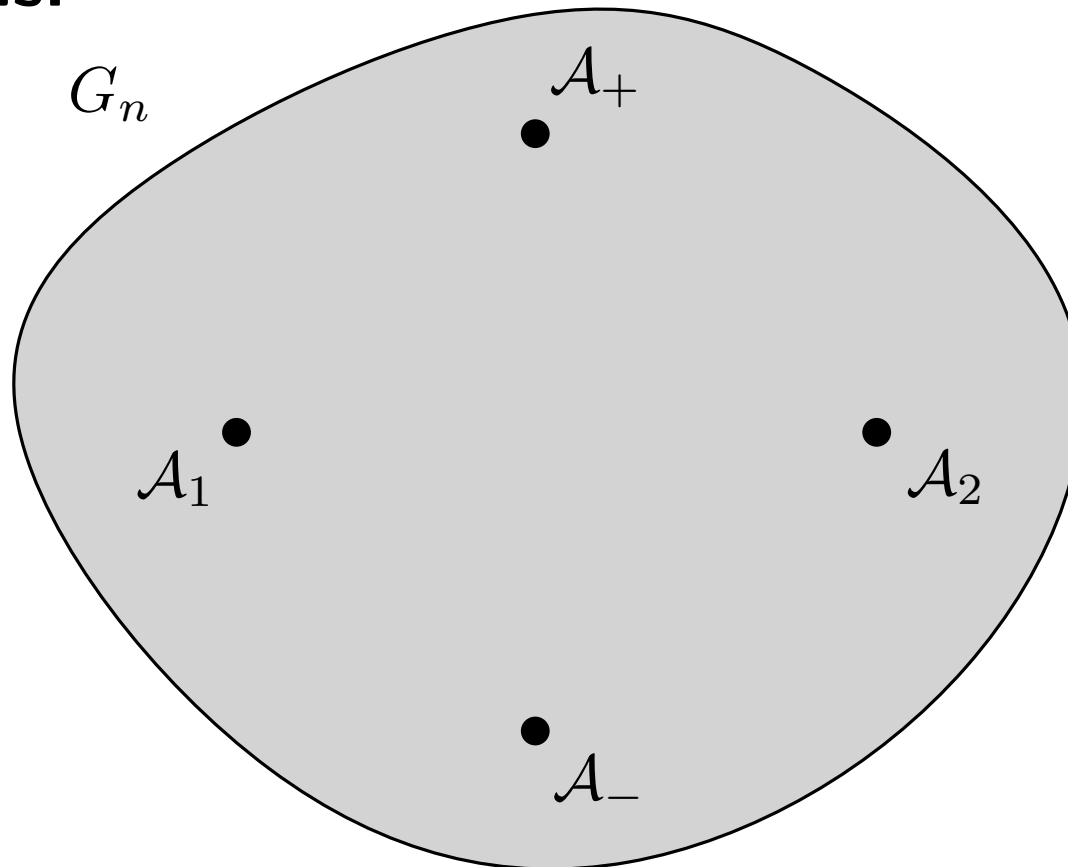
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

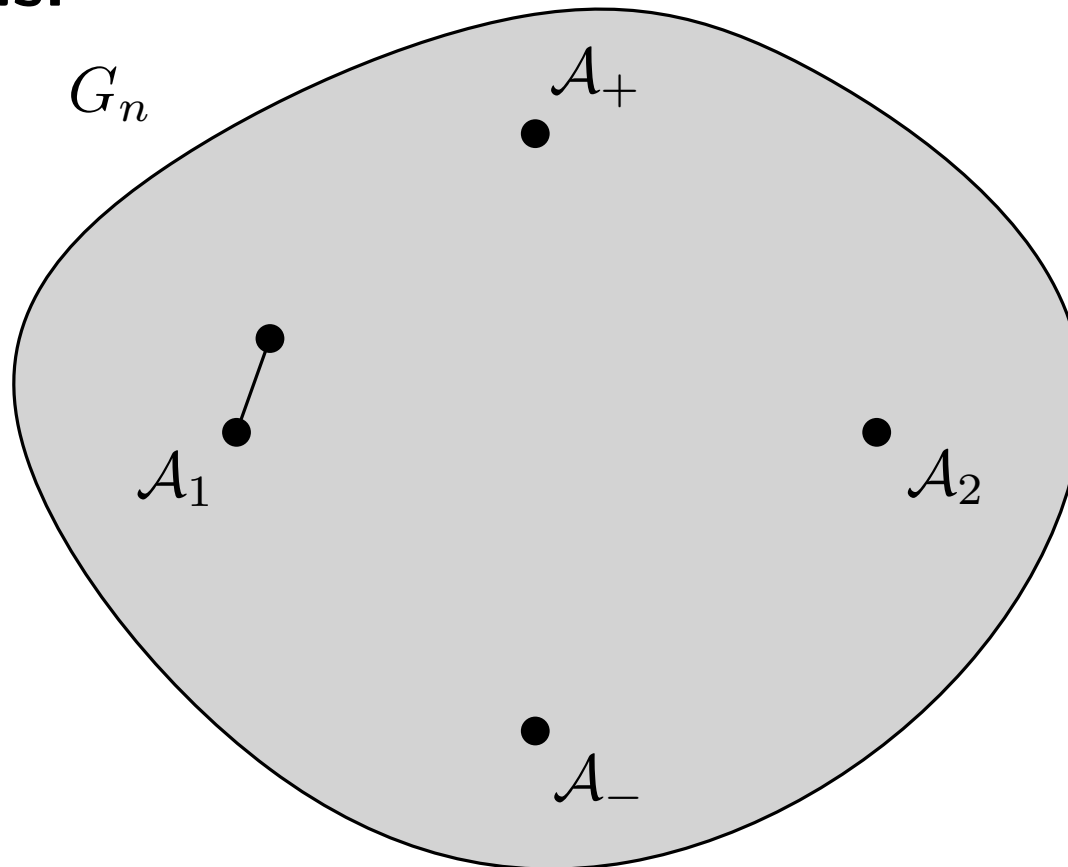
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

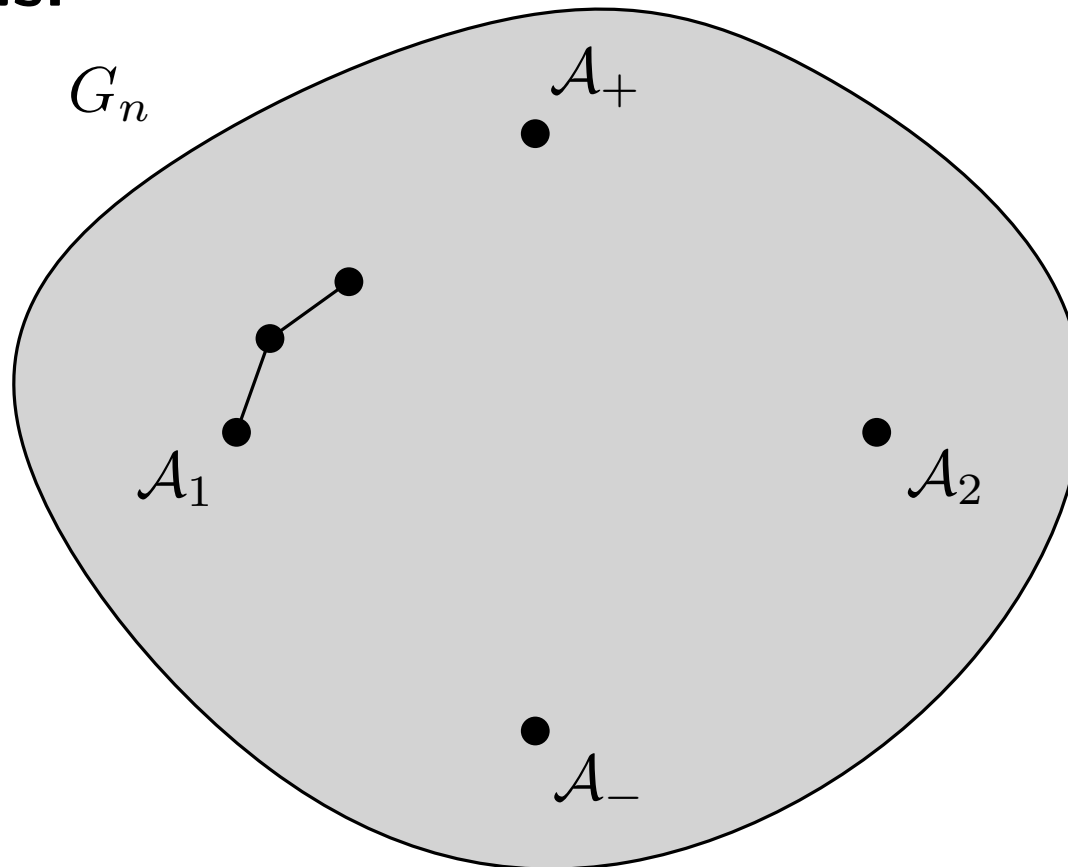
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

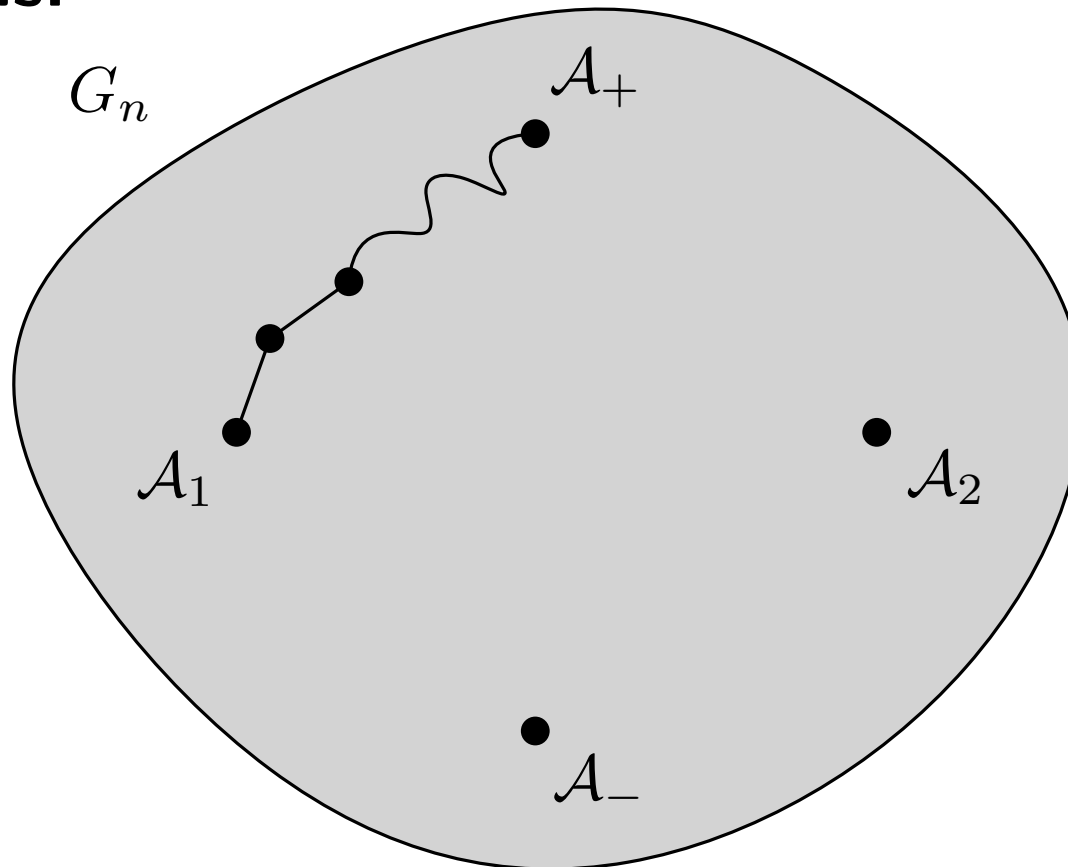
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

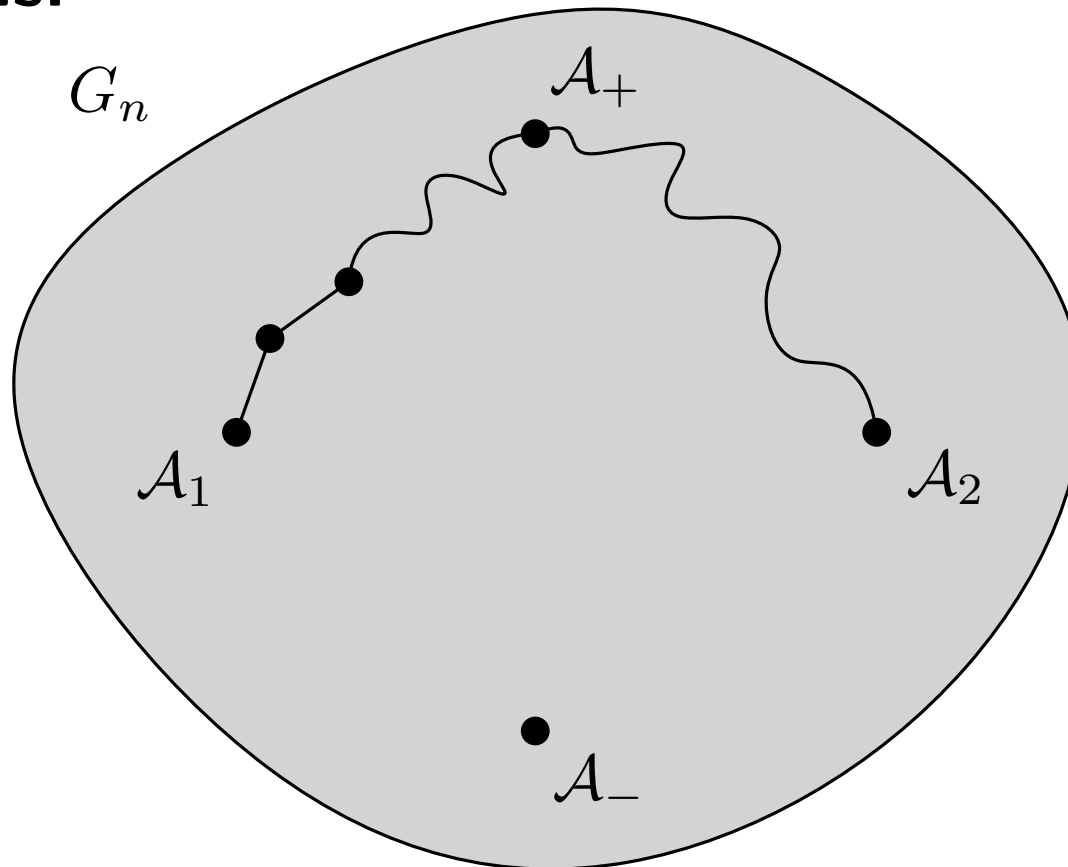
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

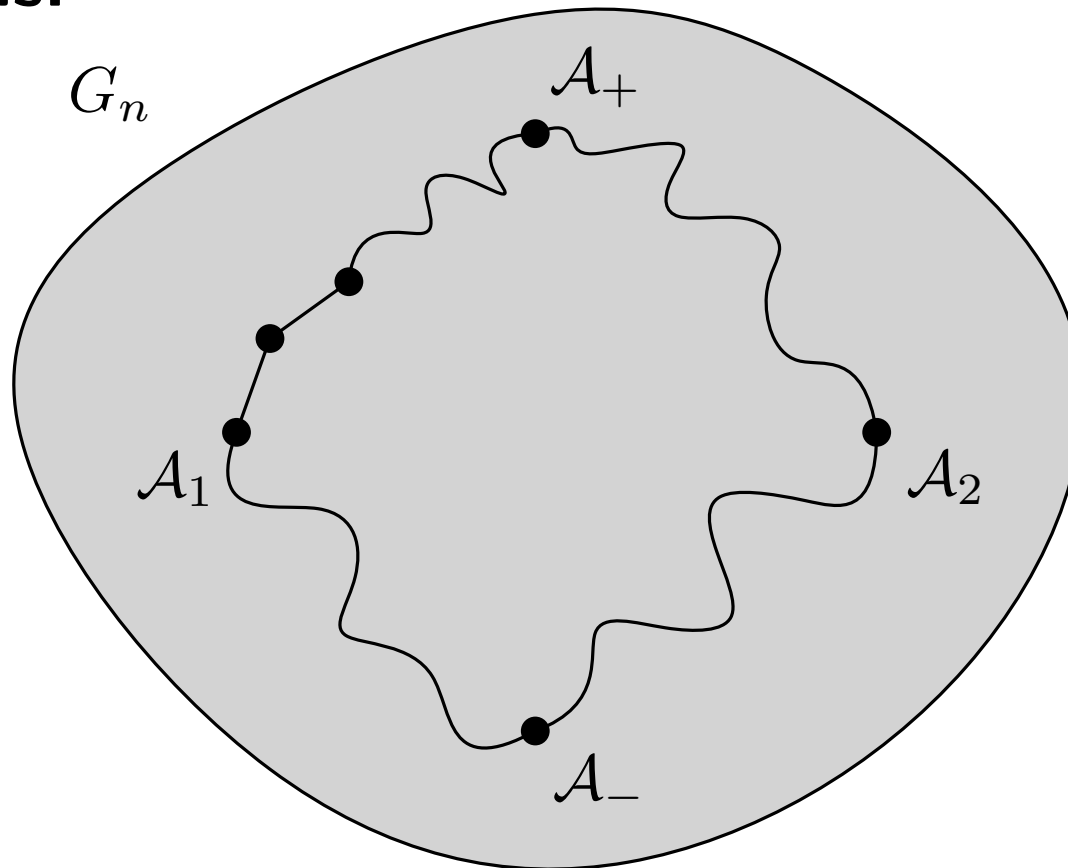
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

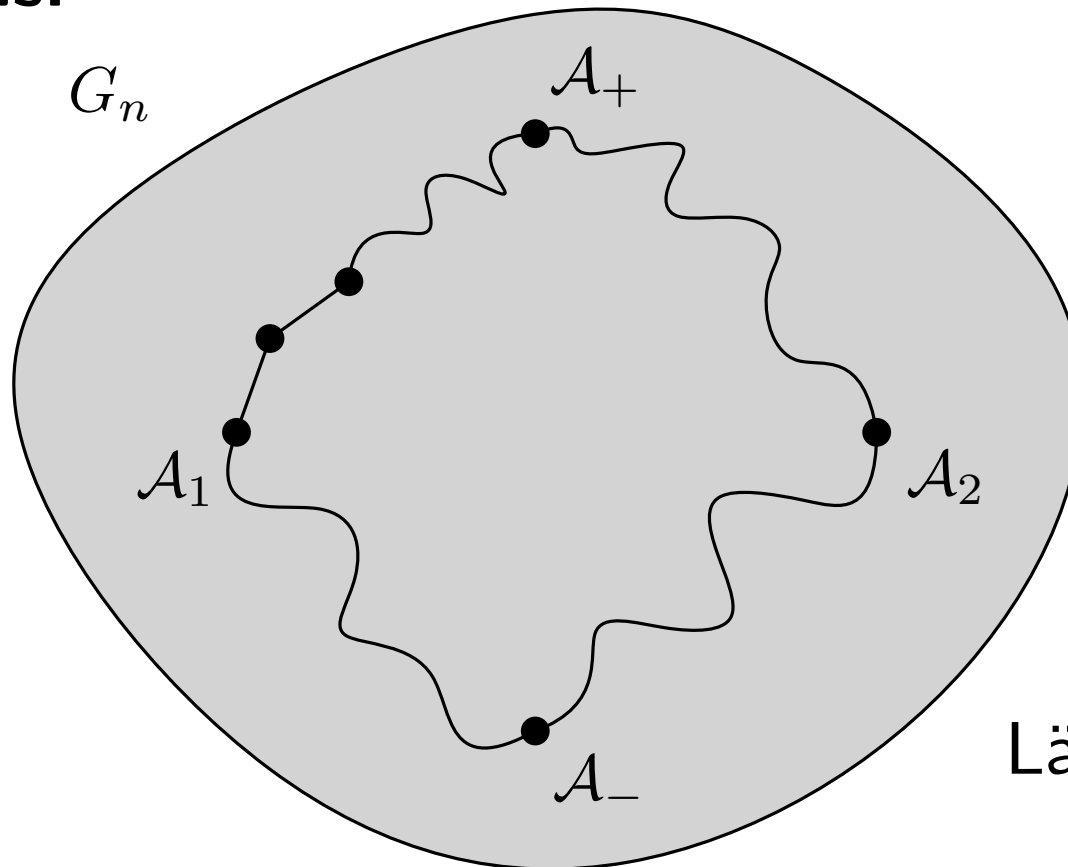
Beweis:



Zusammenhang Flipgraph

Theorem (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

Beweis:



$$\text{Länge} = 2 \cdot \binom{n}{3}$$



Zusammenhang Flipgraph

— **Theorem** (Ringel, 1957) —
Der Flipgraph G_n ist zusammenhängend and hat Durchmesser $\binom{n}{3}$.

— **Theorem** (Alves-Radtke, Felsner, Obenaus,
R., Scheucher, Vogtenhuber, 2024) —
Der Flipgraph G_n ist $(n - 2)$ -zusammenhängend.

Pseudogeradenarrangements

Drahtdiagramme

Signotope

plane partitions

Permutationen

Rhomben-
pflasterungen

Problem:
Wie können PGAs
effizient mit uniformer
Verteilung zufällig erzeugt
werden?

Sortiernetze

Höhere
Bruhat-Ordnung

Standard Young Tableaux

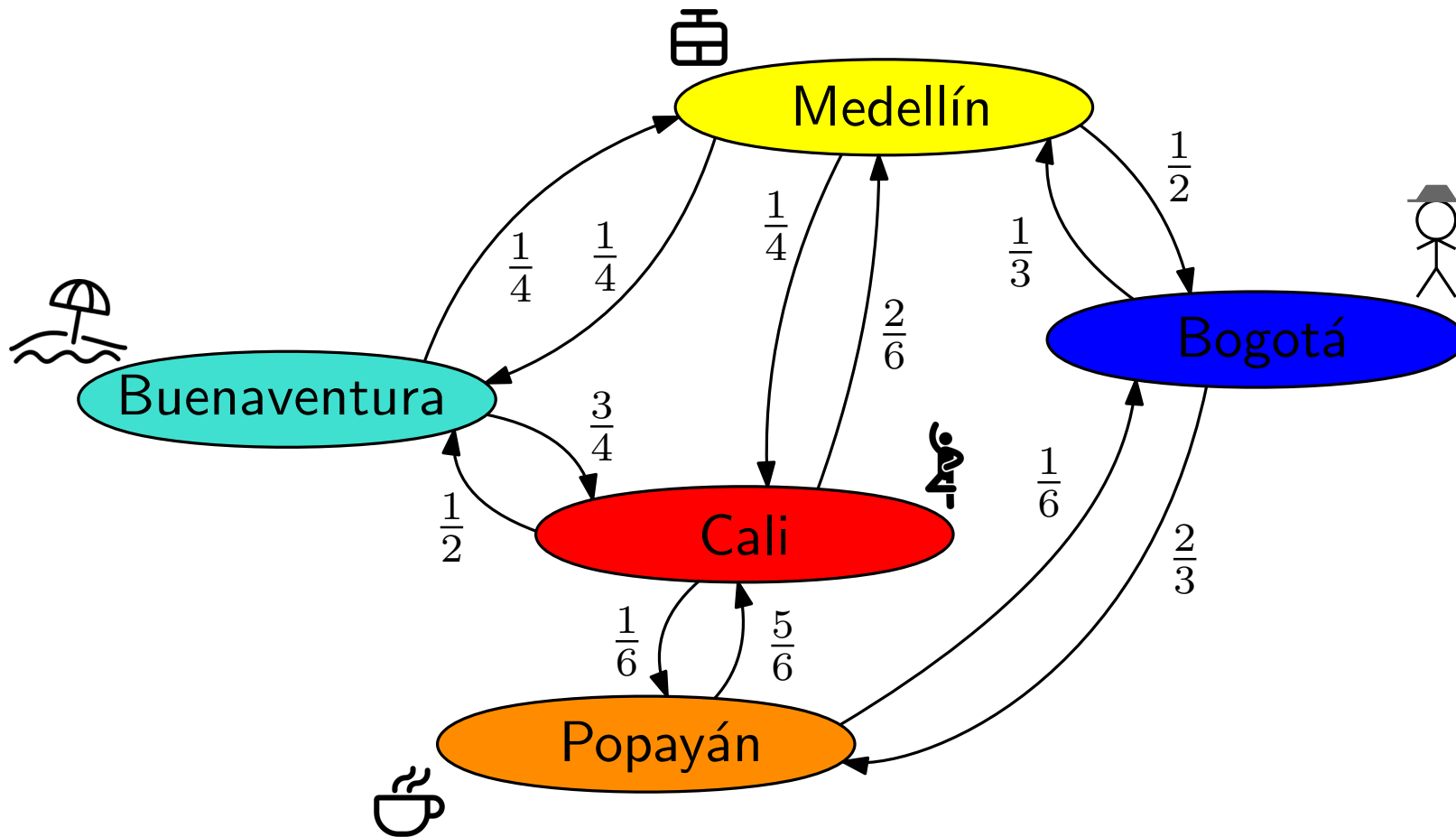
Familien monotoner, nicht
kreuzender Gitterpfade

Orientierte Matroide vom Grad 3

Markov Ketten

Markov-Kette (X_t) , Zustandsmenge \mathcal{X}

Übergangswahrscheinlichkeiten $P : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$



Markov Ketten

Markov-Kette (X_t) , Zustandsmenge \mathcal{X} , Übergänge $P : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$

- Falls *irreduzibel* und *aperiodisch*: Konvergiert gegen stationäre Verteilung π :

$$\mathbb{P}[X_t = x] \rightarrow \pi(x)$$

- Falls P *symmetrisch*: π entspricht uniformer Verteilung.
- *Totale Variationsdistanz* zweier Verteilungen μ, μ' auf Menge \mathcal{X} :

$$\|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} := \sup_{M \subseteq \mathcal{X}} |\mu(M) - \mu'(M)|$$

- Def. $d(t) := \max_{x \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}$
- *Mischzeit* $\tau(\varepsilon) := \min\{t \in \mathbb{N}_0 \mid \forall t' \geq t : d(t') \leq \varepsilon\}$

Def: Klasse von Markov-Ketten heißt *schnell mischend* falls
$$\tau(\varepsilon) \in \mathcal{O}\left(p\left(\log \frac{|\mathcal{X}|}{\varepsilon}\right)\right) \quad \text{für ein Polynom } p \in \mathbb{R}[X].$$

Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

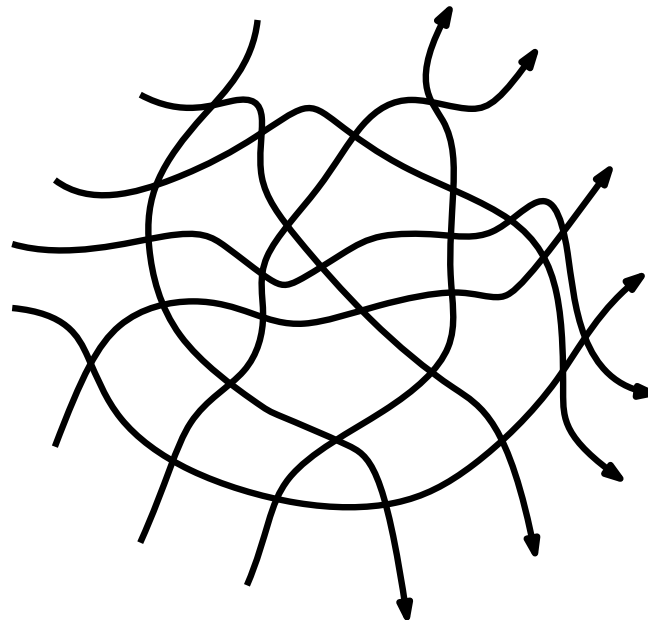
- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade

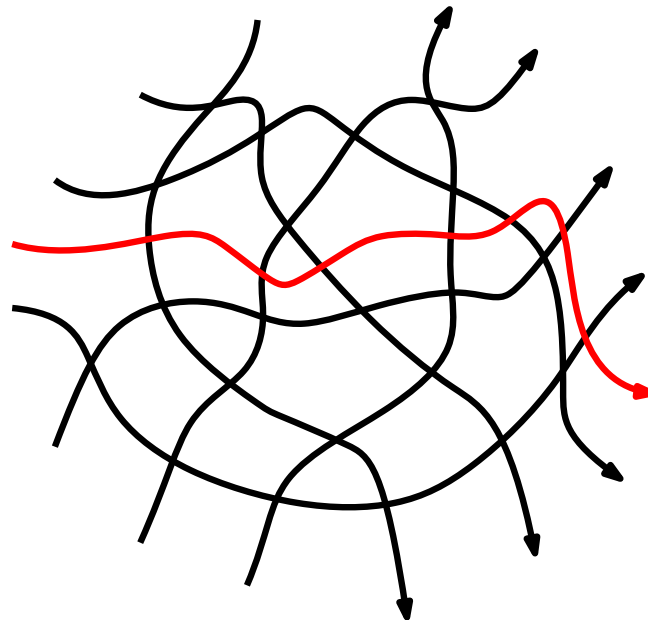


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade

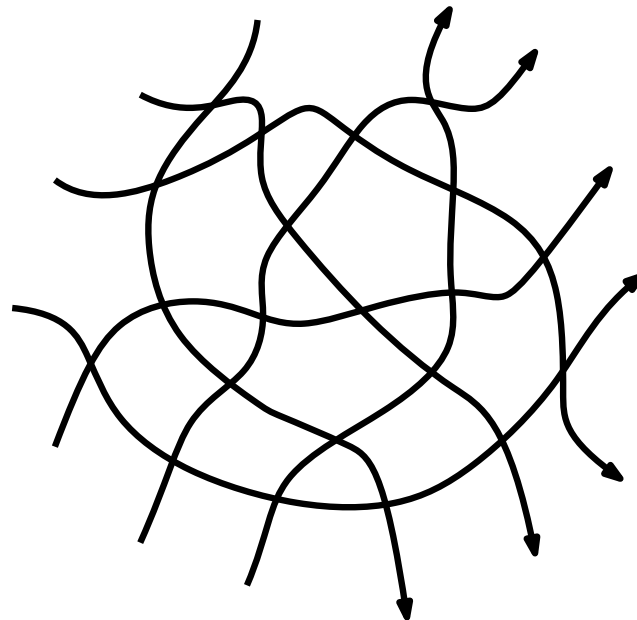


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade

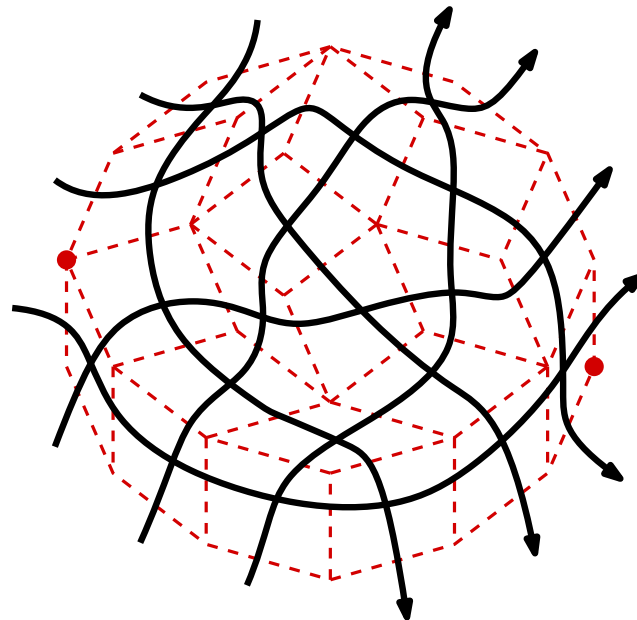


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade

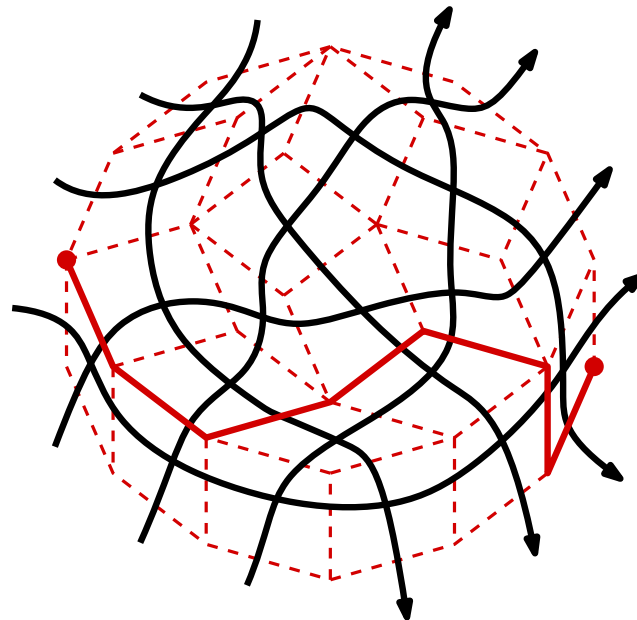


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade

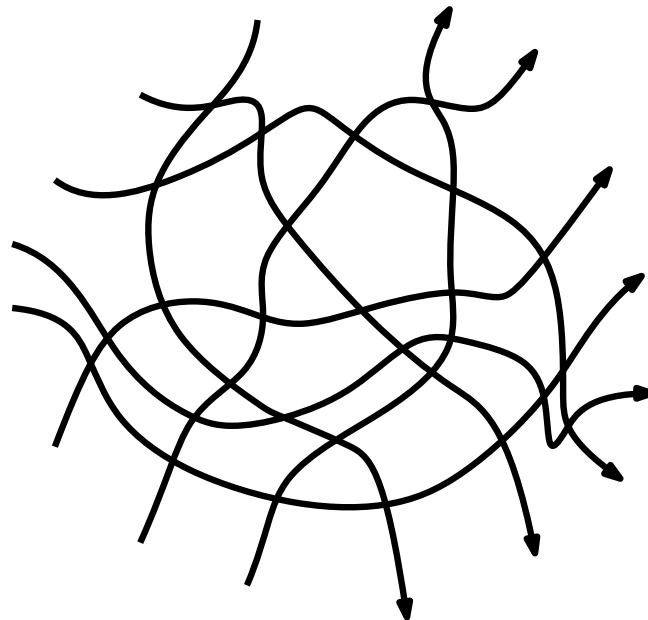


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade

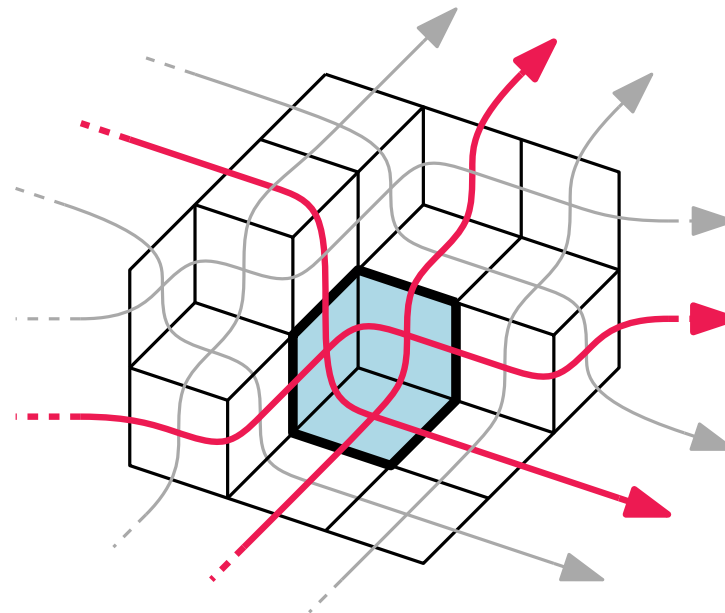


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette II: Zufällige Dreiecksflips

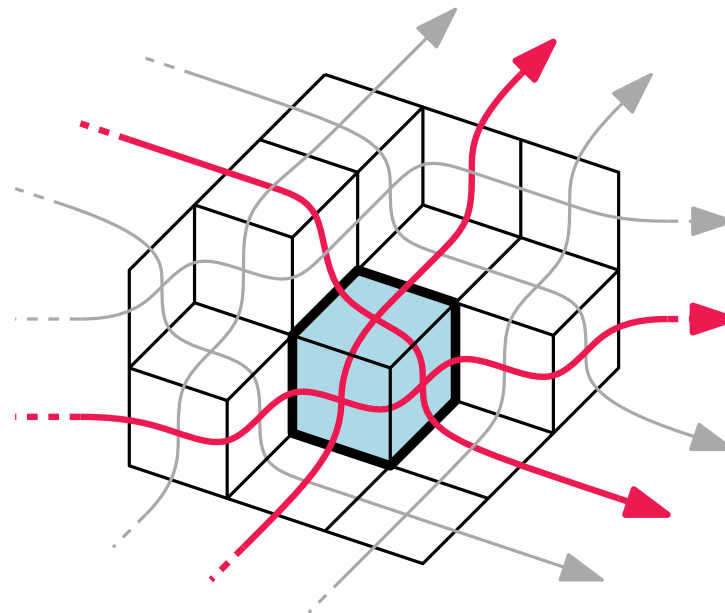


Zufällige Erzeugung mittels Markov-Kette

Idee:

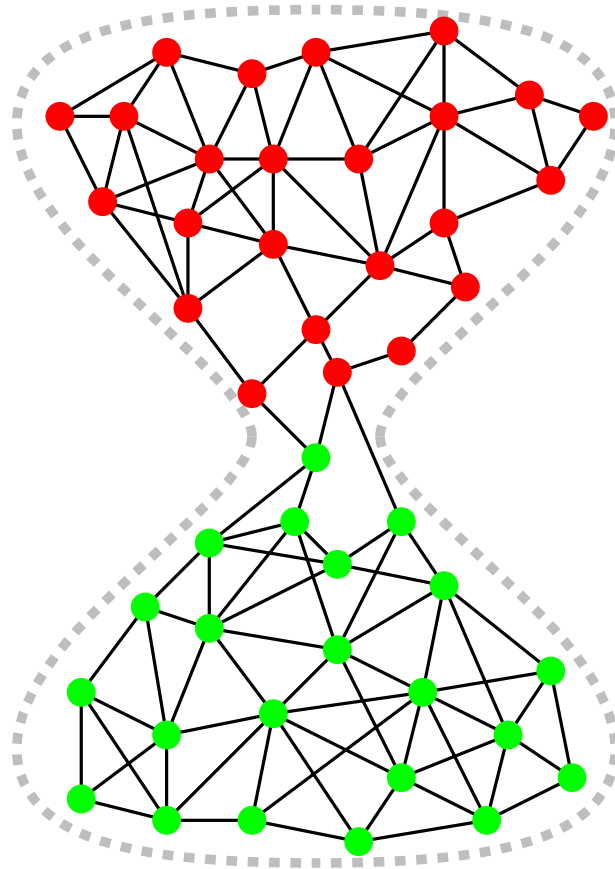
- Zustände $\mathcal{X} = \{\text{Arrangements fester Größe}\}$
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
 \implies Nach vielen Schritten nahe an uniformer Verteilung.

Markov-Kette II: Zufällige Dreiecksflips

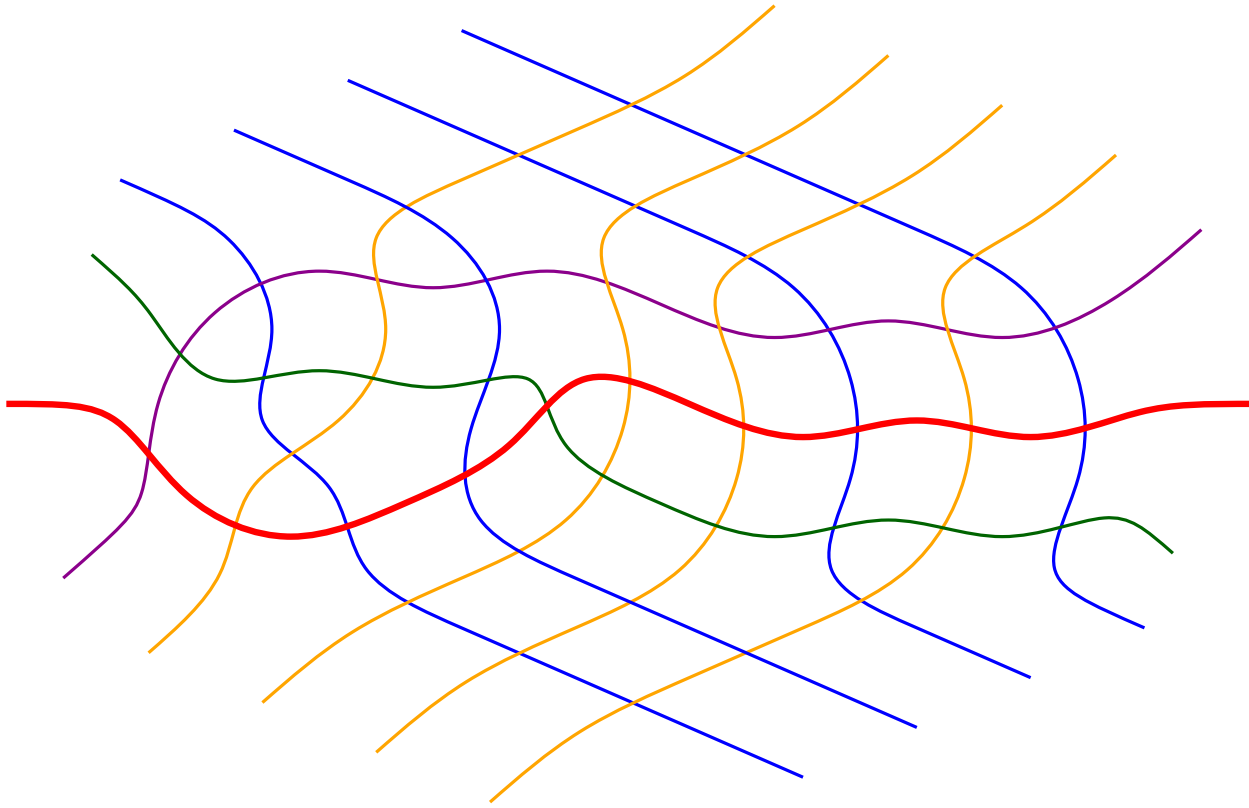


Falschenhals

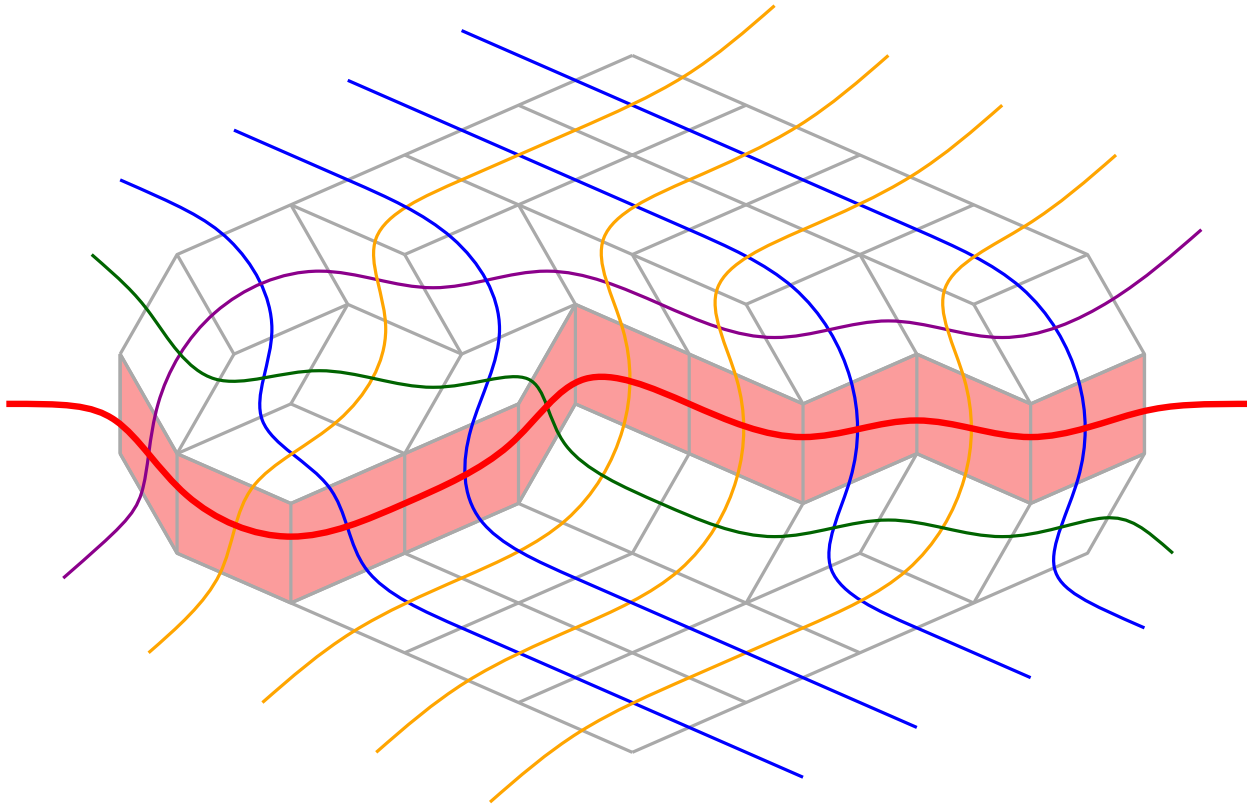
Markov-Kette mit „Falschenhals“:



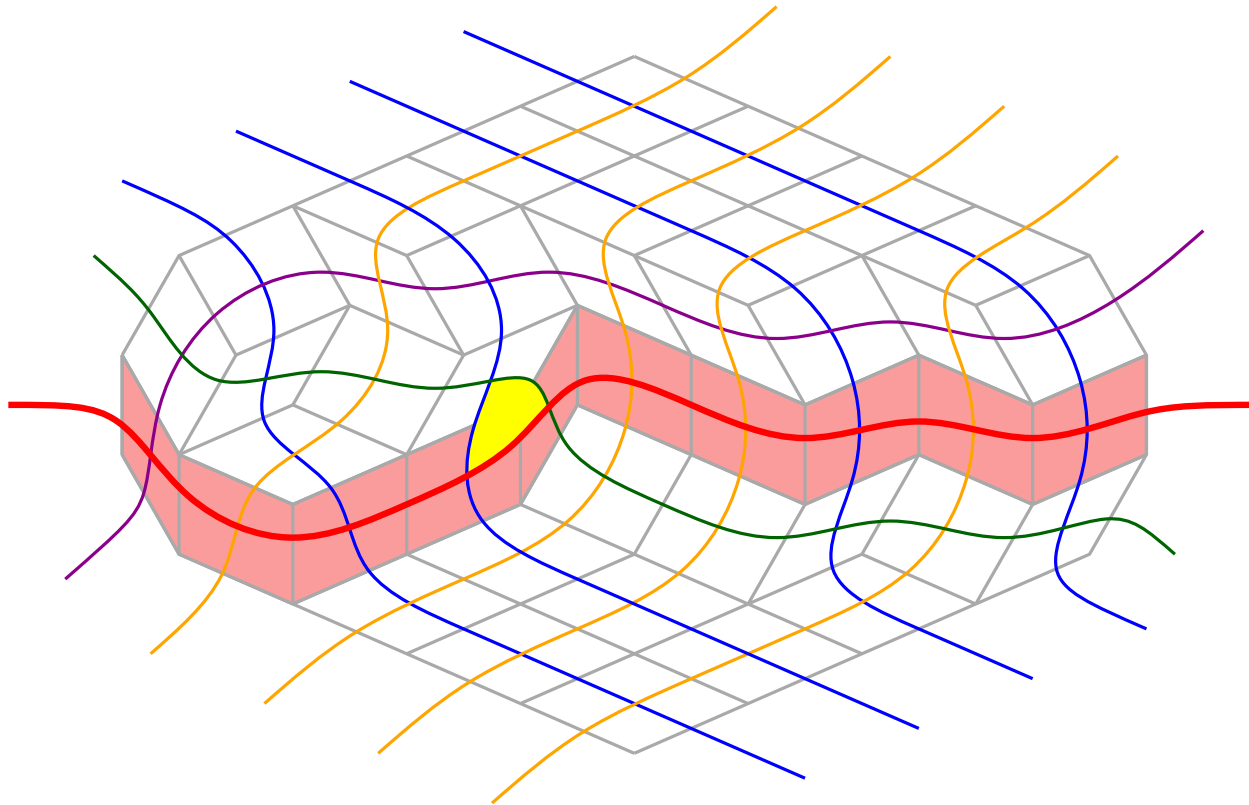
Flips an einzelner Pseudogerade



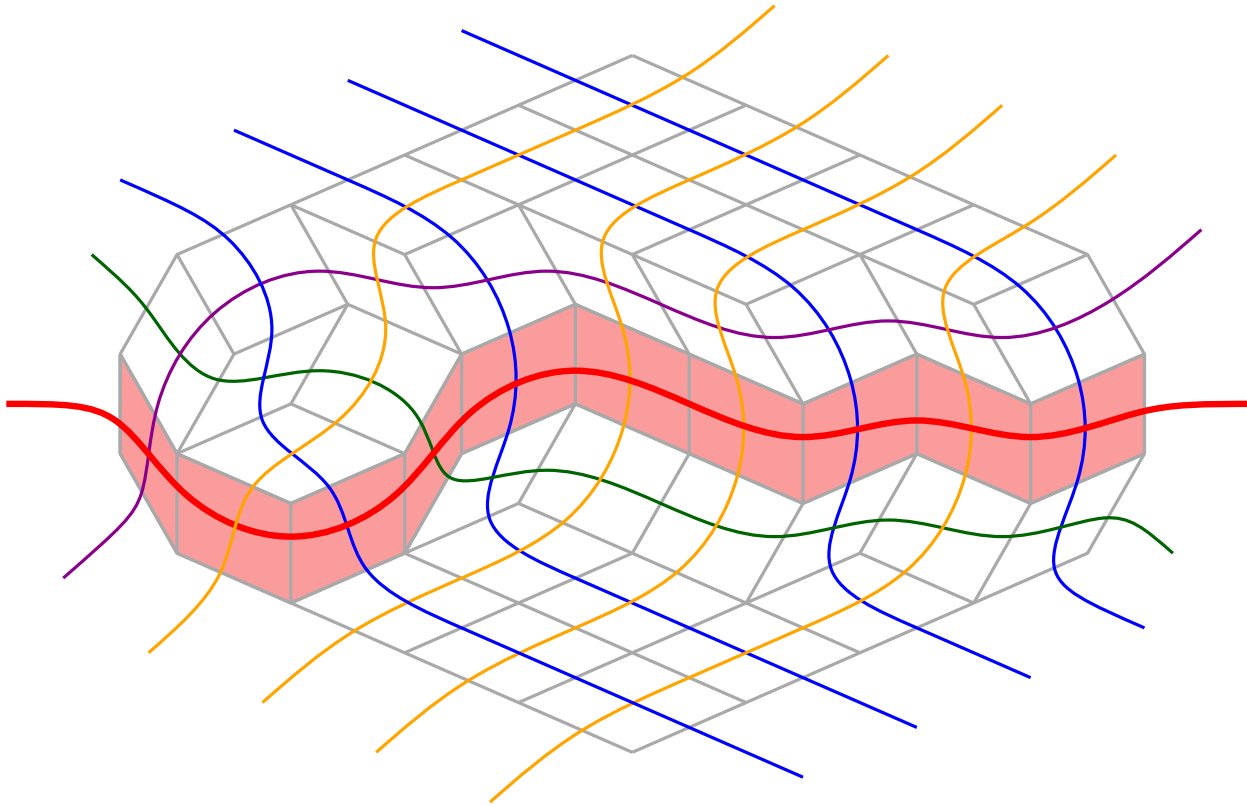
Flips an einzelner Pseudogerade



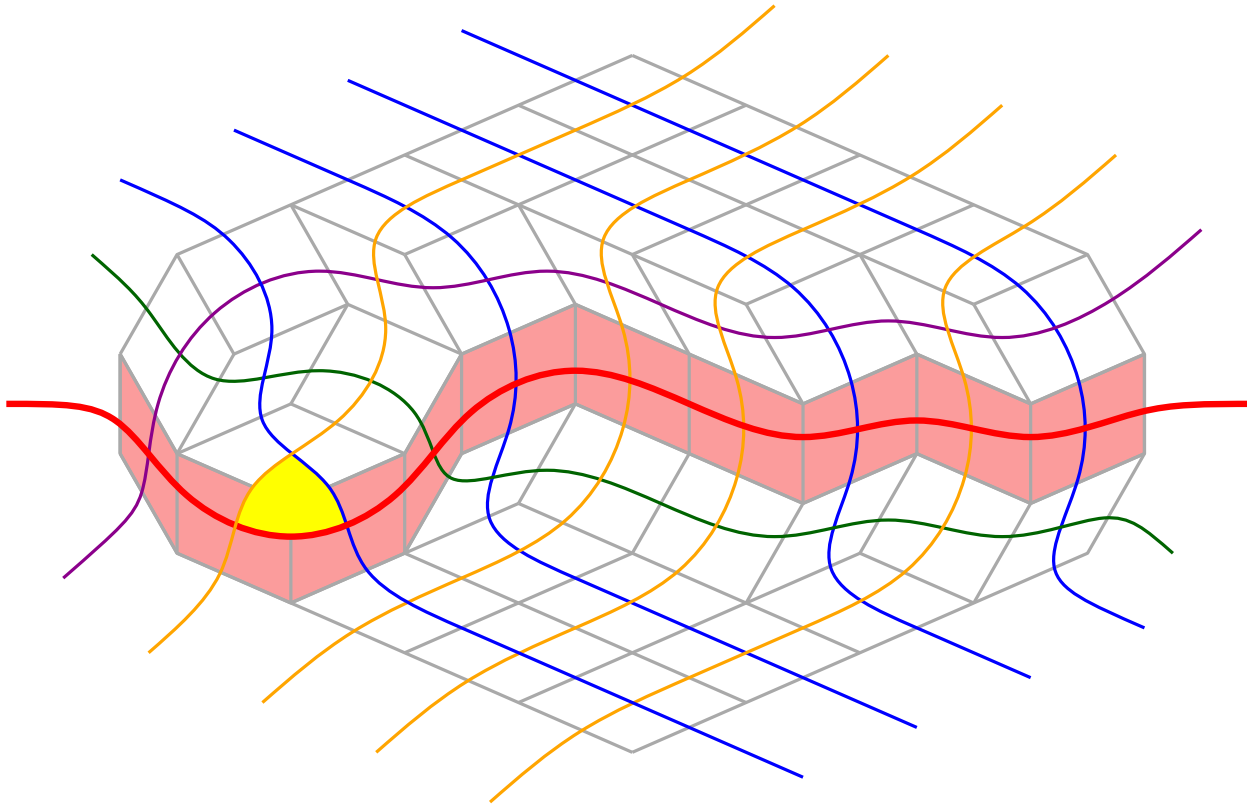
Flips an einzelner Pseudogerade



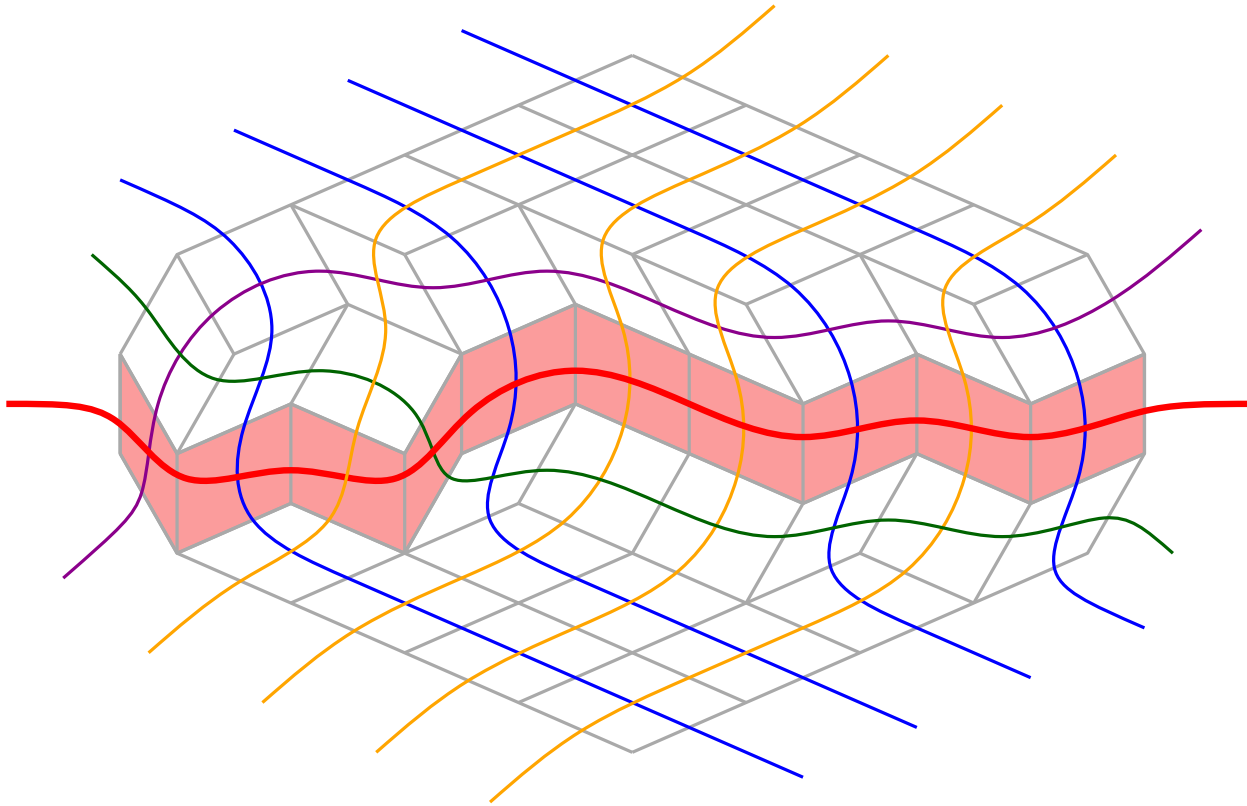
Flips an einzelner Pseudogerade



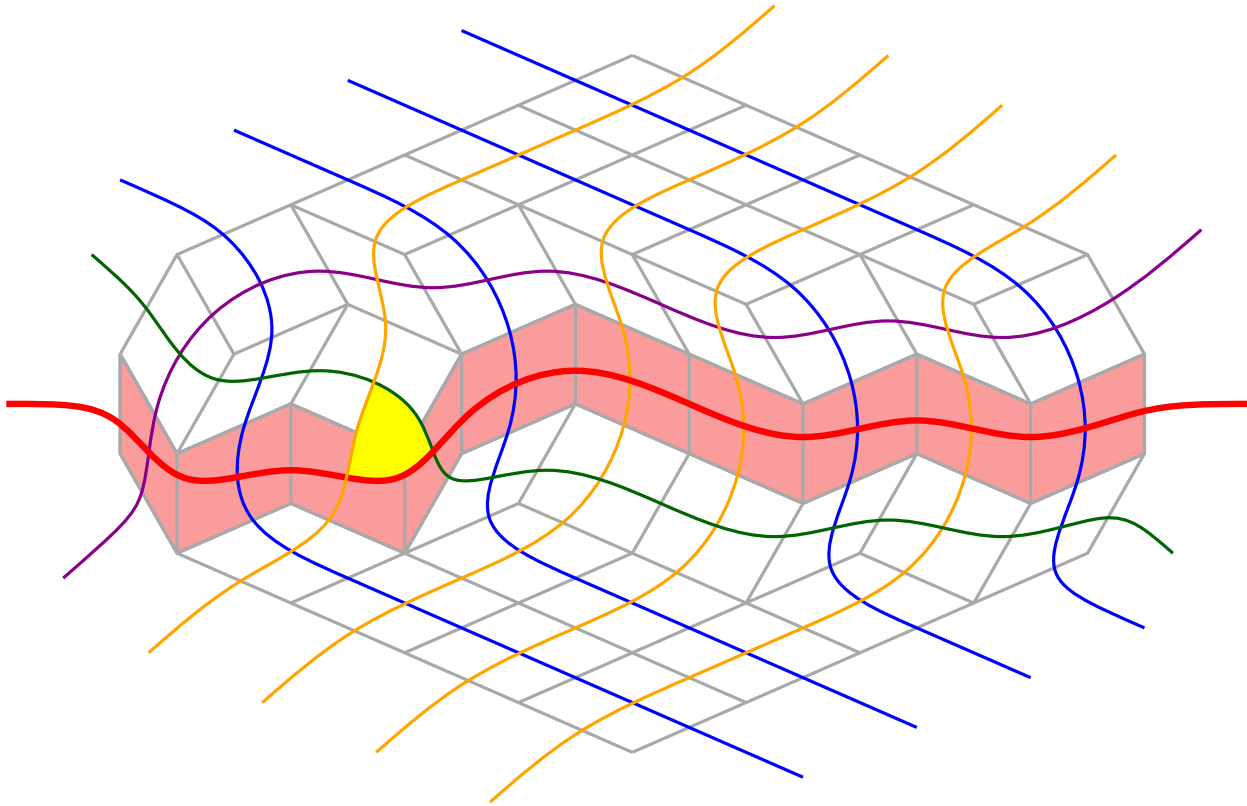
Flips an einzelner Pseudogerade



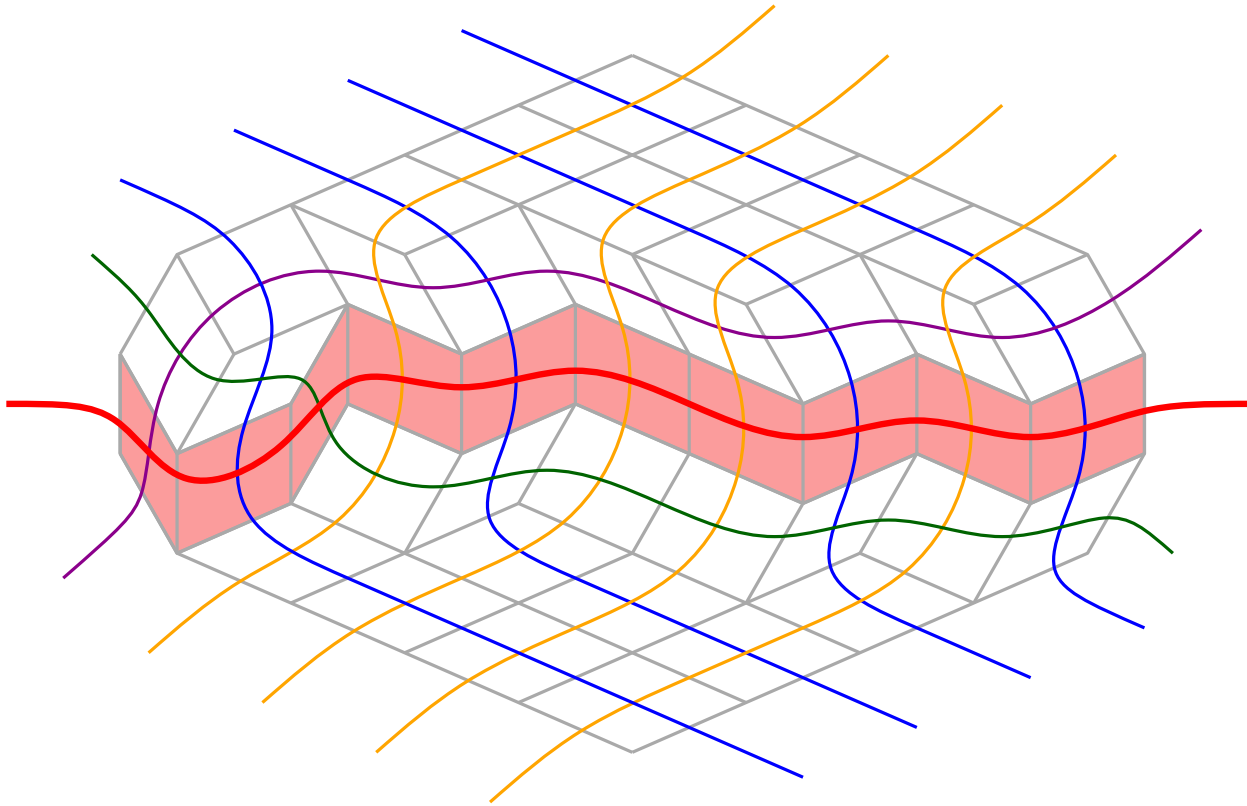
Flips an einzelner Pseudogerade



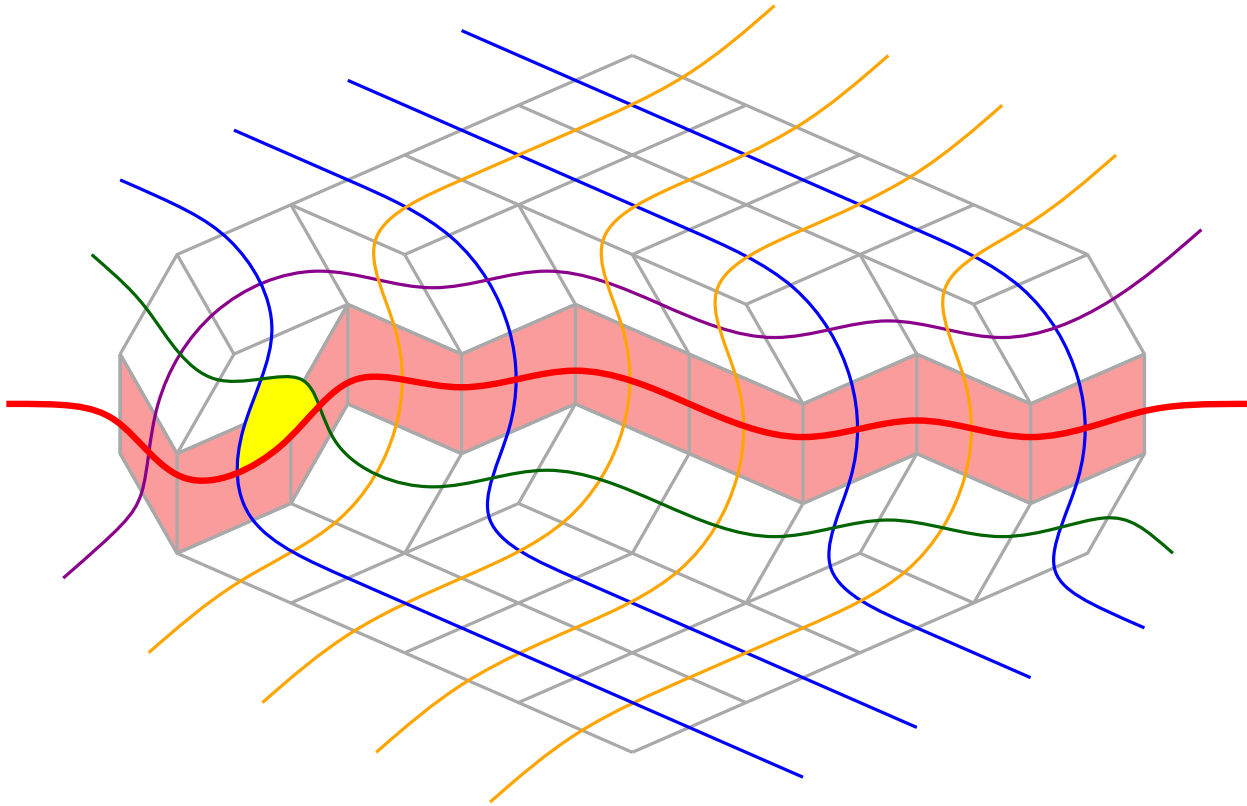
Flips an einzelner Pseudogerade



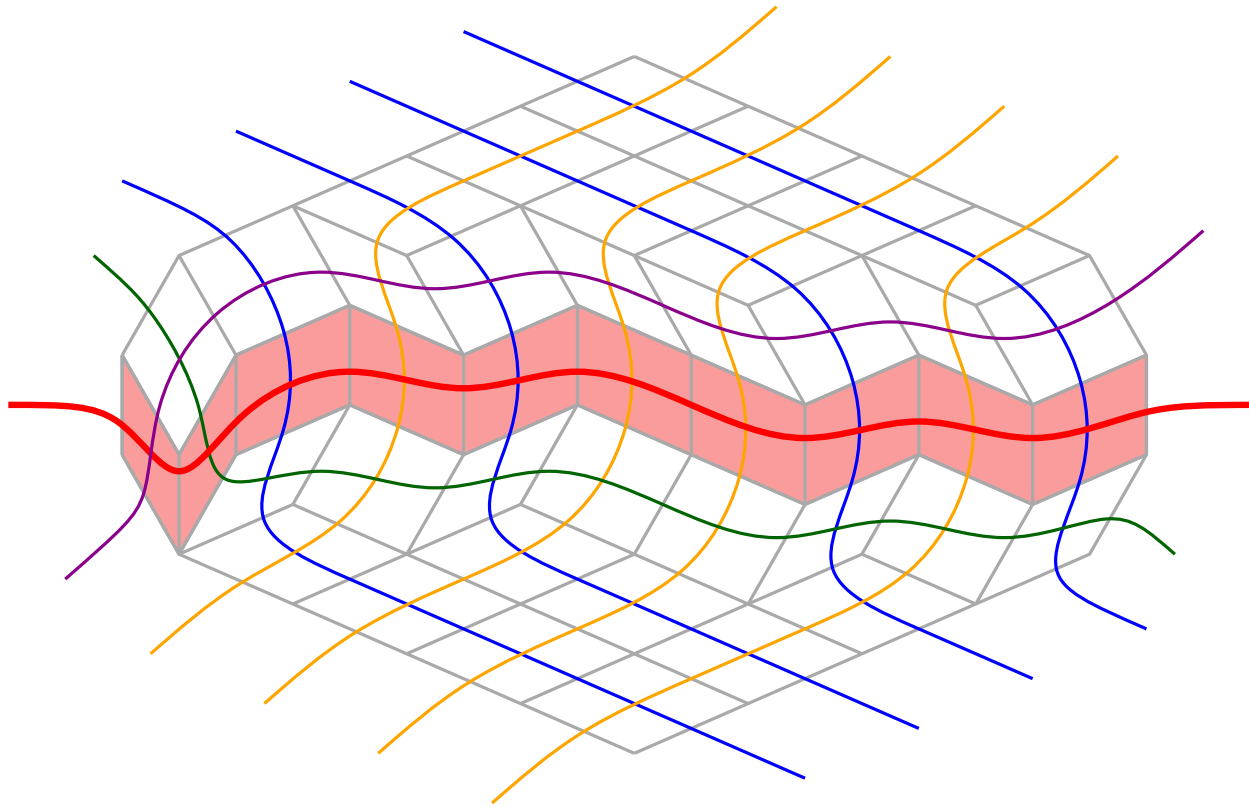
Flips an einzelner Pseudogerade



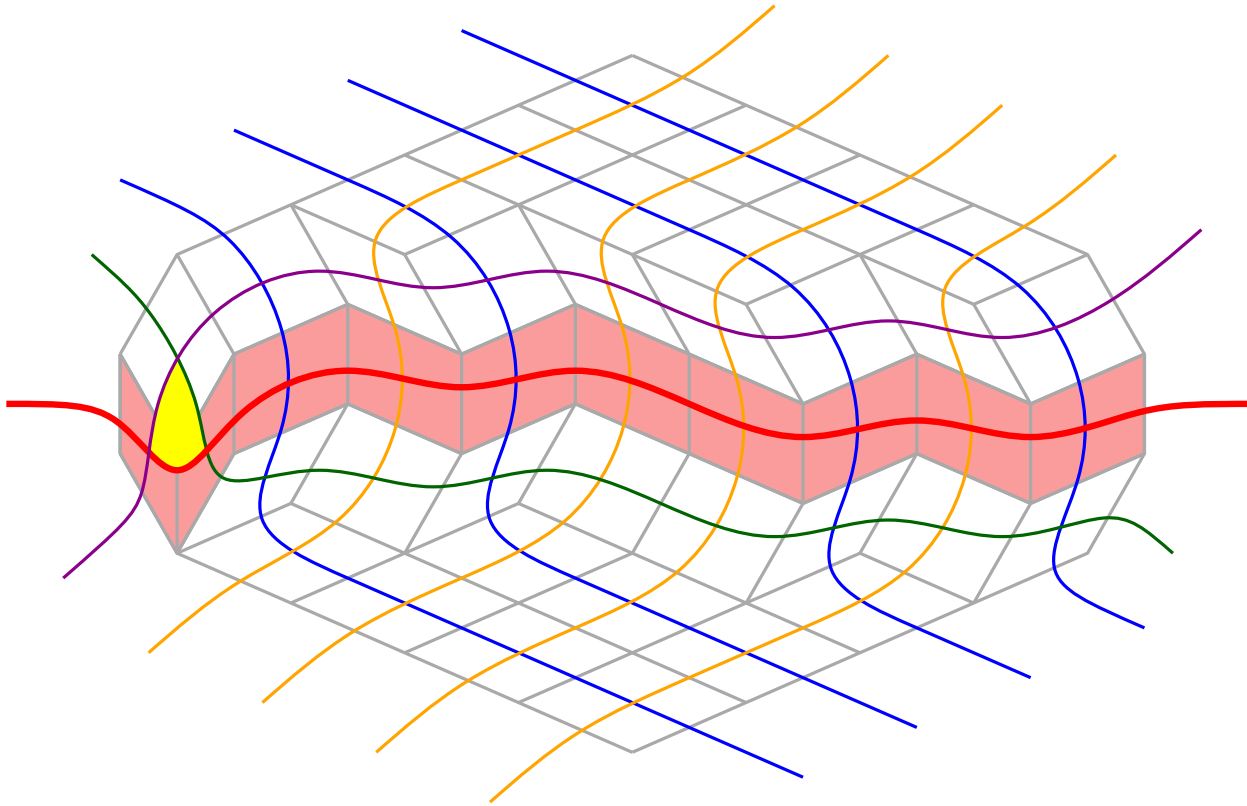
Flips an einzelner Pseudogerade



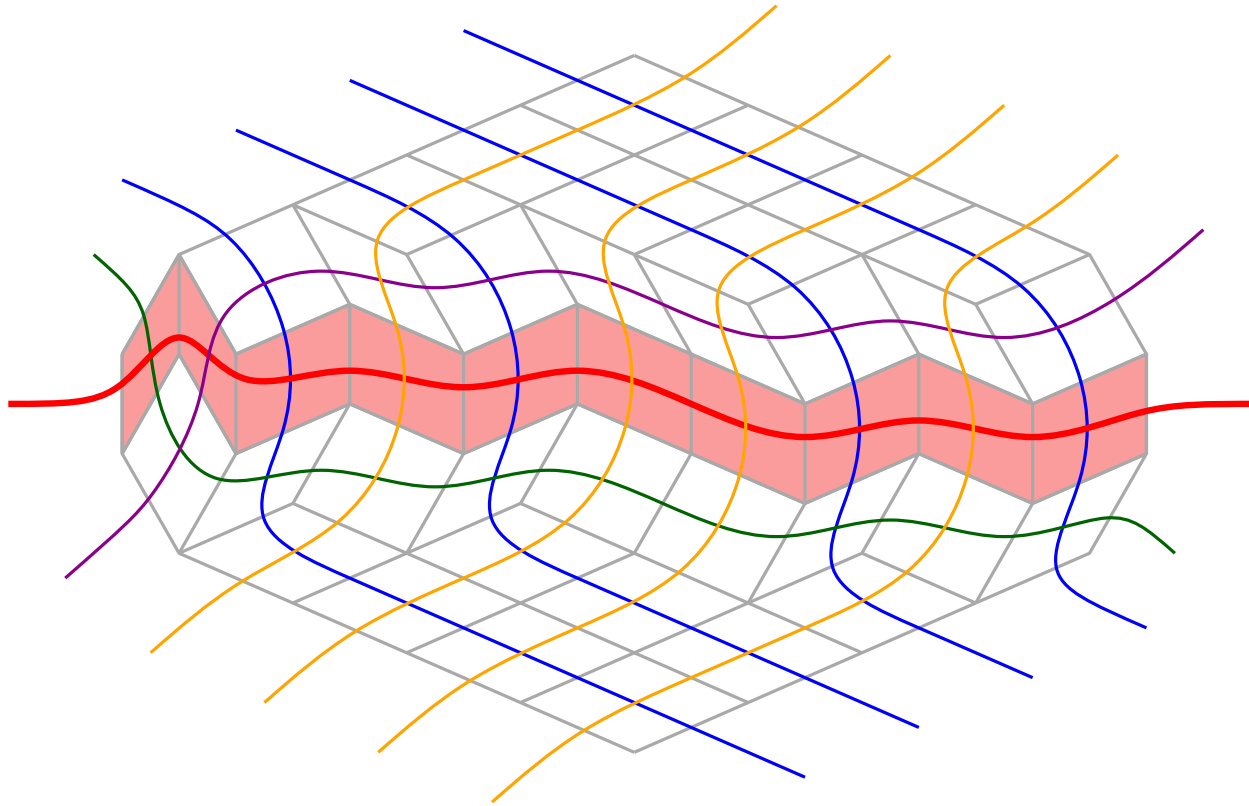
Flips an einzelner Pseudogerade



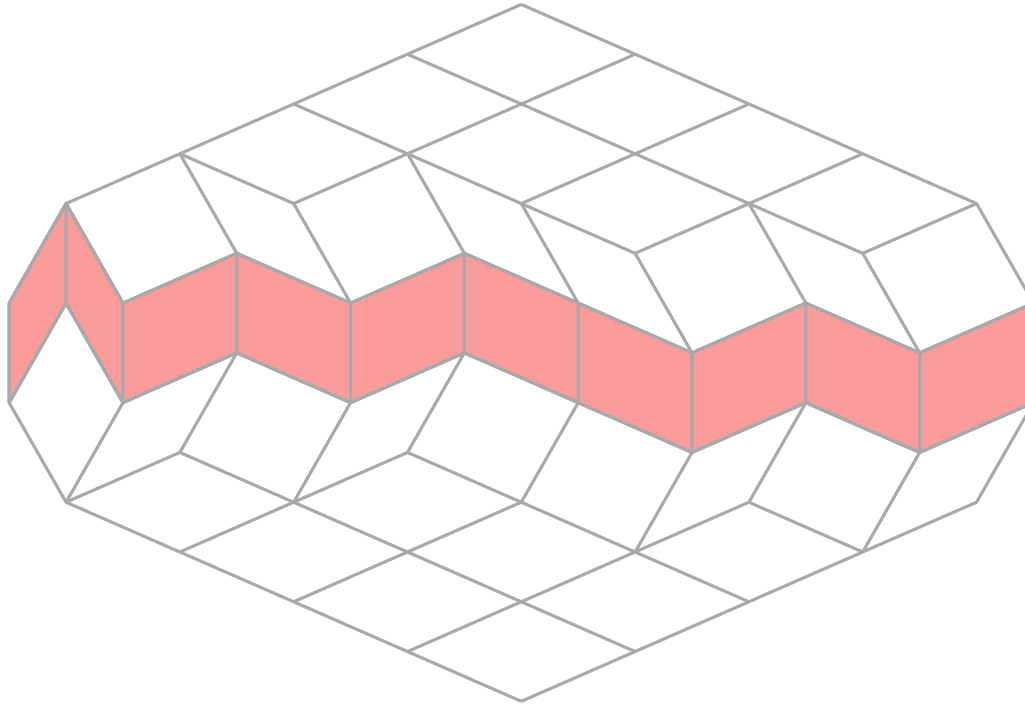
Flips an einzelner Pseudogerade



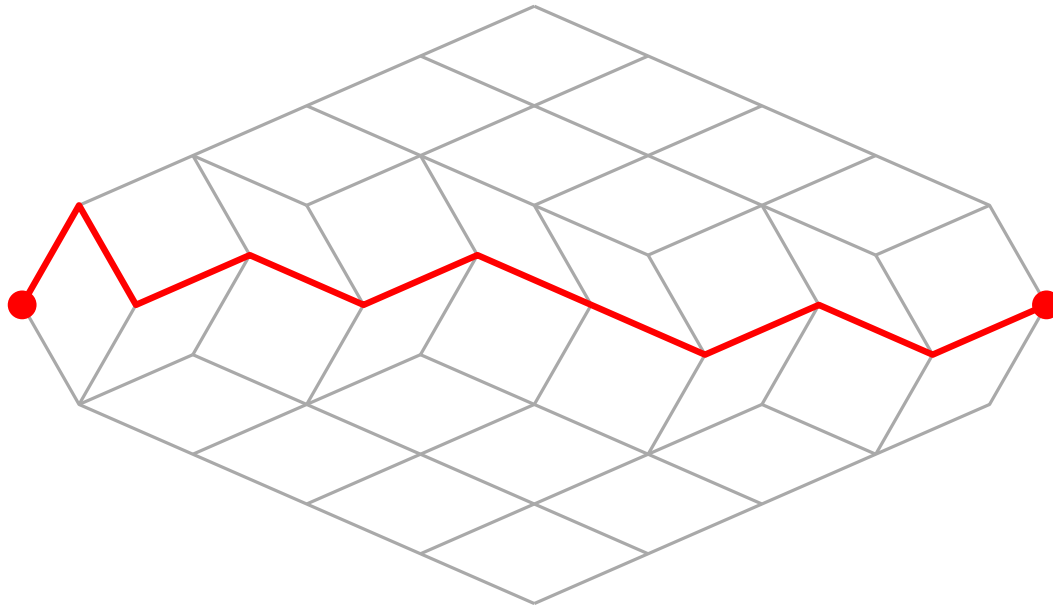
Flips an einzelner Pseudogerade



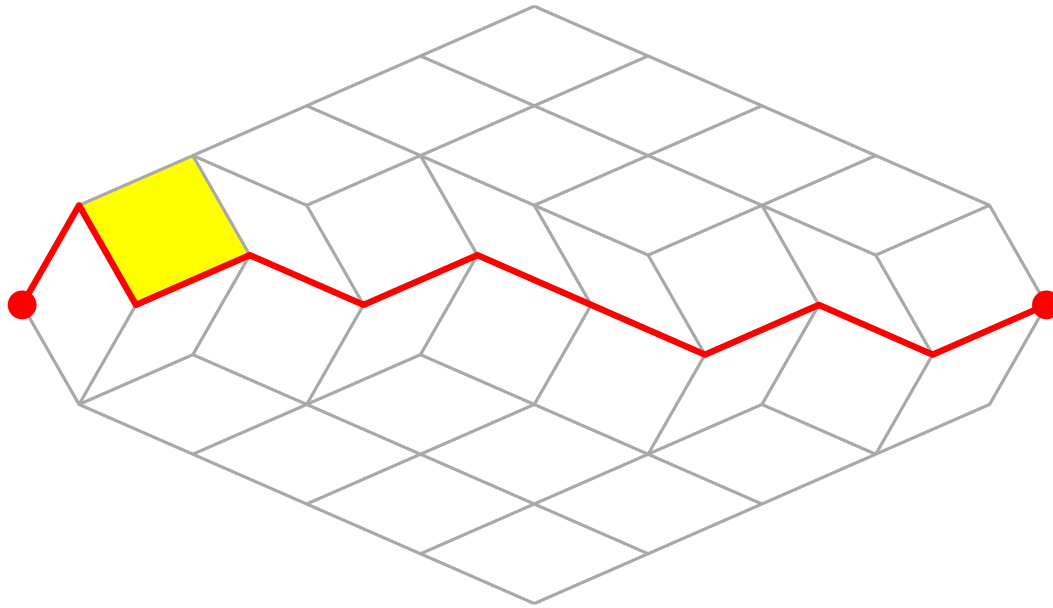
Flips an einzelner Pseudogerade



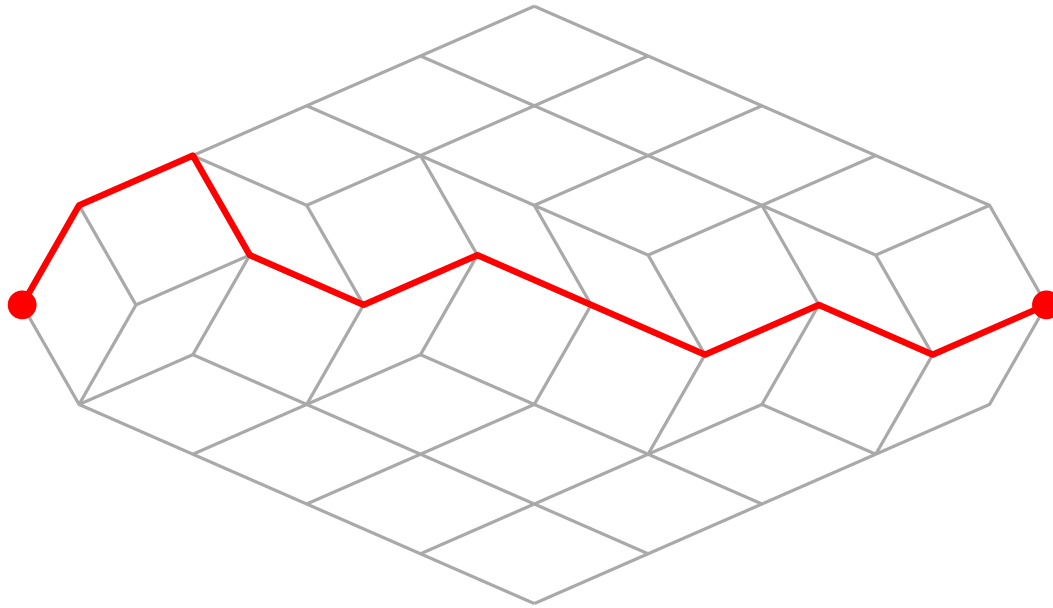
Flips an einzelner Pseudogerade



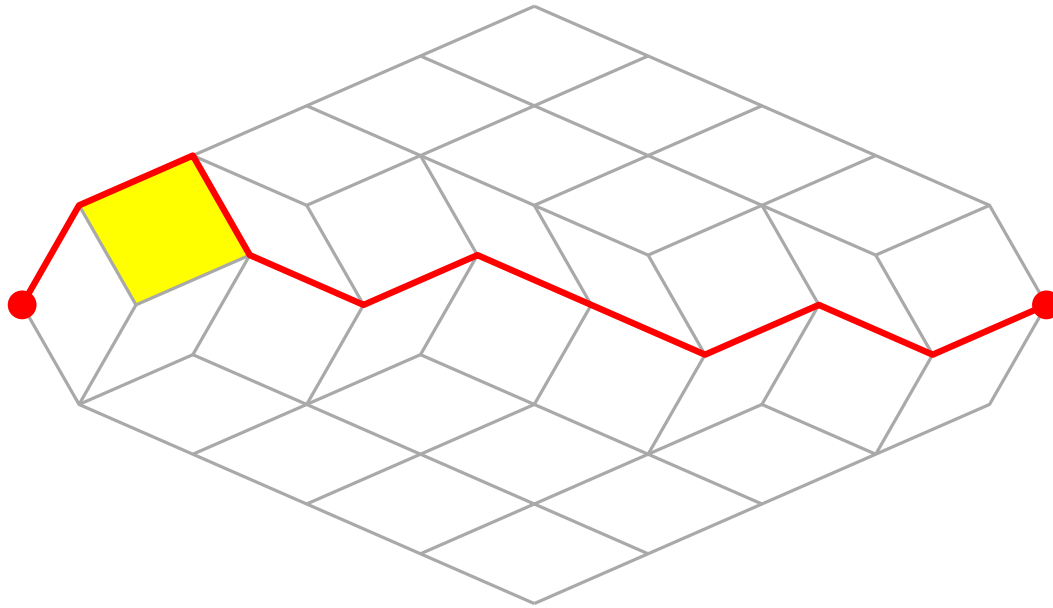
Flips an einzelner Pseudogerade



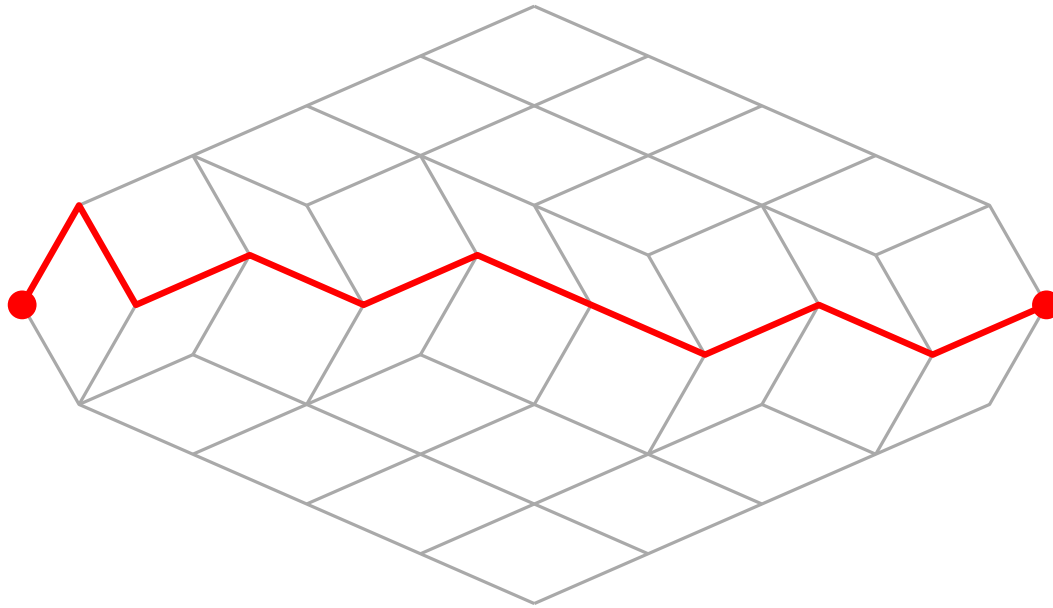
Flips an einzelner Pseudogerade



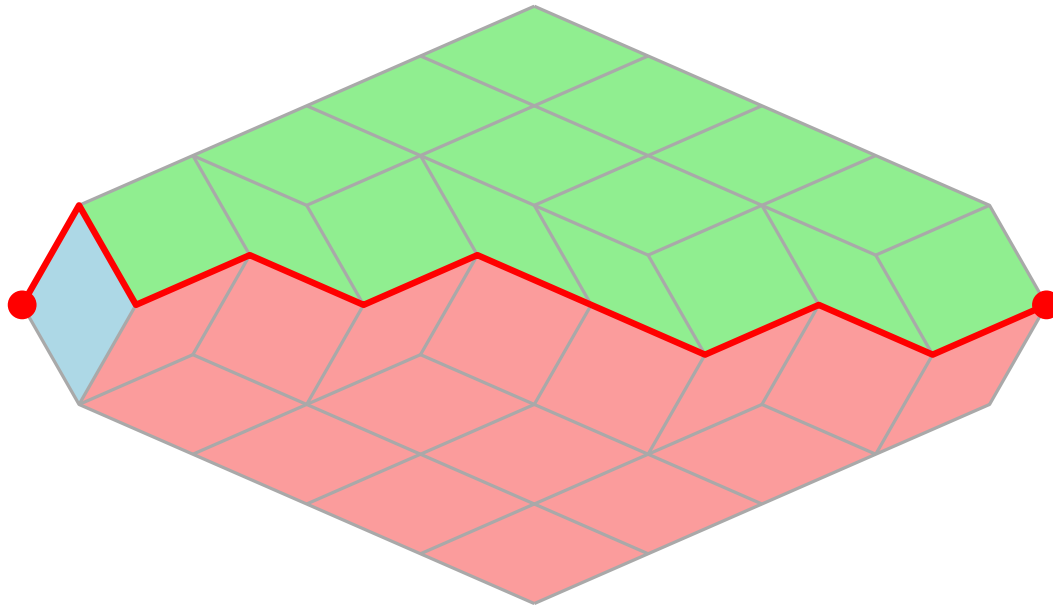
Flips an einzelner Pseudogerade



Flips an einzelner Pseudogerade

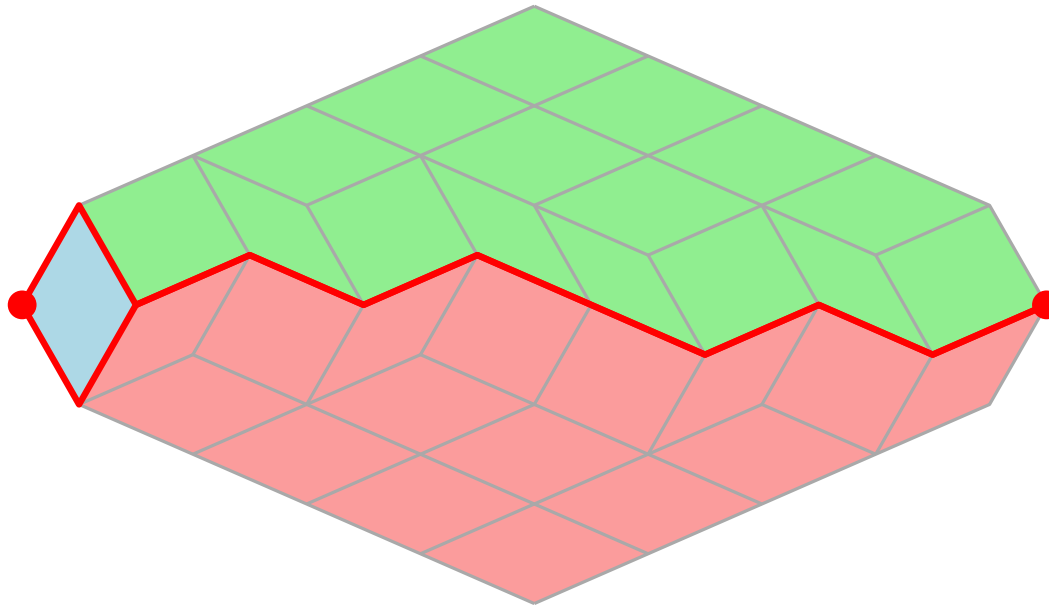


Flips an einzelner Pseudogerade



- Partition der Zustände in zwei Klassen:
 - Pfade **über blauem Rhombus**
 - Pfade **unter blauem Rhombus**

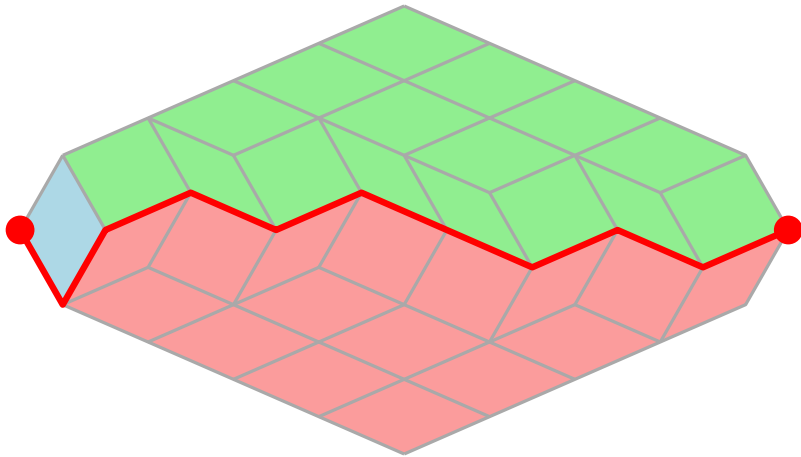
Flips an einzelner Pseudogerade



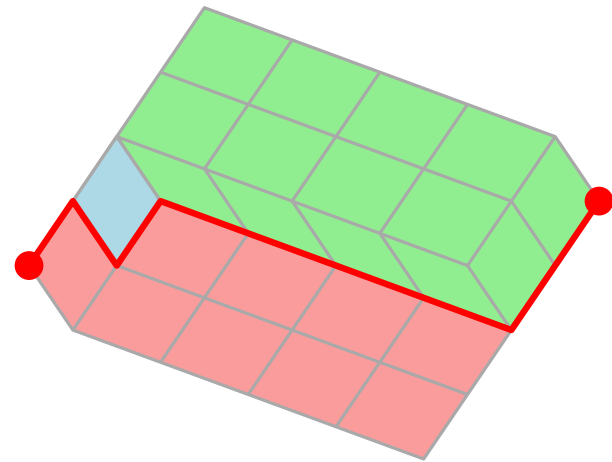
- Partition der Zustände in zwei Klassen:
 - Pfade **über blauem Rhombus**
 - Pfade **unter blauem Rhombus**
- Nur Flip an blauem Rhombus verbindet beide Klassen!

Flips an einzelner Pseudogerade

$r = 5$ Parallelklassen:
(verallgemeinerbar zu $r > 5$)



$r = 4$ Parallelklassen:



- Partition der Zustände in zwei Klassen:
 - Pfade **über blauem Rhombus**
 - Pfade **unter blauem Rhombus**
- Nur Flip an blauem Rhombus verbindet beide Klassen!

Flips an einzelner Pseudogerade

Theorem (R., 2021):

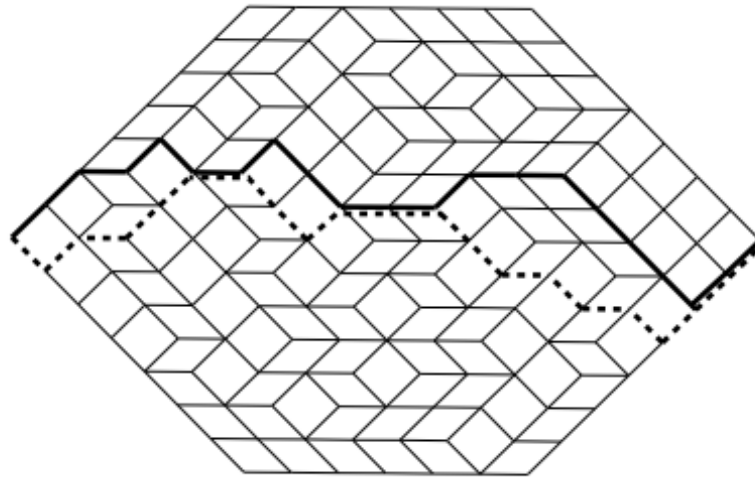
Die Markov-Kette, welche auf verallgemeinerten Pseudogerdarrangements operiert und Dreiecke mit Beteiligung einer ausgezeichneten Parallelklasse flipt, ist

- ... **schnell mischend** bei 3 Parallelklassen, und...
- ... i.A. **nicht schnell mischend** bei 4 oder mehr Klassen.

Aussage für 3 Klassen bekannt aus
(Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Flips an einzelner Pseudogerade

Destainville, 2001: *Mixing times of plane rhombus tilings*



„Nevertheless, the above arguments do not exclude definitively the existence of rare slow fibers, [...]“

Wissen jetzt: „slow fibers“ gibt es tatsächlich!

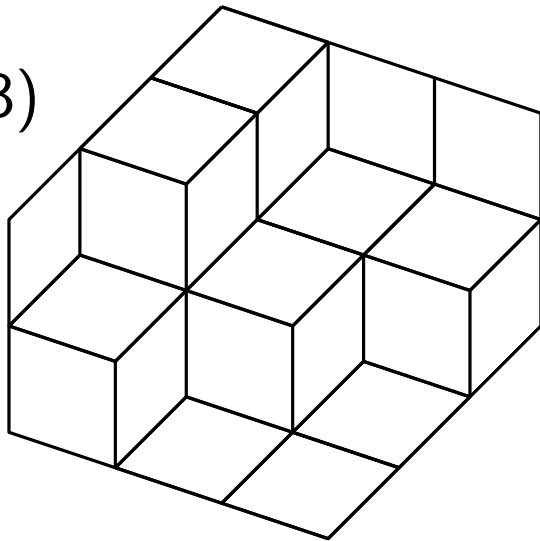
Drei Parallelklassen

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

Drei Parallelklassen

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

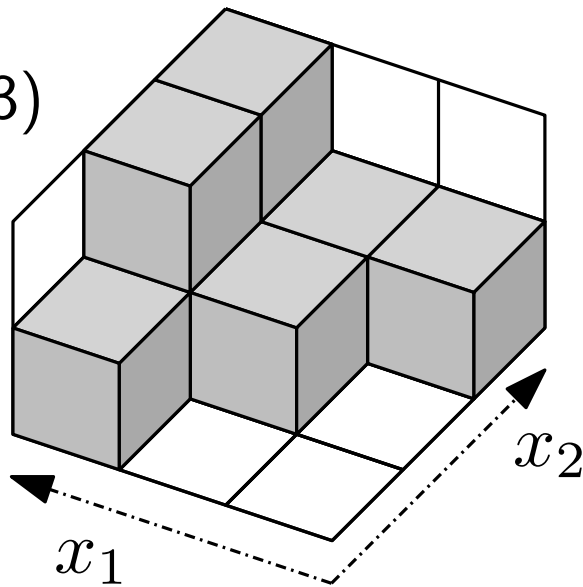
rhombic tiling
of size $(3, 2, 3)$



Drei Parallelklassen

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

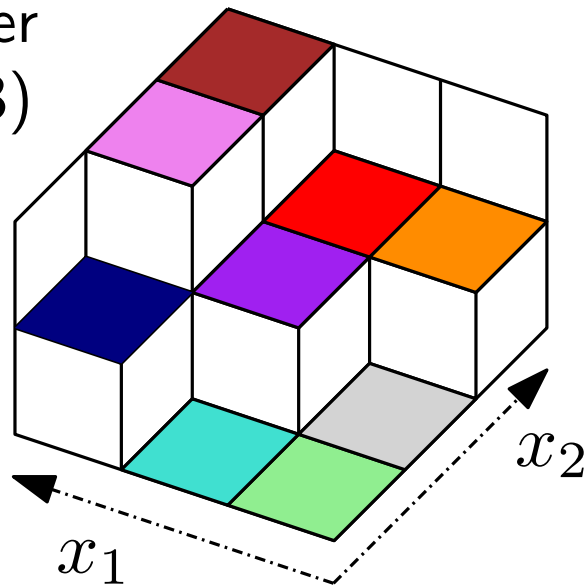
rhombic tiling
of size $(3, 2, 3)$



Drei Parallelklassen

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

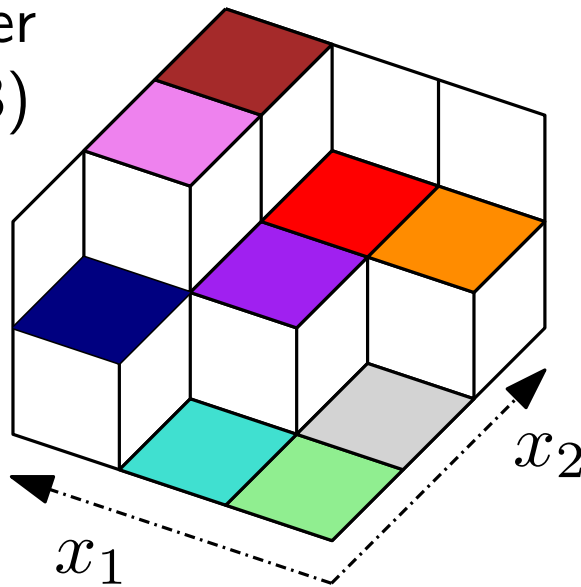
Pflasterung der
Größe $(3, 2, 3)$



Drei Parallelklassen

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

Pflasterung der
Größe (3, 2, 3)



x_2

0	0	1
0	1	1
1	2	2

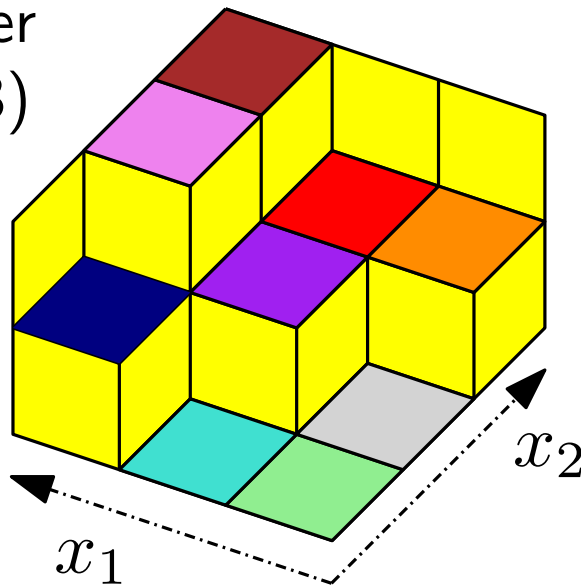
x_1

Plane partition
mit Einträgen
 $h_{i,j} \leq 2$

Drei Parallelklassen

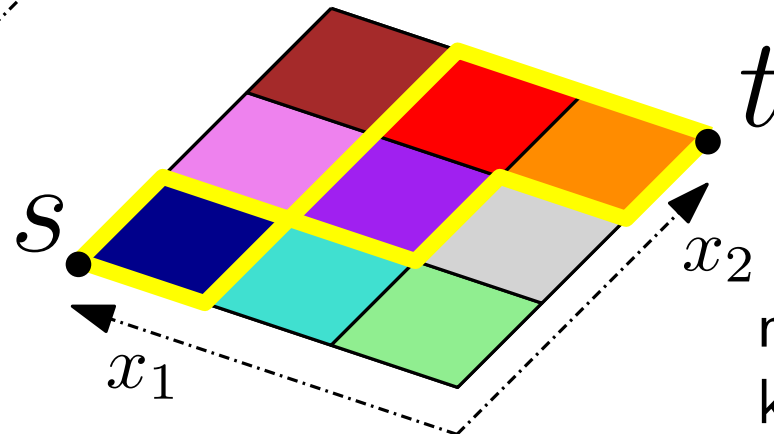
Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

Pflasterung der Größe (3, 2, 3)



$$\begin{array}{c}
 x_2 \rightarrow \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 \\
 1 & 2 & 2
 \end{array} \right] \\
 x_1 \downarrow
 \end{array}$$

Plane partition
mit Einträgen
 $h_{i,j} \leq 2$

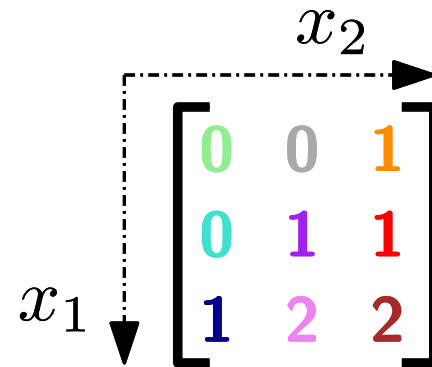
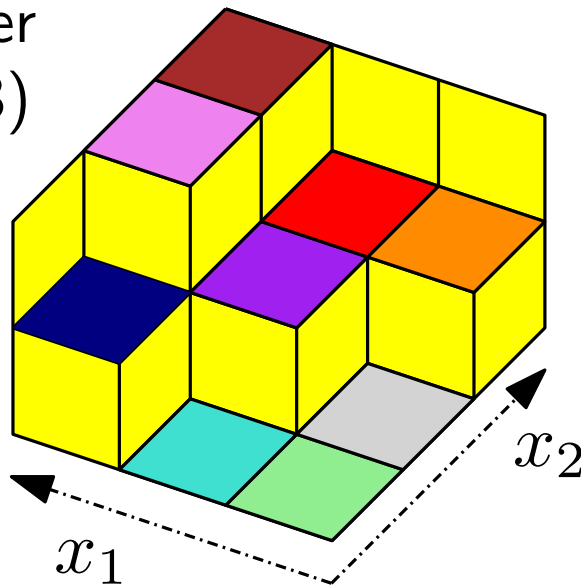


monotone, nicht-kreuzende Pfade

Drei Parallelklassen

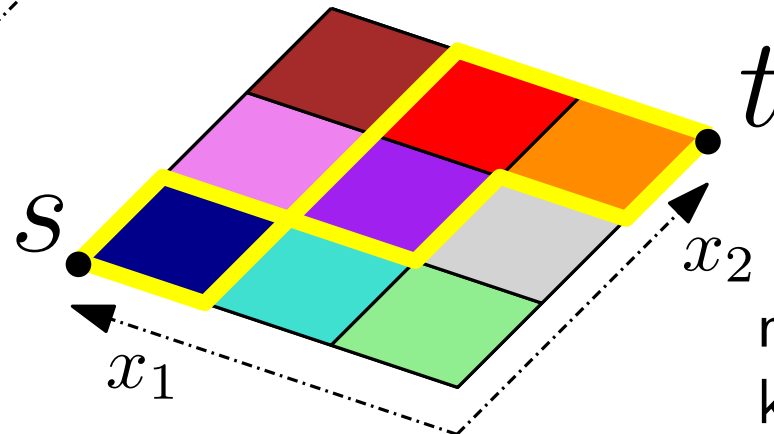
Def: Matrix $[h_{i,j}] \in \mathbb{N}_0^{r \times s}$ heißt *Plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsen.

Pflasterung der Größe (3, 2, 3)



Plane partition mit Einträgen $h_{i,j} \leq 2$

$$\begin{aligned} \min & \sum f_{i,j}(A_{i,j}) \\ \text{s.t. } & A \text{ p.p.}, A_{i,j} \leq h \end{aligned}$$



monotone, nicht-kreuzende Pfade

Drei Parallelklassen

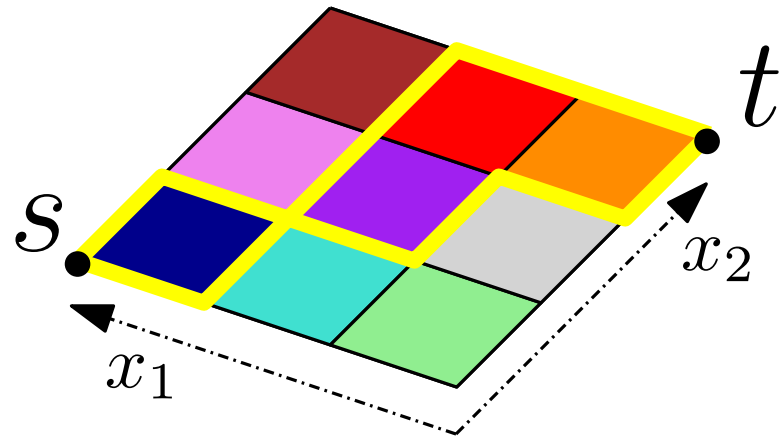
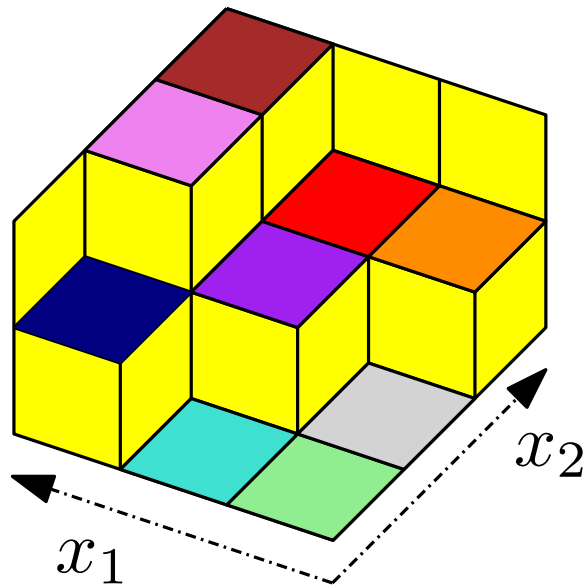
Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.

Drei Parallelklassen

Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

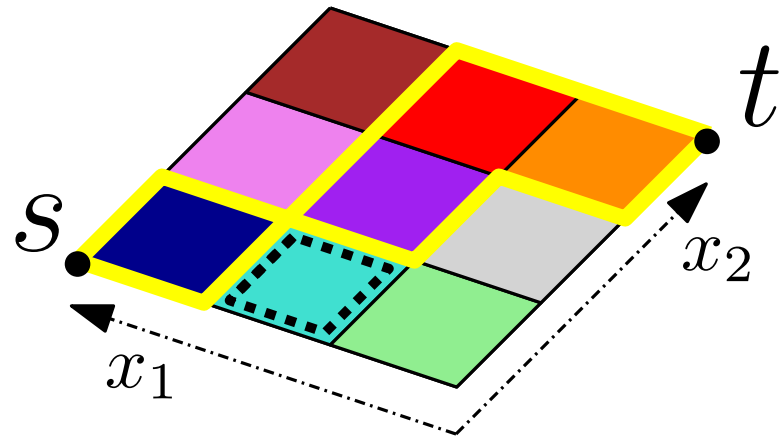
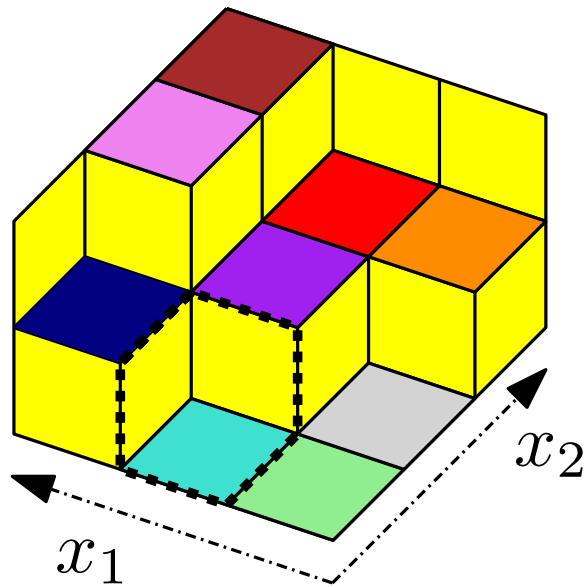
Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.



Drei Parallelklassen

Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

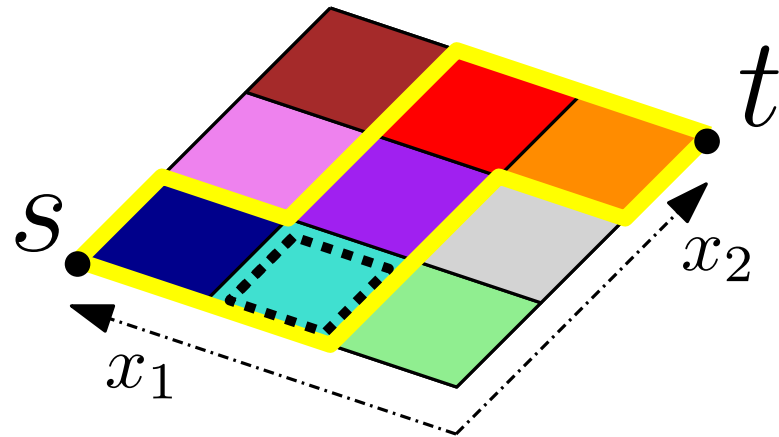
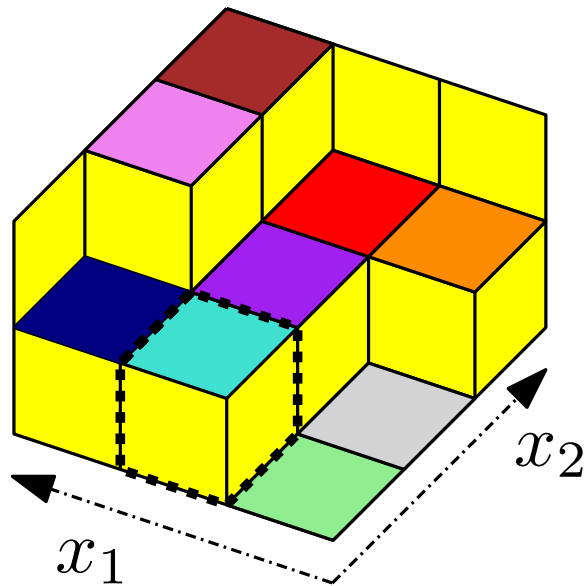
Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.



Drei Parallelklassen

Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.

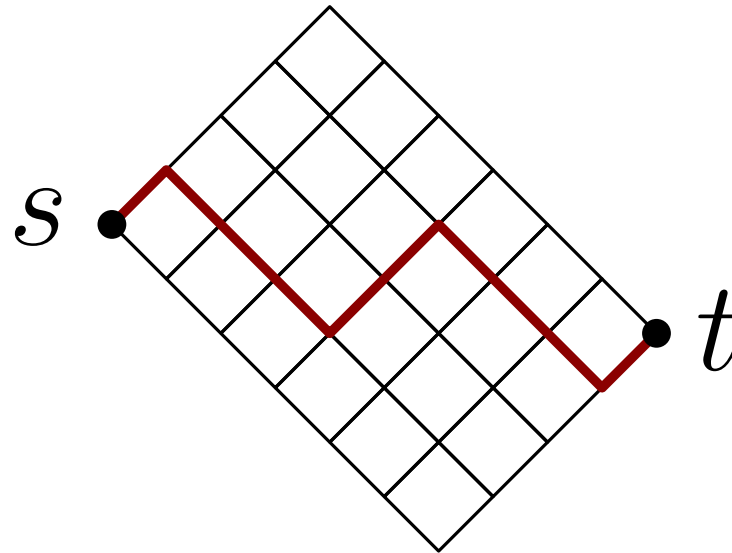


Drei Parallelklassen

Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.

Einfacher Fall: Einzelner s - t -Pfad

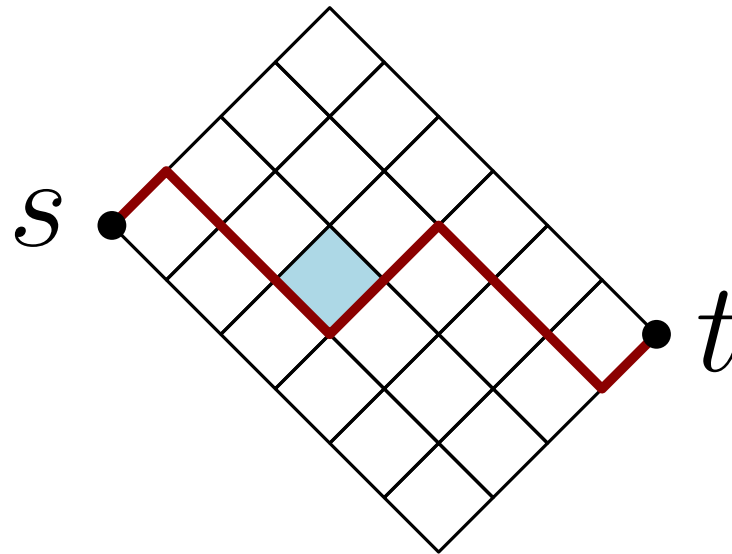


Drei Parallelklassen

Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.

Einfacher Fall: Einzelner s - t -Pfad

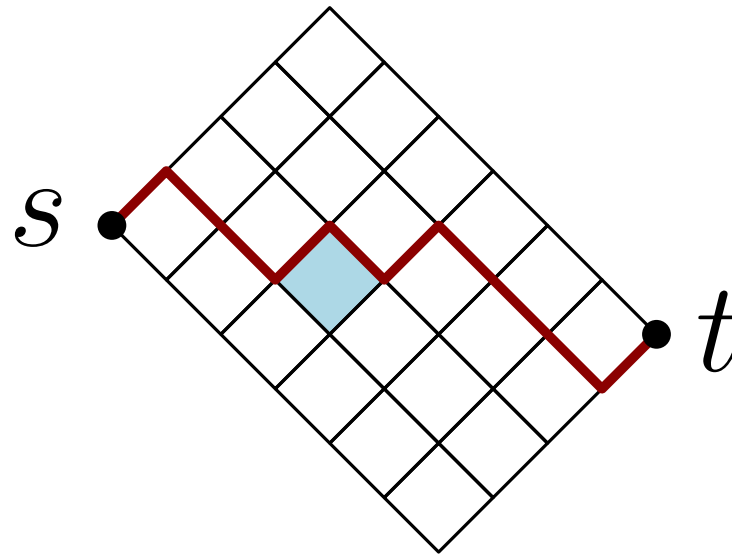


Drei Parallelklassen

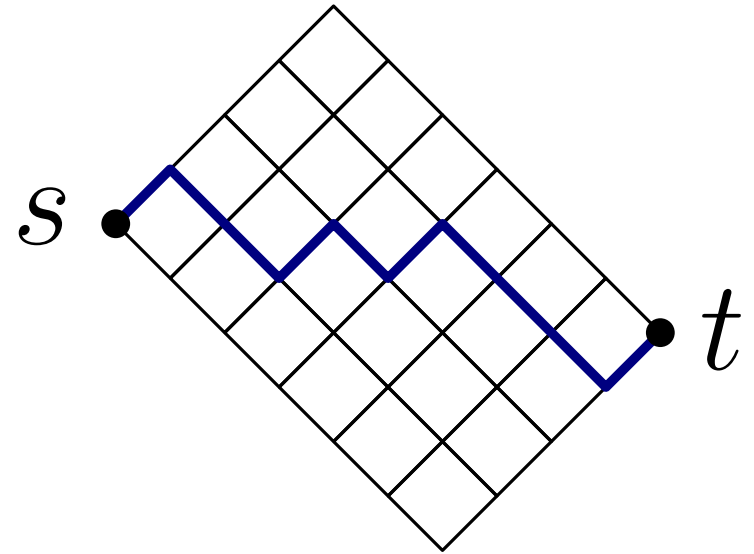
Theorem: (Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Die Markov-Kette, die zufällige Dreiecke in Pseudogeradenarrangements mit 3 Parallelklassen flipt, ist schnell mischend.

Einfacher Fall: Einzelner s - t -Pfad

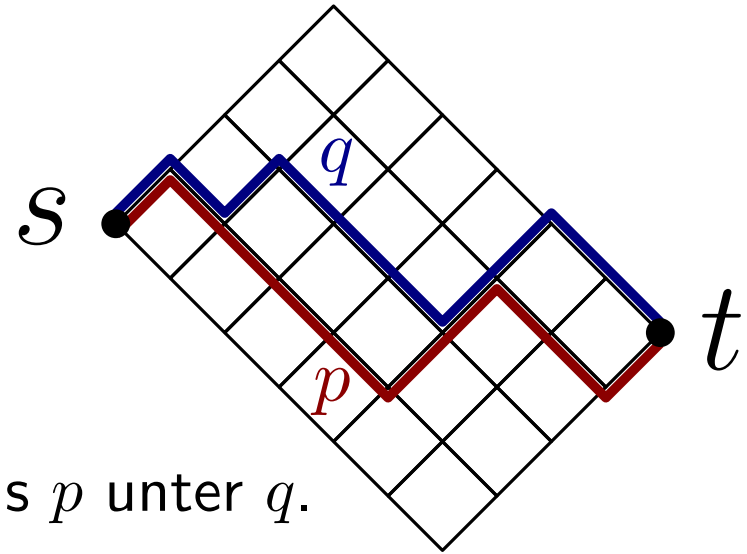


Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

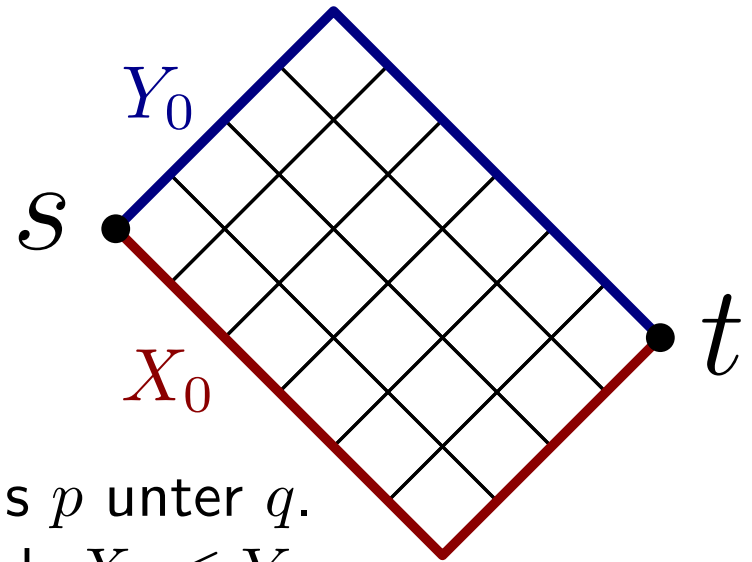
Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .

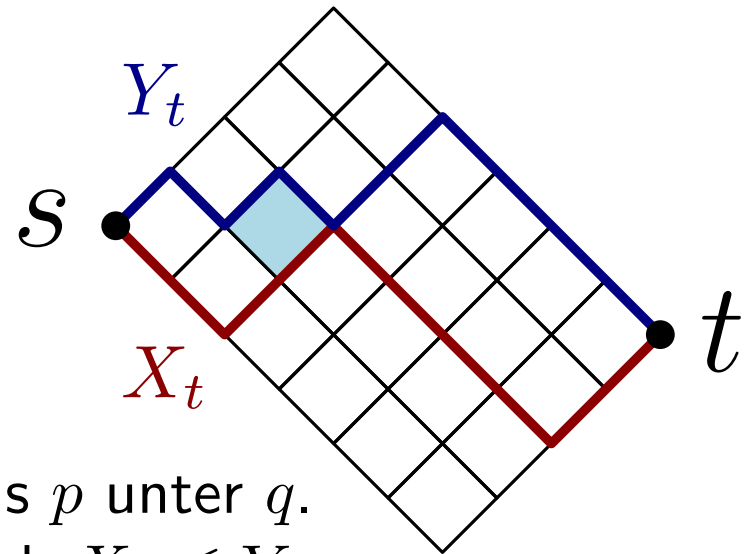
Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .
- X_0 niedrigster Pfad; Y_0 höchster Pfad; $X_0 \leq Y_0$

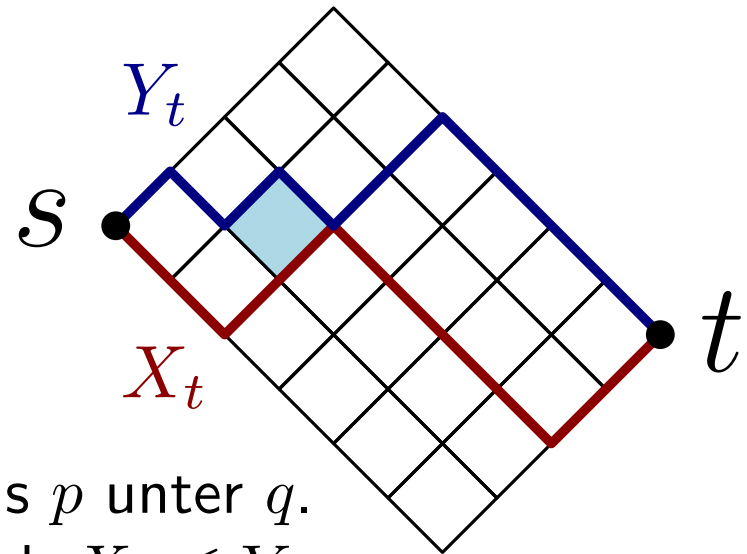
Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .
- X_0 niedrigster Pfad; Y_0 höchster Pfad; $X_0 \leq Y_0$
- Erzeuge (X_{t+1}, Y_{t+1}) aus (X_t, Y_t) durch Wahl derselben Flip-Zelle.

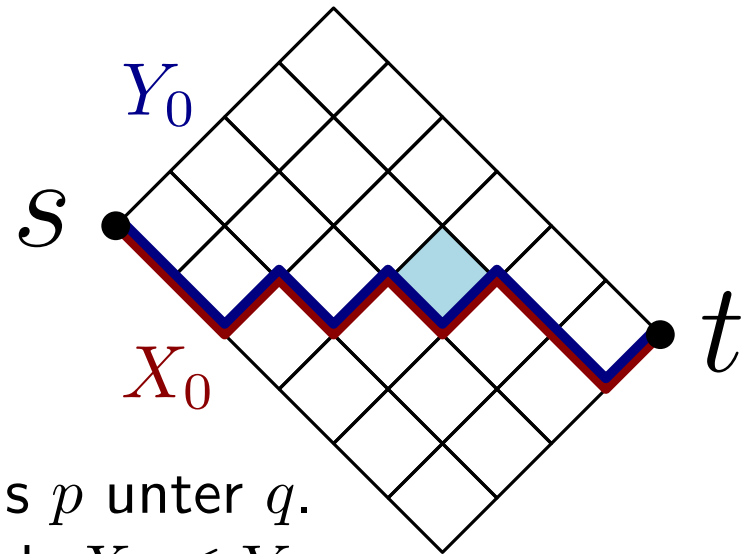
Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .
- X_0 niedrigster Pfad; Y_0 höchster Pfad; $X_0 \leq Y_0$
- Erzeuge (X_{t+1}, Y_{t+1}) aus (X_t, Y_t) durch Wahl derselben Flip-Zelle.
- Eigenschaft $X_t \leq Y_t$ bleibt für alle t erhalten.

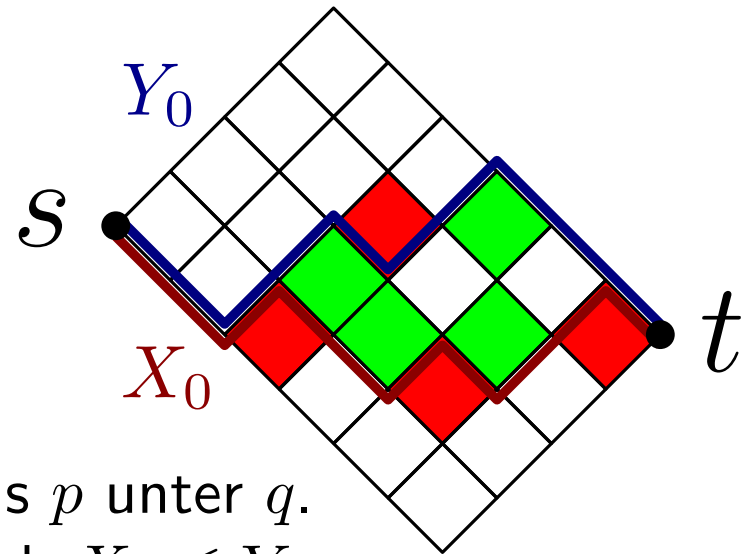
Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .
- X_0 niedrigster Pfad; Y_0 höchster Pfad; $X_0 \leq Y_0$
- Erzeuge (X_{t+1}, Y_{t+1}) aus (X_t, Y_t) durch Wahl derselben Flip-Zelle.
- Eigenschaft $X_t \leq Y_t$ bleibt für alle t erhalten.
- Zufallsvariable *coupling time* $\tau_C := \min\{t : X_t = Y_t\}$

Drei Parallelklassen



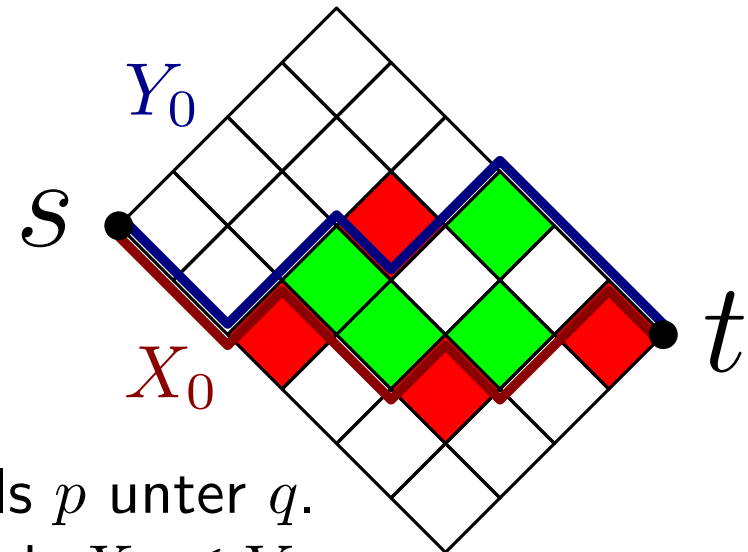
Idee: Monotones Coupling

- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .
- X_0 niedrigster Pfad; Y_0 höchster Pfad; $X_0 \leq Y_0$
- Erzeuge (X_{t+1}, Y_{t+1}) aus (X_t, Y_t) durch Wahl derselben Flip-Zelle.
- Eigenschaft $X_t \leq Y_t$ bleibt für alle t erhalten.
- Zufallsvariable *coupling time* $\tau_C := \min\{t : X_t = Y_t\}$

Abschätzen der erwarteten Änderung der Fläche zwischen X_t und Y_t :

$$\mathbb{E}[\Delta d(X_t, Y_t)] \leq 0 \quad \Rightarrow \text{Obere Schranke an } \mathbb{E}[\tau_C]$$

Drei Parallelklassen



Idee: Monotones Coupling

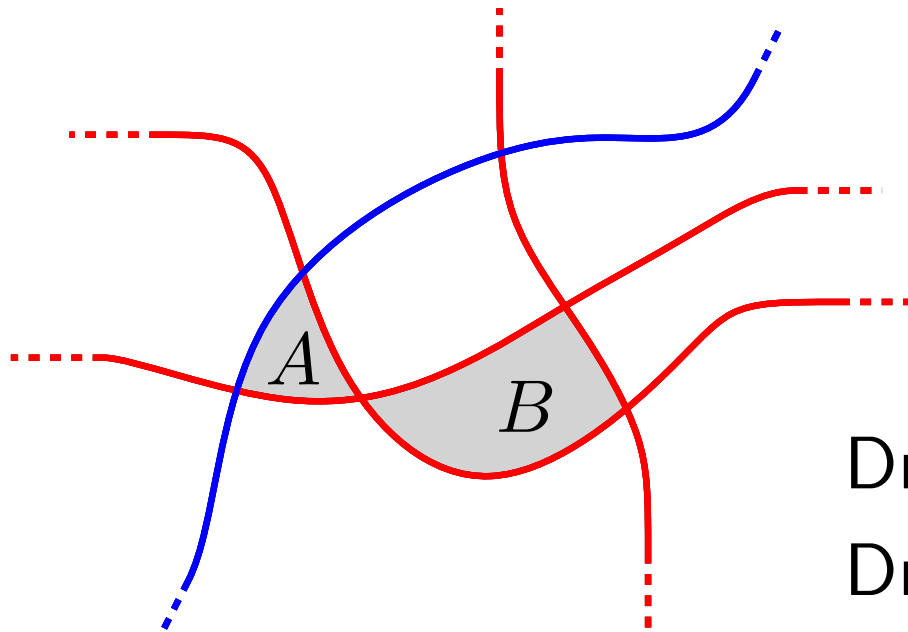
- Partialordnung auf Pfaden: $p \leq q$ falls p unter q .
- X_0 niedrigster Pfad; Y_0 höchster Pfad; $X_0 \leq Y_0$
- Erzeuge (X_{t+1}, Y_{t+1}) aus (X_t, Y_t) durch Wahl derselben Flip-Zelle.
- Eigenschaft $X_t \leq Y_t$ bleibt für alle t erhalten.
- Zufallsvariable *coupling time* $\tau_C := \min\{t : X_t = Y_t\}$

Abschätzen der erwarteten Änderung der Fläche zwischen X_t und Y_t :

$$\mathbb{E}[\Delta d(X_t, Y_t)] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Obere Schranke an } \mathbb{E}[\tau_C]$$

Bisschen Theorie $\implies \tau(\varepsilon) \leq 6 \cdot \mathbb{E}[\tau_C] \left(1 + \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$

Bichromatische Dreiecksvermutung



Dreieck A bichromatisch

Dreieck B monochromatisch

Vermutung:

(Björner, Las Vergnas, Sturmfels, White, Ziegler, 1999)

Jedes echt zweigefärbte Arrangement mit mindestens drei Pseudogeraden enthält ein bichromatisches Dreieck.

¿Preguntas?

