

# Algorithmen zur Erzeugung zufälliger Pseudogeradenarrangements

Dem Institut für Mathematik  
der Technischen Universität Berlin  
vorgelegte

## Masterarbeit

von

**Sandro M. Roch**  
(Matrikelnummer 371629)

Mail: [roch@math.tu-berlin.de](mailto:roch@math.tu-berlin.de)

Erstgutachter:	Prof. Dr. Stefan Felsner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Martin Skutella
Tag der Einreichung:	24. November 2021



# Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 24. November 2021

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Sandro M. Roch', with a stylized flourish at the end.

Sandro M. Roch



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>1</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>3</b>
1.1. Motivation	3
1.2. Pseudogeradenarrangements	5
1.3. Orientierte Arrangements und Drahtdiagramme	7
1.4. Zonotopale Pflasterungen	12
1.5. Signotope und höhere Bruhat Ordnungen	15
<b>2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten</b>	<b>21</b>
2.1. Grundlagen zu Markov-Ketten	21
2.1.1. Basiswissen	21
2.1.2. Schnell mischende Markov-Ketten	22
2.1.3. Schranken an Mischzeit über Eigenwerte	27
2.1.4. Obere Schranken an Mischzeit durch Kopplung	29
2.1.5. Kopplung aus der Vergangenheit	34
2.1.6. Schranken an Mischzeit durch Flaschenhals	36
2.1.7. Obere Schranken an Mischzeit durch Stauung	38
2.2. Erzeugung einer hexagonalen Rhombenpflasterung	39
2.2.1. Abschätzung von Kopplungszeiten durch Abstandsfunktion	39
2.2.2. Markov-Kette auf Pfadsystemen	40
2.3. Erzeugung einer neuen Klasse	44
2.3.1. Verallgemeinerte Markov-Kette auf Pfadsystemen	45
2.3.2. Erzeugung einer Klasse mittels Dynamischer Programmierung	49
2.4. Markov-Ketten auf Arrangements	50
2.4.1. Flippen zufälliger Dreiecke	50
2.4.2. Neueinfügungen zufälliger Pseudogeraden	52
2.5. Optimale Plane Partitions	54
<b>3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements</b>	<b>57</b>
3.1. Zählen von hexagonalen Rhombenpflasterungen	57
3.2. Exponentielle Schranken an Anzahl einfacher Arrangements der Ordnung $n$	59
3.3. Zählen und Erzeugung von einfachen Permutationssequenzen	61
3.3.1. Edelman-Greene-Bijektion	62
3.3.2. Zählen und Erzeugung von Standard-Young-Tableaus	65

*Inhaltsverzeichnis*

<b>3.3.3. Erzeugung einfacher Arrangements mittels Verwerfungsmethode</b>	<b>69</b>
<b>4. Fazit und offene Fragen</b>	<b>75</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>

# Kurzfassung

*Pseudogeradenarrangements* (engl. *pseudoline arrangements*) sind Anordnungen von  $n$  Kurven in der Ebene, welche sich paarweise genau einmal schneiden. Für deren Anzahl sind nur exponentielle Schranken bekannt (Vgl. [FV01], [DM20]). Diese Arbeit widmet sich der Frage, wie Pseudogeradenarrangements gezählt und zufällig mit uniformer Verteilung erzeugt werden können.

Basierend auf [FW01] werden zunächst verschiedene verwandte Strukturen aufgezeigt: Arrangements lassen sich als *Drahtdiagramme* (engl. *wiring diagrams*) darstellen, durch *zulässige Blocksequenzen* (engl. *allowable sequences*) oder durch *Schnittfolgensysteme* (engl. *local sequences of unordered switches*) kodieren und stehen mit *Zonotopalen Pflasterungen* (engl. *zonotopal tilings*) in Bijektion. Als Beitrag dieser Arbeit werden diese Verbindungen für Arrangements verallgemeinert, welche aus *Klassen* von sich untereinander nicht schneidenden Kurven bestehen.

Markov-Ketten stellen ein generisches Werkzeug zur Erzeugung zufälliger Instanzen kombinatorischer Strukturen dar. Es wird [LPW09] und [Gur16] folgend ein Literaturüberblick über die Theorie der Mischzeit und über gängige Techniken zu deren Abschätzung gegeben. Resultate aus [LRS95] werden wiedergegeben, die zeigen, dass zufällige Dreiecksflips auf Arrangements bestehend aus drei Klassen schnell mischen. Heuristisch wird in [Des01] nahegelegt, dass dies auch für mehr als drei Klassen gilt. Wir zeigen, dass dies zumindest unter der Einschränkung nicht gilt, dass nur Dreiecke mit Beteiligung einer bestimmten Klasse geflippt werden.

Arrangements aus drei Klassen stehen in Bijektion mit *Plane Partitions*. Diese können mit einer Formel von MacMahon gezählt werden (Vgl. [Aig01], [Mac16] § 495). Auf der Menge der Plane Partitions definieren wir ein Optimierungsproblem und lösen es durch Rückführung auf das Finden eines kürzesten Pfades. Ganz ähnlich führen wir das zufällige Einfügen einer neuen Klasse in ein bestehendes Arrangement auf das Problem eines zufälligen Pfades zurück. Dies ermöglicht eine Markov-Kette, die in jedem Schritt eine Klasse aus dem Arrangement löscht und zufällig wieder einfügt.

Pseudogeradenarrangements sind Äquivalenzklassen sogenannter *Sortiernetzwerke*, die über die *Edelman-Greene-Bijektion* mit *Standard-Young-Tableaus* in Bijektion stehen (Vgl. [Fel01], [AHRV07]). Wir diskutieren den Ansatz, mittels der *Verwerfungsmethode* (engl. *rejection sampling*) aus zufälligen Tableaus zufällige Arrangements zu erzeugen.



# 1. Einführung

## 1.1. Motivation

Man stelle sich ein Zimmer vor, dessen Grundriss einem regelmäßigen  $2n$ -Eck mit einer Seitenlänge von einem Meter entspricht, etwa ein Stockwerk eines Turmes. Zur Pflasterung des Bodens sollen nur rautenförmige Fliesen mit Seitenlängen von ebenfalls einem Meter eingesetzt werden. Wie viele Möglichkeiten einer solchen Pflasterung bestehen? Beispielsweise zeigt Abb. 1.1 die beiden möglichen Pflasterungen eines hexagonalen Zimmers und außerdem eine der vielzähligen möglichen Pflasterungen eines tetradekagonalen, also vierzehneckigen Zimmers. Kann ein Algorithmus helfen, eine solche Pflasterung zufällig zu erzeugen, sodass jede mögliche Pflasterung zu gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird?

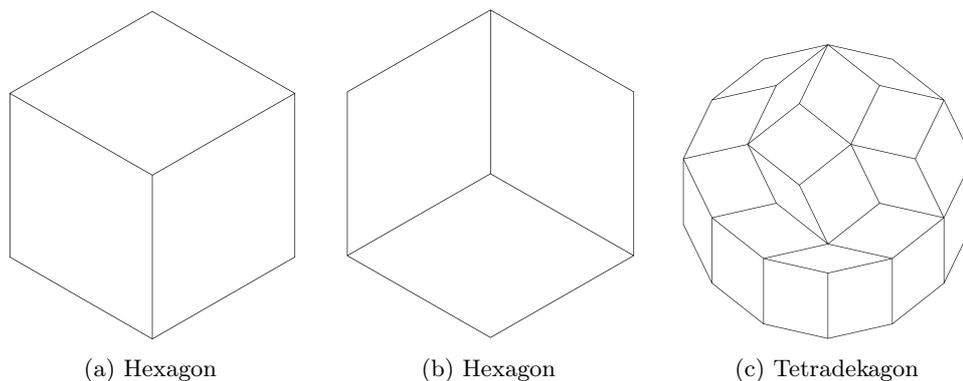


Abbildung 1.1.: Beispiele für Pflasterungen mittels Rauten

Die Untersuchung der Pflasterungen führt auf natürliche Weise zum Studium sogenannter *Pseudogeradenarrangements* (dt. „Anordnungen von Pseudogeraden“). Dazu betrachtet man in den Pflasterungen Streifen parallel zueinander laufender Fugen und verbindet sie durch Linien, wie in Abb. 1.2 beispielhaft dargestellt. Die als *Pseudogeraden* bezeichneten Linien besitzen die Eigenschaft, dass sich je zwei in genau einem Punkt kreuzen. Da dies für jede Pflasterung gilt, ist dadurch die Brücke von einer geometrisch anschaulichen zu einer mathematisch besser greifbaren, kombinatorischen Struktur geschlagen. Diese Arbeit widmet sich daher der Anzahl und Zufallserzeugung solcher Pseudogeradenarrangements.

## 1. Einführung

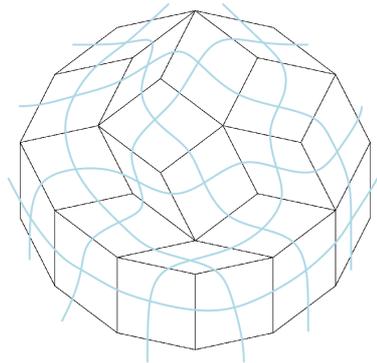


Abbildung 1.2.: Von Pflasterungen zu Pseudogeradenarrangements

Die zufällige Erzeugung dieser Pflasterungen findet Anwendung in der Statistischen Physik bei der Untersuchung von Quasikristallen (Vgl. [Coc00](#)). Pflasterungen mit ausgeprägten Symmetrien erinnern an Islamische Kunst. So finden sich Rhomben beispielsweise in *Sechsstern-Kacheln*, siehe Abb. [1.3](#). Innermathematische Motivation ergibt sich durch Anwendung von Statistik auf zufällige Pseudogeradenarrangements. Dadurch können Durchschnittswerte einiger Eigenschaften wie beispielsweise die Anzahl der vorkommenden Dreiecke bestimmt werden.



Abbildung 1.3.: Fenster im Topkapı-Palast, Istanbul, Türkei <sup>1</sup>

Im Verlaufe dieses Kapitels werden der Begriff eines Pseudogeradenarrangements formalisiert, verschiedene verwandte Strukturen eingeführt und Verbindungen zwischen diesen aufgezeigt. Kapitel 2 beschäftigt sich mit deren zufälligen Erzeugung mittels Markov-Ketten. Schließlich werden in Kapitel 3 die Anzahl von Pseudogeradenarrangements untersucht und weitere Methoden der zufälligen Erzeugung behandelt.

---

<sup>1</sup>Die gelben Rhomben wurden zwar künstlich in das Foto eingezeichnet, doch fügen sie sich passend in das Gesamtmuster ein.

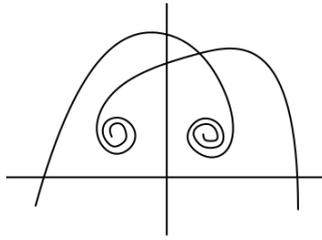


Abbildung 1.4.: Kein Pseudogeradenarrangement

## 1.2. Pseudogeradenarrangements

Pseudogeradenarrangements wurden erstmals 1926 von Friedrich Levi<sup>2</sup> beschrieben [Lev26]. Weitere bedeutende Fortschritte erbrachten unter anderem Gerhard Ringel [Rin56] und Branko Grünbaum [Grü72]. Dieses einführende Kapitel orientiert sich hauptsächlich an [FW01].

**Definition 1.1** (Variante A). Ein *Pseudogeradenarrangement* der Ordnung  $n$  ist eine Familie injektiver stetiger Kurven  $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \|f_i(t)\| = \infty,$$

von denen sich jeweils zwei in genau einem Punkt schneiden. Zwei Pseudogeradenarrangements sind identisch, wenn sie durch einen Homöomorphismus ineinander überführbar sind.

Die Forderung der „Flucht ins Unendliche“ ist erforderlich, um Instanzen wie die in Abb. 1.4 gezeigte auszuschließen. Hier „enden“ zwei der Kurven in unendlichen Spiralen. Eine mathematisch geringfügig elegantere Definition ist die folgende.

**Definition 1.2** (Variante B). Ein *Pseudogeradenarrangement* der Ordnung  $n$  ist eine Familie einfacher geschlossener Kurven  $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{P}^2$  in der projektiven Ebene, von denen keine den Raum  $\mathbb{P}^2$  separiert, und von denen jeweils zwei sich nur einmal schneiden. Zwei Pseudogeradenarrangements sind identisch, wenn sie durch einen Homöomorphismus ineinander überführbar sind.

Der mit der projektiven Ebene weniger vertraute Leser stelle sich anschaulich eine Kreisscheibe vor, bei der jeweils gegenüberliegende Randpunkte miteinander identifiziert werden. Eine wie in Def. 1.2 geforderte geschlossene Kurve könnte dann etwa von

<sup>2</sup> \* 1888, bis 1935 Prof. an der Uni. Leipzig, danach vor den Nazis geflohen, Prof. an der Univ. of Calcutta, ab 1950 Rückkehr nach Deutschland und Prof. an der FU Berlin, † 1966

## 1. Einführung

einem Randpunkt der Kreisscheibe durch deren Inneres verlaufen, die anderen Kurven dabei schneidend, und sich schließlich am gegenüberliegenden Punkt schließen. Ganz ähnlich einer Erdumrundung, die auf einer planaren Weltkarte verfolgt wird. Man sieht leicht, dass sich Pseudogeradenarrangements der Varianten A und B jeweils zur anderen Variante überführen lassen und beide Definitionen in diesem Sinne äquivalent sind.

Im Folgenden beziehen wir uns stets auf Variante A und bezeichnen Pseudogeradenarrangements auch kurz als *Arrangements*. Ferner nennen wir deren Kurven *Pseudogeraden* oder auch einfach *Geraden*. Variante A lädt zu folgender Verallgemeinerung ein, von der wir intensiven Gebrauch machen werden.

**Definition 1.3.** Ein *verallgemeinertes Arrangement* der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  ist eine Partition einer Familie von  $n_1 + \dots + n_r$  Kurven wie in Definition 1.1 in Klassen  $\{f_1^i, \dots, f_{n_i}^i\}_{i=1, \dots, r}$ , jedoch mit der Eigenschaft, dass sich je zwei Kurven  $f_k^i$  und  $f_{k'}^{i'}$  nur dann genau einmal schneiden, wenn  $i \neq i'$ , und sich ansonsten nicht schneiden. Zwei verallgemeinerte Arrangements sind identisch, wenn sie durch einen Homöomorphismus ineinander überführbar sind.

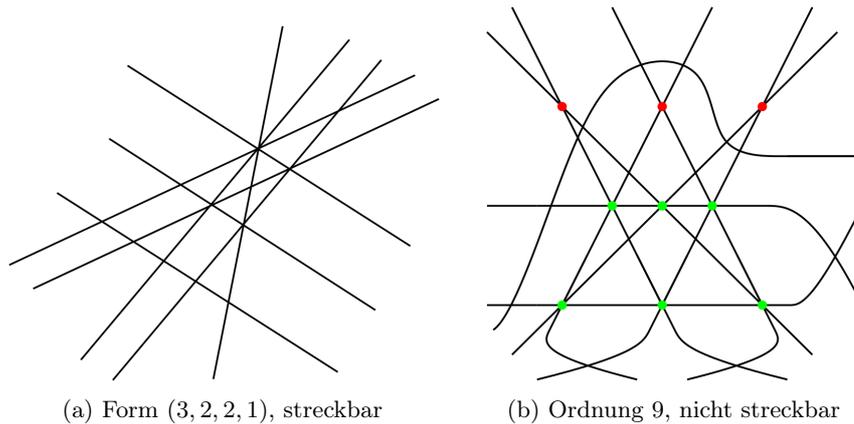


Abbildung 1.5.: Beispiele für Arrangements

Jedes Arrangement der Ordnung  $n$  ist ein verallgemeinertes Arrangement der Form  $(n \times 1)$ , daher verzichten wir weitestgehend auf den Zusatz „verallgemeinert“. Wenn ausschließlich gewöhnliche Arrangements gemeint sind, ergibt sich dies aus dem Kontext. Abb. 1.5a zeigt ein Beispiel eines Arrangements der Form (3, 2, 2, 1). In diesem existieren vier Punkte, in denen sich jeweils mehr als zwei Geraden schneiden. Ein Arrangement, in dem sich in jedem Punkt höchstens zwei Geraden schneiden, heißt *einfach*, beispielsweise das Arrangement der Ordnung 6 in Abb. 1.2. In diesem sind die Arrangements nicht geradlinig gezeichnet.

Eine interessante Eigenschaft von Arrangements, die hier nur erwähnt sein soll, ist die Streckbarkeit. Ein Arrangement heißt *streckbar*, falls eine geradlinige Zeichnung existiert. Bereits Levi war die Existenz nicht streckbarer Arrangements bekannt.

Tatsächlich sind alle Arrangements bestehend aus bis zu 8 Geraden streckbar, das Arrangement der Ordnung 9 in Abb. 1.5b ist jedoch nicht streckbar: In einer gestreckten Zeichnung würde aus dem Satz von Pappus, angewandt auf die sechs grünen Punkte, die Kolinearität der drei roten Punkte folgen. Doch dann könnte die sich durch diese schlängelnde Gerade nicht gestreckt werden (Vgl. Rin56, GP80). Prüfen auf Streckbarkeit ist ein NP-schweres Problem, siehe Sho91.

### 1.3. Orientierte Arrangements und Drahtdiagramme

**Definition 1.4.** Ein *Orientiertes Arrangement*  $(\mathcal{A}, F)$  ist ein Arrangement  $\mathcal{A}$  mit einem ausgezeichneten unbeschränkten Flächensegment  $F$ , genannt *Nordpol*, dessen inzidenten Geraden paarweise verschiedenen Klassen angehören.

Da sich diese Arbeit im weiteren Verlauf ausschließlich mit orientierten Arrangements beschäftigt, wird künftig auf den Zusatz „orientiert“ verzichtet.

Das gegenüberliegende Flächensegment von  $F$ , das durch jede Gerade vom Nordpol separiert wird, wird als *Südpol*  $\bar{F}$  bezeichnet. Fortan nehmen wir ohne Einschränkung an, dass die Klassen  $1, \dots, r$  der  $n_1 + \dots + n_r$  Geraden in dieser Reihenfolge von  $F$  ausgehend im Gegenuhrzeigersinn erscheinen, beschriften die Geraden entsprechend ihrer Klasse und orientieren sie so, dass Nordpol bzw. Südpol zu ihrer Linken bzw. Rechten liegen. Als Beispiel siehe Abb. 1.6a

Dies inspiriert die Darstellung als *Drahtdiagramm* (engl. *wiring diagram*), siehe Abb. 1.6b: Geraden verlaufen als parallele, gestreckte Drähte in der Zeichnung zwischen Nordpol (oben) und Südpol (unten) von links nach rechts. Kreuzungen werden als lokale Verdrehungen der Drähte dargestellt. Da sich je zwei Geraden verschiedener Klassen genau einmal kreuzen, dreht sich die Reihenfolge der Klassen auf der rechten Seite gegenüber der linken Seite genau um.

Dass eine solche Darstellung stets möglich ist, zeigen Felsner und Weil in FW01. Sie zeigen für jedes Arrangement die Existenz eines sogenannten Sweeps.

1. Einführung

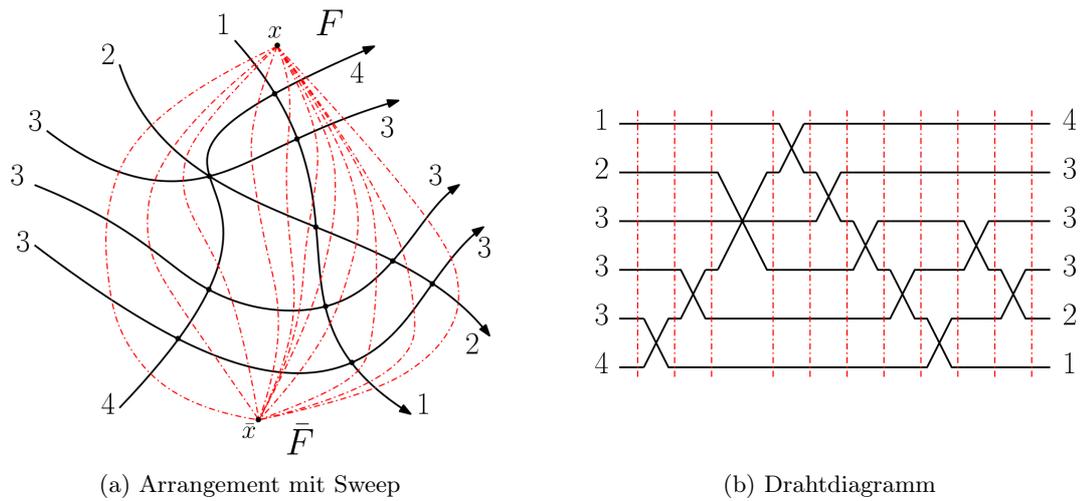


Abbildung 1.6.: Entstehung eines Drahtdiagramms aus einem Sweep

**Definition 1.5.** Sei  $(\mathcal{A}, F)$  ein Arrangement. Ein *Sweep* von  $(\mathcal{A}, F)$  ist eine Sequenz  $c_0, \dots, c_r$  von Kurven mit den folgenden Eigenschaften:

- Alle Kurven haben einen gemeinsamen Startpunkt  $x \in F$  und gemeinsamen Endpunkt  $\bar{x} \in \bar{F}$  und sind ansonsten disjunkt, d.h. für  $c_i \neq c_j$  gilt  $c_i \cap c_j = \{x, \bar{x}\}$ .
- Keine der Kurven  $c_i$  enthält einen Schnittpunkt von Geraden.
- Jede Kurve  $c_i$  hat mit jeder der Geraden genau einen Schnittpunkt.
- Zwischen  $c_i$  und  $c_{i+1}$  liegt genau ein Schnittpunkt von Geraden.
- Jeder Schnittpunkt von Geraden befindet sich zwischen zwei eindeutigen Kurven  $c_i$  und  $c_{i+1}$ .

Die gestrichelten roten Linien in Abb. [1.6a](#) zeigen einen Sweep, welcher den Bauplan für das Drahtdiagramm daneben darstellt. Diese Konstruktion funktioniert für jeden Sweep.

**Definition 1.6.** Der von einem Arrangement  $(\mathcal{A}, F)$  induzierte gerichtete Graph  $G(\mathcal{A}, F) = (V, E)$  besteht aus Knotenmenge

$$V = \{p \in \mathbb{R}^2 : p \text{ Schnittpunkt zweier Geraden } f, g \text{ in } \mathcal{A}\}$$

und Kantenmenge  $E \subset V \times V$  mit  $(p, p') \in E$  genau dann, wenn sich eine Gerade  $f \in \mathcal{A}$  in oben beschriebener Orientierung hintereinander in  $p$  und  $p'$  schneidet.

Der Graph  $G(\mathcal{A}, F)$  ist wohldefiniert, da unabhängig von der homöomorphen Zeichnung. Felsner und Weil zeigen für den Fall eines Arrangements der Ordnung  $n$ , dass  $G(\mathcal{A}, F)$  azyklisch ist, was sich leicht auf verallgemeinerte Arrangements übertragen lässt.

**Lemma 1.7.** *Der Graph  $G(\mathcal{A}, F)$  ist azyklisch.*

*Beweis.* Angenommen,  $G(\mathcal{A}, F)$  enthält einen einfachen gerichteten Kreis, und angenommen, dieser ist im Gegenuhrzeigersinn orientiert, bestehend in dieser Reihenfolge aus Kanten  $e_1, \dots, e_s \in E$ , welche zu Geraden der Klassen  $f_1, \dots, f_s$  gehören. Dann muss  $f_1 \leq \dots \leq f_s \leq f_1$  gelten, somit  $f_1 = \dots = f_s$  und alle beteiligten Geraden gehören derselben Klasse an. Doch Geraden derselben Klasse schneiden sich untereinander nicht und können keinen Kreis bilden, Widerspruch. Für im Uhrzeigersinn orientierte Kreise argumentiere analog mit  $f_1 \geq \dots \geq f_s \geq f_1$ .  $\square$

Es folgt die Existenz von Sweeps: Aufgrund von Lemma 1.7 existiert eine topologische Sortierung von  $G(\mathcal{A}, F)$ , und wie man leicht sieht, liefert jede topologische Sortierung einen Sweep, in der die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge auftreten.

**Lemma 1.8.** *Zu zwei topologischen Sortierungen  $A, B$  eines gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  existieren stets topologische Sortierungen  $A = T_1, \dots, T_s = B$  so, dass sich konsekutive Sortierungen  $T_i, T_{i+1}$  nur durch Nachbartransposition unterscheiden, d.h.  $T_i = [v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n]$  und  $T_{i+1} = [v_1, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n]$ .*

*Beweis.* Bezeichne  $\preceq$  die Partialordnung auf  $V$  definiert durch  $G$ . Sei  $j_0$  minimaler Index mit  $A(j_0) \neq B(j_0)$ . Es gilt

$$\{A(j_0), \dots, A(n)\} \setminus \{B(j_0)\} = \{B(j_0 + 1), \dots, B(n)\} \not\subseteq B(j_0).$$

Dann kann in  $A$  Knoten  $B(j_0)$  durch sukzessive Nachbartranspositionen zu Index  $j_0$  vorgeholt werden, wobei die entstehende Sortierung  $A'$  (mit  $A'(j_0) = B(j_0)$ ) und alle auf dem Weg dorthin entstehenden Sortierungen gültig bzgl.  $G$  sind. Setze dies mit  $A'$  und  $B$  fort.  $\square$

**Definition 1.9.** Eine zulässige Blocksequenz (kurz: Blocksequenz) der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  ist eine Sequenz  $(f_1, \dots, f_k)$  von Abbildungen  $f_0, \dots, f_k : [n_1 + \dots + n_r] \rightarrow [r]$ , also Zeichenketten der Länge  $n_1 + \dots + n_r$  des Alphabets  $1, \dots, r$ , mit den folgenden Eigenschaften:

- 1)  $f_0$  enthält Zeichen  $x \in [r]$  genau  $n_x$  mal, d.h.  $|f_0^{-1}(x)| = n_x$ .
- 2)  $f_0$  ist monoton wachsend,  $f_k$  monoton fallend.
- 3)  $f_{i+1}$  geht aus  $f_i$  durch Umdrehen einer zusammenhängenden Teilzeichenkette bestehend aus paarweise verschiedenen Zeichen hervor.
- 4) Zwei Zeichen  $x, y \in [r], x \neq y$  sind an genau  $n_x \cdot n_y$  Umdrehungen gemäß Eigenschaft 3) beteiligt.

1. Einführung

**Proposition 1.10.** Für jede zulässige Blocksequenz  $(f_0, \dots, f_k)$  gilt:

- 1) Eig. 1) in Def. 1.9 gilt nicht nur für  $f_0$ , sondern für alle  $f_i$ .
- 2) Es gilt  $f_0 = [n_1 \times 1, \dots, n_r \times r]$  und  $f_k = [n_r \times r, \dots, n_1 \times 1]$ .
- 3) Alle gemäß Def. 1.9 Eig. 3) umgedrehten Teilketten sind streng monoton.

*Beweis.* Auss. 1) folgt induktiv aus Eig. 3). Auss. 2) folgt mit Eig. 2) aus Auss. 1). Zu Auss. 3): Seien  $1 \leq x < y \leq r$  beliebig. Um von  $f_0$  zu  $f_k$  zu gelangen, müssen Zeichen  $x, y$  an mindestens  $n_x \cdot n_y$  Umdrehungen der Form  $[\dots, x, \dots, y, \dots]$  zu  $[\dots, y, \dots, x, \dots]$  (d.h. absteigend) beteiligt sein, und nach Eig. 4) an keiner weiteren, insbesondere an keiner aufsteigenden. In jeder Umdrehung einer nicht monotonen Teilkette existiert jedoch ein Zeichenpaar, welches aufsteigend gedreht wird.  $\square$

Blocksequenzen sind kombinatorische Beschreibungen von Drahtdiagrammen oder Sweeps von Arrangements gleicher Form. Dazu betrachtet man die Reihenfolgen, in denen die Sweepkurven die Geraden schneiden.

**Beispiel 1.11.** Der in Abb. 1.6 dargestellte Sweep bzw. das zugehörige Drahtdiagramm liefern folgende Blocksequenz der Form  $(1, 1, 3, 1)$ . Unter den Pfeilen sind die Indexintervalle der erfolgten Umdrehung angegeben.

$$\begin{array}{l}
 f_0 = [1, 2, 3, 3, 3, 4] \xrightarrow{[5,6]} f_1 = [1, 2, 3, 3, 4, 3] \xrightarrow{[4,5]} f_2 = [1, 2, 3, 4, 3, 3] \\
 \xrightarrow{[2,4]} f_3 = [1, 4, 3, 2, 3, 3] \xrightarrow{[1,2]} f_2 = [4, 1, 3, 2, 3, 3] \\
 \xrightarrow{[2,3]} f_3 = [4, 3, 1, 2, 3, 3] \xrightarrow{[3,4]} f_2 = [4, 3, 2, 1, 3, 3] \\
 \xrightarrow{[4,5]} f_3 = [4, 3, 2, 3, 1, 3] \xrightarrow{[5,6]} f_2 = [4, 3, 2, 3, 3, 1] \\
 \xrightarrow{[3,4]} f_3 = [4, 3, 3, 2, 3, 1] \xrightarrow{[4,5]} f_2 = [4, 3, 3, 3, 2, 1]
 \end{array}$$

Jedes Arrangement liefert somit einen Sweep, ein Drahtdiagramm und damit eine Blocksequenz. Einfachen Arrangements werden dabei *einfache Blocksequenzen* zugewiesen, d.h. Blocksequenzen, bei denen alle Umdrehungen nach Def. 1.9 Eig. 3) aus zwei benachbarten Zeichen bestehen. Gewöhnlichen Arrangements der Ordnung  $n$  werden Blocksequenzen zugewiesen, deren Abbildungen Permutationen  $f_i \in S_n$  sind und daher *Permutationssequenzen* (engl. *allowable sequences of permutations*) genannt werden.

Doch die Zuweisung von Arrangements zu Blocksequenzen ist nicht eindeutig, da der Sweep von der Wahl der topologischen Sortierung von  $G(\mathcal{A}, F)$  abhängt. Dies motiviert die Einführung von Äquivalenzklassen.

**Definition 1.12.**

- 1) Sei  $W = (f_0, \dots, f_k)$  eine Blocksequenz und sei  $(I_1, \dots, I_k)$  die Sequenz der Indexintervalle  $I_i = [a_i, b_i]$  der von  $f_{i-1}$  zu  $f_i$  umgedrehten Teilzeichenketten. Nun seien für bestimmtes  $i$  die Intervalle  $I_i, I_{i+1}$  disjunkt, d.h.  $I_i \cap I_{i+1} = \emptyset$ , und sei  $W'$  die eindeutige Blocksequenz gleicher Form zur Sequenz  $[I_1, \dots, I_{i+1}, I_i, \dots, I_k]$ . Dann heißen  $W$  und  $W'$  *direkt äquivalent*.
- 2) Seien  $W = W_1, \dots, W_s = W'$  Blocksequenzen und seien  $W_i$  und  $W_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq s-1$  direkt äquivalent. Dann heißen  $W$  und  $W'$  *äquivalent*.

**Lemma 1.13** (Vgl. [FW01](#) Th. 2)]. *Arrangements stehen mit Äquivalenzklassen von Blocksequenzen in Bijektion.*

*Beweis.* Wie bereits beschrieben, liefert ein Arrangement  $(\mathcal{A}, F)$  über eine topologische Sortierung von  $G(\mathcal{A}, F)$  eine Blocksequenz derselben Form. Für die Wohldefiniertheit dieser Abbildung als Abbildung in Äquivalenzklassen ist die Äquivalenz der von topologischen Sortierungen  $T, T'$  gelieferten Blocksequenzen zu zeigen.

Es gibt nach Lemma [1.8](#) topologische Sortierungen  $T = T_1, \dots, T_s = T'$  so, dass sich  $T_i, T_{i+1}$  nur durch Nachbartransposition unterscheiden, d.h. für gewissen Index  $j$  ist  $T_i = [p_1, \dots, p_j, p_{j+1}, \dots, p_k]$  und  $T_{i+1} = [p_1, \dots, p_{j+1}, p_j, \dots, p_k]$ . Dann müssen  $p_j$  und  $p_{j+1}$  unvergleichbar in  $G(\mathcal{A}, F)$  sein und können nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sweeps zu  $T_i$  und  $T_{i+1}$  unterscheiden sich nur in der Sweepkurve  $c_j$ . In der von  $T_i$  gelieferten Blocksequenz werden erst die zu den sich an Punkt  $p_j$  kreuzenden Geraden gehörenden Ziffern umgedreht, danach die zu Punkt  $p_{j+1}$ . Für die von  $T_{i+1}$  gelieferte Blocksequenz geschieht dies genau umgekehrt. Die beiden Blocksequenzen unterscheiden sich nur in dieser Vertauschung indexdisjunkter Umdrehungen wie in Def. [1.12](#) 2), was deren direkte Äquivalenz zeigt. Dann sind die von  $T$  und  $T'$  gelieferten Blocksequenzen äquivalent.

Zur Surjektivität mache man sich klar, dass zu jeder Blocksequenz in der Tat ein Drahtdiagramm gezeichnet werden kann, dessen Drähte bereits die Geraden eines gezeichneten Arrangements sind, welches ein Urbild ist.

Zur Injektivität: Drahtdiagramme, die direkt äquivalenten Blocksequenzen entsprechen, sind zueinander homöomorph. Über Verkettung von Homöomorphismen sind dann auch Drahtdiagramme, die äquivalenten Blocksequenzen entsprechen, zueinander homöomorph und gehören zum selben Arrangement.  $\square$

## 1.4. Zonotopale Pflasterungen

Wir formalisieren nun die eingangs anschaulich gezeigte Verbindung zwischen Pflasterungen und Arrangements (Abb. [1.2](#)).

### Definition 1.14.

- 1) Seien  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^2$  paarweise linear unabhängig. Dann heißt

$$Z(v_1, \dots, v_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in [-1, 1] \right\}$$

das von  $v_1, \dots, v_n$  erzeugte *Zonotop*.

- 2) Ein *orientiertes Zonotop*  $(Z, q)$  ist ein Zonotop  $Z$  mit ausgewiesener Ecke  $q \in Z$ .

Zonotope sind konvexe  $2r$ -Ecke, die in ihrer Ausgangslage punktsymmetrisch um den Ursprung liegen und von denen Paare gegenüberliegender Seiten der Längen  $2\|v_1\|, \dots, 2\|v_r\|$  parallel zu  $v_1, \dots, v_r$  verlaufen. Folgendes Lemma ist zweidimensionaler Spezialfall der Volumenformel für beliebig dimensionale Zonotope in [\[She74\]](#).

**Lemma 1.15.** *Der Flächeninhalt eines Zonotops  $Z(v_1, \dots, v_n) \subseteq \mathbb{R}^2$  beträgt*

$$\text{Vol}(Z(v_1, \dots, v_n)) = \sum_{j < j'} 4 \cdot |\det([v_j, v_{j'}])| .$$

*Beweis.* Per Induktion über  $n$ : Für  $n = 2$  gilt die Aussage, da der Betrag der Determinante bekannterweise das Volumen des hier durch  $2v_1$  und  $2v_2$  aufgespannten Spats bestimmt. Sei  $n > 2$  und o.B.d.A.  $\det(v_1, v_i) > 0$  für alle  $i > 1$  (Ansonsten betrachte  $v'_i := -v_i$ ). Dann lässt sich  $Z(v_1, \dots, v_n)$  zerlegen in einen durch  $2v_1$  und  $2v_2 + \dots + 2v_n$  aufgespannten Spat und zwei Hälften des Zonotops  $Z(v_2, \dots, v_n)$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(z_1, \dots, z_n) &= \left| \det \left( \begin{bmatrix} 2v_1, \sum_{j=2}^n 2v_j \end{bmatrix} \right) \right| + \text{Vol}(Z(v_2, \dots, v_n)) \\ &\stackrel{\text{IV.}}{=} \sum_{j=2}^n 4 \cdot \det([v_1, v_j]) + \sum_{2 \leq j < j' \leq n} 4 \cdot \det([v_j, v_{j'}]) \\ &= \sum_{j < j'} 4 \cdot |\det([v_j, v_{j'}])| \end{aligned}$$

□

**Definition 1.16.** Sei  $(Z, q)$  mit  $Z = Z(v_1, \dots, v_r)$  ein orientiertes Zonotop. Seien  $v_1, \dots, v_r$  so nummeriert, dass zu ihnen die Seiten beim Ablauen des Randes im Gegenuhrzeigersinn ausgehend von  $q$  in dieser Reihenfolge korrespondieren.

- 1) Eine *Zonotopale Pflasterung* der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  ist eine exakte Überdeckung von  $Z$  mit verschobenen Zonotopen der Form  $Z(V)$  mit  $V \subseteq \left\{ \frac{1}{n_i} \cdot v_i : i \in [r] \right\}$ .
- 2) Eine *Rhombenpflasterung* ist eine Zonotopale Pflasterung nur durch Zonotope der Form  $Z(V)$  mit  $|V|=2$ .

**Lemma 1.17** (Vgl. [FW01](#) Th. 3). *Äquivalenzklassen von Blocksequenzen stehen mit Zonotopalen Pflasterungen in Bijektion.*

*Beweis.* Seien  $(Z, q)$  ein orientiertes Zonotop mit  $Z = Z(v_1, \dots, v_r)$  und  $v_1, \dots, v_r$  reihum nummeriert wie in Def. [1.16](#)

Gegeben  $P$  eine zonotopale Pflasterung von  $(Z, q)$ . Rotiere  $(Z, q)$  mit  $P$ , bis  $q$  bzw. die gegenüberliegende Ecke  $\bar{q}$  eindeutige  $y$ -Maxima bzw.  $y$ -Minima von  $Z$  sind.

Ein Sweep von  $P$  bezeichne eine Sequenz von  $y$ -monotonen  $q$ - $\bar{q}$ -Pfaden  $(p_0, \dots, p_k)$  entlang von Pflasterungskanten mit den folgenden Eigenschaften:

- Pfad  $p_0$  verläuft am linken Rand ( $x \rightarrow -\infty$ ) und  $p_k$  am rechten Rand ( $x \rightarrow \infty$ ) von  $Z$ .
- Die Differenz von Pfaden  $p_i$  und  $p_{i+1}$ , d.h. das Innere von  $p_i \cup p_{i+1}$ , besteht aus genau einem Pflaster  $M_i$ .

Anschaulich beschreibt ein Sweep eine Reihenfolge der Pflaster, in der sie durch horizontales Wegziehen nach links kollisionsfrei entfernt werden können. Ein solcher Sweep existiert allgemein für disjunkte konvexe Mengen, siehe [GY80](#). Ein Sweep ist äquivalent zu einer topologischen Sortierung des gerichteten Graphen  $G$  mit Pflaster als Knoten und gerichteten Kanten  $(M, M')$ , wenn sich an einer Kante zur Linken Pflaster  $M$  und zur Rechten Pflaster  $M'$  berühren (Tatsächlich ist  $G$  identisch mit  $G(\mathcal{A}, F)$  des zugehörigen Arrangements). Man beschrifte nun in  $P$  für  $i = 1, \dots, r$  alle Kanten parallel zu  $v_i$  (vor der Rotation) mit  $i$  und lese die Beschriftungen entlang der Pfade  $(p_0, \dots, p_k)$  ab, was, wie wir behaupten, eine Blocksequenz liefert:

In jeder Zonotopalen Pflasterung von  $Z$  liegen am linken wie am rechten Rand an der Kante parallel zu  $v_i$  genau  $n_i$  Pflaster an. Daher liefert Pfad  $p_0$  bzw.  $p_k$  die monoton steigende bzw. fallende Zeichenkette wie in Def. [1.9](#) Eig. 1) und Eig. 2) gefordert. Es gilt Eig. 3), denn beim Überschreiten des Pflasters  $M_i$  dreht sich von  $p_i$  zu  $p_{i+1}$  nur die Reihenfolge der Kantenbeschriftungen an  $M_i$  um. Es bleibt Eig. 4) zu zeigen.

## 1. Einführung

Eine Umdrehung mit beteiligten Zeichen  $1 \leq x_1 < \dots < x_s \leq r$  entsteht an einem Pflaster der Form  $Z\left(\frac{1}{n_{x_1}}v_{x_1}, \dots, \frac{4}{n_{x_s}}v_{x_s}\right)$ , dessen Flächeninhalt sich nach Lemma 1.15 auf

$$\text{Vol}\left(Z\left(\frac{1}{n_{x_1}}v_{x_1}, \dots, \frac{1}{n_{x_s}}v_{x_s}\right)\right) = \sum_{j < j'} \frac{4}{n_{x_j} n_{x_{j'}}} \cdot |\det([v_{x_j}, v_{x_{j'}}])|$$

bemisst, worin jedes beteiligte Zeichenpaar  $x \neq x'$  zu  $\frac{4}{n_x n_{x'}} |\det([v_x, v_{x'}])|$  beiträgt. Da zwischen  $p_0$  und  $p_k$  jedes solche Paar an mindestens  $n_x \cdot n_{x'}$  Umdrehungen beteiligt sein muss, schöpft dies die Gesamtfläche von  $Z$ , welche sich nach Lemma 1.15 auf

$$\text{Vol}(Z(v_1, \dots, v_n)) = \sum_{x < x'} 4 \cdot |\det(v_x, v_{x'})|$$

bemisst, vollständig aus, was beweist, dass keine weiteren Umdrehungen existieren.

Diese Zuweisung von Pflasterungen zu Blocksequenzen ist eine wohldefinierte Abbildung in Äquivalenzklassen. Denn seien  $(p_0, \dots, p_k), (p'_0, \dots, p'_k)$  Sweeps zu topologischen Sortierungen  $T, T'$  von  $G$ . Dann gibt es nach Lemma 1.8 topologische Sortierungen  $T = T_1, \dots, T_s = T'$  so, dass sich  $T_i$  und  $T_{i+1}$  nur durch adjazente Vertauschung unterscheiden, d.h. für gewisses  $j$  ist  $T_i = [M_1, \dots, M_j, M_{j+1}, \dots, M_k]$  und  $T_{i+1} = [M_1, \dots, M_{j+1}, M_j, \dots, M_k]$ . Dann müssen  $M_j$  und  $M_{j+1}$  in  $G$  unvergleichbar sein, keines der beiden Pflaster kollidiert somit beim Ziehen nach links mit dem anderen und folglich existiert eine horizontale Gerade, die  $M_j$  und  $M_{j+1}$  separiert. Dies zeigt, dass die beiden Umdrehungen der Beschriftungen an  $M_j$  von  $p_{j-1}$  zu  $p_j$  und an  $M_{j+1}$  von  $p_j$  zu  $p_{j+1}$ , welche von  $p'_{j-1}$  zu  $p'_j$  und von  $p'_j$  zu  $p'_{j+1}$  genau vertauscht auftreten, indexdisjunkt sind, und die aus  $T_i$  und  $T_{i+1}$  resultierenden Blocksequenzen direkt äquivalent sind. Dann sind die von  $(p_0, \dots, p_k)$  und  $(p'_0, \dots, p'_k)$  gelieferten Blocksequenzen äquivalent.

Sei umgekehrt eine Blocksequenz  $(p_0, \dots, p_k)$  gegeben. Die Ecke  $q$  von  $Z$  sei wieder  $y$ -maximal. Starte mit dem leeren Zonotop  $Z$  und  $i = 1$  und iteriere Folgendes: Wenn von  $p_{i-1}$  zu  $p_i$  Zeichen  $i_1, \dots, i_s$  umgedreht werden, so füge am linken Rand der noch freien Fläche von  $Z$  ein Pflaster der Form  $Z\left(\frac{1}{n_{i_1}}v_{i_1}, \dots, \frac{1}{n_{i_s}}v_{i_s}\right)$  ein, sodass dabei die folgende Invariante erhalten bleibt:

- Die Vereinigung  $U$  bereits eingefügter Pflaster ist eine einfach zusammenhängende Teilmenge von  $Z$ .
- Der  $q$ - $\bar{q}$ -Pfad entlang des rechten Randes von  $U$  ist ein  $y$ -monotoner Pfad von Kantensegmenten parallel zu  $v_1, \dots, v_n$  in der Reihenfolge wie in  $p_i$ .

□

## 1.5. Signotope und höhere Bruhat Ordnungen

Sei  $(\mathcal{A}, F)$  ein einfaches Arrangement der Ordnung  $n$  mit Geraden  $f_1, \dots, f_n$  im Gegenuhrzeigersinn von  $F$  ausgehend. Für Indizes  $1 \leq i < j < k \leq n$  betrachten wir das von  $f_i, f_j, f_k$  aufgespannte „Dreieck“ und unterscheiden zwei Fälle: Der Schnittpunkt von  $f_i$  und  $f_k$  liegt zur Linken von  $f_j$ , also in einem Drahtdiagramm oberhalb von  $f_j$ , oder er liegt zur Rechten, also unterhalb von  $f_j$ , siehe Abb. 1.7. Die Orientierung dieser Dreiecke wird durch eine Abbildung  $\binom{[n]}{3} \rightarrow \{-, +\}$  kodiert. Aus dieser kann  $(\mathcal{A}, F)$  eindeutig rekonstruiert werden. Doch welche der  $2^{\binom{n}{3}}$  möglichen Orientierungen werden durch Arrangements realisiert?

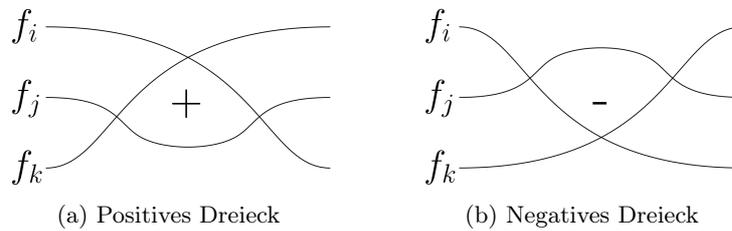


Abbildung 1.7.: Orientierung von Dreiecken

Wir ordnen die Menge  $\{-, +\}$  durch  $- \preceq +$ . Für  $A \subseteq [n]$  sei  $A^{[i]}$  die Menge  $A$  ohne ihr  $i$ -t kleinstes Element, beispielsweise  $\{3, 5, 7, 8, 9\}^{[2]} = \{3, 7, 8, 9\}$ .

### Definition 1.18.

- 1) Ein  $r$ -Signotop der Ordnung  $n$  ist eine Abbildung  $\alpha : \binom{[n]}{r} \rightarrow \{-, +\}$  so, dass für alle  $A \in \binom{[n]}{r+1}$  die Sequenz  $(\alpha(A^{[1]}), \dots, \alpha(A^{[r+1]}))$  monoton (steigend oder fallend) ist.
- 2) Für zwei  $r$ -Signotope  $\alpha, \alpha'$  der Ordnung  $n$  gelte  $\alpha \preceq \alpha'$ , falls  $\alpha(A) \leq \alpha'(A)$  für alle  $A \in \binom{[n]}{r}$ . Bezeichne  $S_r(n)$  die dadurch partiell geordnete Menge aller  $r$ -Signotope der Ordnung  $n$ .
- 3) Für  $\alpha, \alpha' \in S_r(n)$  gelte  $\alpha \preceq_{HB} \alpha'$ , falls es  $r$ -Signotope  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_s = \alpha'$  so gibt, dass sich  $\alpha_i$  und  $\alpha_{i+1}$  nur in einem  $A \in \binom{[n]}{r}$  unterscheiden, für das  $\alpha_i(A) = -$  und  $\alpha_{i+1}(A) = +$  gilt. Bezeichne die *Höhere Bruhat Ordnung*  $B_n(r)$  die dadurch partiell geordnete Menge aller  $(r+1)$ -Signotope (!) der Ordnung  $n$ .

Wir werden im Verlauf zeigen, dass 3-Signotope genau die Orientierungen sind, die Arrangements kodieren. 2-Signotope stehen dagegen in Bijektion zu Permutationen. In dieser Bijektion wird  $\alpha \in S_2(n)$  die Permutation  $\pi_\alpha \in S_n$  zugeordnet, in der für  $1 \leq i < j \leq n$  genau dann  $\pi_\alpha^{-1}(i) < \pi_\alpha^{-1}(j)$  gilt, wenn  $\alpha(\{i, j\}) = +$ . Die

1. Einführung

Monotonieeigenschaft von  $\alpha$  ist dabei äquivalent zur Transitivität invertierter und wohlgeordneter Paare in  $\pi_\alpha$ . Die Partialordnungen  $S_r(n)$  und  $B_n(r-1)$  stimmen für den für Arrangements relevanten Fall  $r = 3$  überein. Dies zeigen Felsner und Weil in [FW00]. Für  $r > 3$  gilt dies nicht.

Für  $\alpha \in S_r(n)$  definieren wir einen gerichteten Graphen  $G_\alpha$  mit Knotenmenge  $\binom{[n]}{r-1}$  und für alle  $P \in \binom{[n]}{r}$  und  $1 \leq i < j \leq n$  einer Kante  $(P^{[i]}, P^{[j]})$  falls  $\alpha(P) = +$  und eine Kante  $(P^{[j]}, P^{[i]})$  falls  $\alpha(P) = -$ . Folgendes Lemma ist Spezialfall von [FW01, Lemma 10].

**Lemma 1.19.** *Für  $\alpha \in S_3(n)$  ist der Graph  $G_\alpha$  azyklisch.*

*Beweis.* Per Induktion über  $n$ . Für  $n < 3$  ist  $G_\alpha$  kantenlos, für  $n = 3$  ist  $G_\alpha$  ein azyklisches Dreieck. Für  $n > 3$  partitioniere  $V(G_\alpha) = \binom{[n]}{2}$  in  $V = V_n \cup V_+ \cup V_-$  mit:

$$\begin{aligned} V_n &:= \{\{x, n\} : 1 \leq x \leq n-1\} \\ V_+ &:= \left\{ \{x, y\} \in \binom{[n-1]}{2} : \alpha(\{x, y, n\}) = + \right\} \\ V_- &:= \left\{ \{x, y\} \in \binom{[n-1]}{2} : \alpha(\{x, y, n\}) = - \right\} \end{aligned}$$

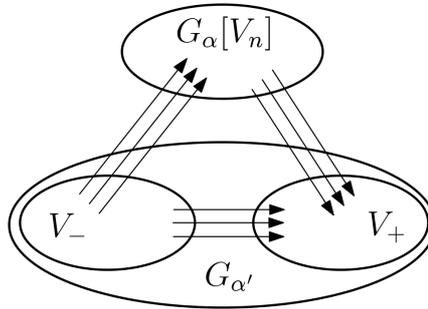


Abbildung 1.8.: Aufbau von  $G_\alpha$

$G_\alpha[V_+], G_\alpha[V_-]$  sind azyklisch: Betrachte  $\alpha' : \binom{[n-1]}{2} \rightarrow \{-, +\}, M \mapsto \alpha(M)$ . Dann ist  $\alpha' \in S_3(n-1)$  und nach Induktionsvoraussetzung  $G_\alpha[V_+ \cup V_-] = G_{\alpha'}$  azyklisch.

$G_\alpha[V_n]$  ist azyklisch: Betrachte  $\beta : \binom{[n-1]}{2} \rightarrow \{-, +\}, M \mapsto \alpha(M \cup \{n\})$ . Man prüft leicht  $\beta \in S_2(n-1)$ .  $G_\beta$  ist ein vollständiger gerichteter Graph auf Knotenmenge  $[n-1]$ . In diesem gilt für  $1 \leq i < j \leq n-1$  die Orientierung  $(i, j) \in E(G_\beta) \iff \beta(\{i, j\}) = -$ . Dann ist  $G_\beta$  transitiv, insbesondere azyklisch. Identifiziert man die Knotenmenge  $V(G_\beta) = [n-1]$  mit  $V_n$ , so sieht man  $G_\alpha[V_n] \simeq G_\beta$ . Dann ist auch  $G_\alpha[V_n]$  azyklisch.

In  $G_\alpha$  sind Kanten zwischen  $V_-$  und  $V_n$  von  $V_-$  nach  $V_n$  orientiert und Kanten zwischen  $V_+$  und  $V_n$  von  $V_n$  nach  $V_+$ .

Für die Kreisfreiheit von  $G_\alpha$  bleibt zu zeigen, dass Kanten zwischen  $V_-$  und  $V_+$  von  $V_-$  nach  $V_+$  orientiert sind, siehe Abb. 1.8. Seien  $\{i, k\} \in V_-$  und  $\{j, k\} \in V_+$  durch eine Kante verbunden. Wegen  $\alpha(\{i, k, n\}) = -$  und  $\alpha(\{j, k, n\}) = +$  erzwingt die Monotonieeigenschaft  $\alpha(\{i, j, k\}) = - \iff i < j$  und daher  $(\{i, k\}, \{j, k\}) \in G_\alpha$ .  $\square$

**Lemma 1.20** (Vgl. [FW01, Th. 7]). *Die Menge der 3-Signotope  $S_3(n)$  steht mit der Menge der einfachen Arrangements der Ordnung  $n$  in Bijektion.*

*Beweis.* Sei  $\alpha \in S_3(n)$ . Aufgrund von Lemma 1.19 existiert eine topologische Sortierung  $A_1, \dots, A_{\binom{n}{2}}$  von  $G_\alpha$ . Definiere für  $0 \leq i \leq \binom{n}{2}$ :

$$\beta_i : \binom{[n]}{2} \rightarrow \{-, +\} \quad A_j \mapsto \begin{cases} + & j > i \\ - & j \leq i \end{cases}$$

Dann sind  $\beta_0, \dots, \beta_{\binom{n}{2}} \in S_2(n)$  und  $\beta_{\binom{n}{2}} \preceq_{HB} \dots \preceq_{HB} \beta_0$ . Sei  $\pi_i \in S_n$  die von  $\beta_i$  kodierte Permutation. Die Permutationen  $\beta_i$  und  $\beta_{i+1}$  unterscheiden sich nur durch eine zusätzliche Inversion, d.h.  $\beta_{i+1}$  entsteht aus  $\beta_i$  durch eine Nachbartransposition. Dann ist  $(\pi_0, \dots, \pi_{\binom{n}{2}})$  eine Permutationssequenz, also eine Blocksequenz.

Seien in dieser  $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq n$  drei Zeichen. Falls  $\alpha(\{x_1, x_2, x_3\}) = -$ , so beteiligen diese sich an paarweisen Umdrehungen in der Reihenfolge  $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)$  und im zugehörigen Drahtdiagramm kreuzen sich  $f_{x_1}$  und  $f_{x_3}$  unterhalb von  $f_{x_2}$ . Analog: Falls  $\alpha(\{x_1, x_2, x_3\}) = +$ , dann oberhalb.

Somit wird auf diese Weise jedem  $\alpha \in S_3(n)$  ein Arrangement zugewiesen, in welchem die Dreiecke gemäß  $\alpha$  orientiert sind. Diese Abbildung ist injektiv, da in jedem Arrangement die Dreiecke eindeutig orientiert sind, und sie ist surjektiv, da die Orientierung der Dreiecke eines jeden Arrangements ein Urbild liefert.  $\square$

**Definition 1.21.** Sei  $(\mathcal{A}, F)$  ein einfaches Arrangement der Ordnung  $n$  und für  $i \in [n]$  beschreibe  $\pi_i : [n-1] \rightarrow [n] \setminus \{i\}$  die Reihenfolge der Kreuzungen der  $i$ -ten Gerade mit den Geraden  $[n] \setminus \{i\}$ . Dann heißt  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  das *Schnittfolgensystem* (engl. *local sequence of unordered switches*) von  $(\mathcal{A}, F)$ .

1. Einführung

**Beispiel 1.22.** Schnittfolgensystem des Arrangements zu Abb. 3.4b in Kapitel 3:

$$\pi_1 = [2, 4, 3] \quad \pi_2 = [1, 4, 3] \quad \pi_3 = [4, 1, 2] \quad \pi_4 = [3, 1, 2]$$

Die Theorie der Dreiecksorientierungen in Arrangements liefert nun eine Charakterisierung, die beschreibt, welche der  $((n-1)!)^n$  Kombinationen von Permutationen als Schnittfolgensystem eines Arrangements der Ordnung  $n$  realisiert werden. Betrachten wir dafür zunächst das Verhalten von drei sich schneidenden Geraden  $f_i, f_j, f_k$  mit  $i < j < k$  wie in Abb. 1.7 in einem Arrangement. Man beobachtet abhängig von der Orientierung des Dreiecks, dass entweder jede dieser Geraden die jeweils anderen beiden in der Reihenfolge  $i, j, k$  schneidet, oder sie sich alle in umgekehrter Reihenfolge schneiden. Die Bedingung in folgendem Theorem ist folglich notwendig für ein Schnittfolgensystem.

**Theorem 1.23** (Vgl. FW01 Th. 8). Für  $1 \leq i \leq n$  sei  $\pi_i : [n-1] \rightarrow [n] \setminus \{i\}$  bijektiv. Es ist  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  genau dann ein Schnittfolgensystem eines Arrangements der Ordnung  $n$ , falls für alle  $1 \leq i < j < k \leq n$  entweder

$$\pi_i^{-1}(j) < \pi_i^{-1}(k) \quad \text{und} \quad \pi_j^{-1}(i) < \pi_j^{-1}(k) \quad \text{und} \quad \pi_k^{-1}(i) < \pi_k^{-1}(j)$$

oder

$$\pi_i^{-1}(k) < \pi_i^{-1}(j) \quad \text{und} \quad \pi_j^{-1}(k) < \pi_j^{-1}(i) \quad \text{und} \quad \pi_k^{-1}(j) < \pi_k^{-1}(i)$$

gilt.

*Beweis.* Es bleibt zu zeigen, dass die Bedingung in Theorem 1.23 hinreichend ist. Erfülle  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  diese Bedingung. Sei  $\alpha : \binom{[n]}{3} \rightarrow \{-, +\}$  der in der Bedingung zutreffende Fall, d.h. für  $1 \leq i < j < k \leq n$  sei

$$\alpha(\{i, j, k\}) := \begin{cases} + & : \pi_i^{-1}(j) < \pi_i^{-1}(k) \\ - & : \pi_i^{-1}(k) < \pi_i^{-1}(j) \end{cases} .$$

Wir behaupten,  $\alpha$  ist ein 3-Signotop, d.h. für beliebige  $1 \leq i < j < k < l \leq n$  ist die Sequenz  $S := (\alpha(\{j, k, l\}), \alpha(\{i, k, l\}), \alpha(\{i, j, l\}), \alpha(\{i, j, k\}))$  monoton.

Aus  $S = (+, -, *, *)$  folgt  $S = (+, -, -, -)$ :  $\alpha(\{j, k, l\}) = +$ , daher  $\pi_l^{-1}(j) < \pi_l^{-1}(k)$  und  $\pi_k^{-1}(j) < \pi_k^{-1}(l)$ .  $\alpha(\{i, k, l\}) = -$ , daher  $\pi_l^{-1}(k) < \pi_l^{-1}(i)$  und  $\pi_k^{-1}(l) < \pi_k^{-1}(i)$ . Mit Transitivität folgt  $\pi_l^{-1}(j) < \pi_l^{-1}(i)$  und  $\pi_k^{-1}(j) < \pi_k^{-1}(i)$  und damit  $\alpha(\{i, j, l\}) = -$  und  $\alpha(\{i, j, k\}) = -$ .

Aus  $S = (+, +, -, *)$  folgt  $S = (+, +, -, -)$ :  $\alpha(\{i, k, l\}) = +$ , daher  $\pi_i^{-1}(k) < \pi_i^{-1}(l)$ ,  $\alpha(\{i, j, l\}) = -$ , daher  $\pi_i^{-1}(l) < \pi_i^{-1}(j)$ . Mit Transitivität folgt  $\pi_i^{-1}(k) < \pi_i^{-1}(j)$  und daher  $\alpha(\{i, j, k\}) = -$ .

Analog folgt aus  $S = (-, +, *, *)$  auch  $S = (-, +, +, +)$  und aus  $S = (-, -, +, *)$  auch  $S = (-, -, +, +)$ . Insgesamt zeigen diese Fälle Monotonie von  $S$ .

Auch  $\alpha' := -\alpha$  ist ein 3-Signotop. Wie im Beweis von Lemma 1.20 gesehen, gibt es ein Arrangement mit Dreiecksorientierung  $\alpha'$ . In diesem schneiden sich Geraden in der Tat in den Reihenfolgen  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ . Denn angenommen für  $1 \leq i < j < k \leq n$  gilt  $\pi_j^{-1}(i) < \pi_j^{-1}(k)$ , dann ist  $\alpha'(\{i, j, k\}) = -\alpha(\{i, j, k\}) = -$ , d.h. Geraden  $f_i$  und  $f_k$  kreuzen sich unterhalb von  $f_j$ . So kreuzt  $f_j$  die Gerade  $f_i$  vor  $f_k$ , also in der Reihenfolge wie in  $\pi_j$ . Der Fall  $\pi_j^{-1}(k) < \pi_j^{-1}(i)$  folgt analog.  $\square$

Der Begriff des Schnittfolgensystems lässt sich naheliegend auf Arrangements der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  erweitern: Sind die Geraden  $f_1^1, \dots, f_{n_1}^1, \dots, f_1^r, \dots, f_{n_r}^r$  reihum beschriftet, so kodiert man für jede Gerade  $f_k^i$  die Reihenfolge ihrer Kreuzungen als Abbildungen  $\pi_{i,k} : [n_1 + \dots + n_r - n_i] \rightarrow [r]$  mit  $|\pi_{i,k}^{-1}(i')| = \delta_{[i' \neq i]} \cdot n_{i'}$ .

Auch hier lässt sich die Realisierbarkeit effizient mittels Theorem 1.23 überprüfen. Für zwei Klassen  $i \neq i'$  bezeichne dazu  $\pi_{i,k}^{-1}(i', k')$  den Index der Kreuzung von  $f_k^i$  mit  $f_{k'}^{i'}$ . Dieser Index lässt sich leicht bestimmen: Ist  $i < i'$ , so kreuzt  $f_k^i$  die Geraden der Klasse  $i'$  in ihrer Reihenfolge  $f_1^{i'}, \dots, f_{n_{i'}}^{i'}$ , und  $\pi_{i,k}^{-1}(i', k')$  ist der Index des  $k'$ -ten Auftretens von  $i'$  in  $\pi_{i,k}$ . Falls  $i' < i$ , so kreuzt  $f_k^i$  die Geraden der Klasse  $i'$  in umgekehrter Reihenfolge, und  $\pi_{i,k}^{-1}(i', k')$  ist der Index des  $k'$ -letzten Auftretens von  $i'$  in  $\pi_{i,k}$ . Nun lässt sich Theorem 1.23 anwenden, indem man für alle Tripel an Geraden  $(f_{k_i}^i, f_{k_j}^j, f_{k_l}^l)$  verschiedener Klassen  $i, j, l$  Ungleichungsbedingungen wie in Theorem 1.23 aber nun der Form  $\pi_{i,k_i}^{-1}(j, k_j) < \pi_{i,k_i}^{-1}(l, k_l)$  überprüft.



## 2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

### 2.1. Grundlagen zu Markov-Ketten

Markov-Ketten sind stochastische Prozesse, die Anwendungen in verschiedensten Bereichen finden: Zum Modellieren eines Besuchers von Internetseiten in Googles PageRank-Algorithmus, in der Autovervollständigung natürlichsprachiger Sätze, bei der Analyse einiger Spiele oder beim Mischen eines Kartendecks. Es ist ein bislang ungelöstes Problem, wie Arrangements effizient uniform zufällig erzeugt werden können. Wir werden sehen, dass Markov-Ketten zumindest in Spezialfällen hilfreich sein können. Der folgende Überblick, der sich, sofern nicht anders angegeben, auf [LPW09](#) stützt, beschränkt sich auf Theorie, die im Verlauf dieser Arbeit aufgegriffen wird.

#### 2.1.1. Basiswissen

**Definition 2.1.** Grundlegende Definitionen zu Markov-Ketten

- 1) Sei  $\mathcal{X}$  eine endliche Menge<sup>1</sup> und  $P : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ . Dann heißt eine Folge  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  von Zufallsvariablen in  $\mathcal{X}$  *Markov-Kette* mit *Zustandsraum*  $\mathcal{X}$  und *Übergangsmatrix*  $P$ , falls für alle  $x_0, \dots, x_{t+1} \in \mathcal{X}$  mit  $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t] > 0$  gilt:

$$\mathbb{P}[X_{t+1} = x_{t+1} | X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t] = \mathbb{P}[X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t] = P(x_t, x_{t+1})$$

- 2) Die Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  heißt *irreduzibel*, falls für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  ein  $t \in \mathbb{N}_0$  mit  $P^t(x, y) > 0$  existiert<sup>2</sup>
- 3) Für  $x \in \mathcal{X}$  heißt  $\text{ggT}(\{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\})$  die *Periode* von  $x$ . Die Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  heißt *aperiodisch*, falls jeder Zustand  $x \in \mathcal{X}$  Periode 1 besitzt.

---

<sup>1</sup>Allgemeiner definiert man Markov-Ketten auch z.B. für abzählbare Mengen  $\mathcal{X}$ , in dieser Arbeit ist jedoch nur der Fall  $|\mathcal{X}| < \infty$  relevant.

<sup>2</sup>Wir fassen  $P$  als Matrix  $[P(x, y)]_{x, y} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{X}|}$  auf und  $P^t = [P^t(x, y)]_{x, y}$  bezeichnet deren Potenz.

## 2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

- 4) Die Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  heißt *symmetrisch*, falls  $P(x, y) = P(y, x)$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  gilt.
- 5) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  heißt *stationäre Verteilung* der Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ , falls  $\pi = \pi P$  gilt.<sup>3</sup>

In Worten: Eine *Markov-Kette* ist ein Prozess, bei dem der Folgezustand nur vom letzten Zustand gemäß den Übergangswahrscheinlichkeiten  $P$  abhängt („Gedächtnislosigkeit“). Hat  $X_0$  Verteilung  $\mu$ , so ergibt sich induktiv  $X_t \sim \mu P^t$ . In einer *irreduziblen* Markov-Kette ist ein (i.d.R. mehrschrittiger) Übergang von jedem Zustand in jeden Zustand möglich. In einer *aperiodischen* Markov-Kette kann von jedem Zustand zum selben Zustand in einer Anzahl Schritten zurückgekehrt werden, die nicht nur ganzzahliges Vielfaches einer Periode  $p > 1$  sein kann. Ist  $\pi$  *stationäre Verteilung* und gilt  $X_t \sim \pi$ , so auch  $X_{t+1} \sim \pi P = \pi$ .

Bekannterweise existiert für jede irreduzible Markov-Kette ( $|\mathcal{X}| < \infty$ ) eine eindeutige stationäre Verteilung  $\pi(x)$  (Gegeben für  $x \in \mathcal{X}$  als Kehrwert der erwarteten Zahl an Schritten startend in  $x$  bis zur ersten Rückkehr zu  $x$ ). Bei zudem aperiodischen Markov-Ketten gilt unabhängig von der *Startverteilung* von  $X_0$  die Konvergenz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_t = x] = \pi(x)$ . Ist die Markov-Kette außerdem symmetrisch, so ist die uniforme Verteilung  $\pi_u$  auf  $\mathcal{X}$  (die eindeutige) stationäre Verteilung: In jeder Markov-Kette hat  $P$  Zeilensummen 1, daher  $\pi_u^\top = P \pi_u^\top$ , woraus mit  $P = P^\top$  schließlich  $\pi_u = \pi_u P$  folgt.

Dies motiviert die sogenannte Monte-Carlo-Methode: Auf einem endlichen Zustandsraum  $\mathcal{X}$  wird eine irreduzible, aperiodische und symmetrische Markov-Kette definiert, welche mit beliebigem Startwert  $X_0 = x_0$  eine große Zahl  $t \gg 0$  an Schritten simuliert wird. Aufgrund dieser großen Zahl an Schritten wird schließlich angenommen, dass  $X_t$  hinreichend uniform verteilt ist. Dies wirft folgende Fragen auf:

- Wie viele Schritte  $t$  sind nötig, sodass in gewissem Sinne hinreichend uniforme Verteilung von  $X_t$  garantiert werden kann?
- Ist auch ein exakt uniformes statt eines näherungsweise uniformen Ziehens aus  $\mathcal{X}$  möglich?

### 2.1.2. Schnell mischende Markov-Ketten

Bevor wir oben genannte Fragen beantworten, formalisieren wir, was es für eine Markov-Kette bedeutet, „schnell“ gegen ihre stationäre Verteilung zu konvergieren. Dazu bedienen wir uns des folgenden Abstandsmaßes.

<sup>3</sup>Wir fassen Verteilungen  $\mu \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$  hier und fortan als Zeilenvektoren auf.

**Definition 2.2.** Seien  $\mu, \mu' : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf der endlichen Ereignismenge  $\mathcal{X}$ . Dann heißt

$$\|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} := \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |\mu(A) - \mu'(A)|$$

die *totale Variationsdistanz* von  $\mu$  und  $\mu'$ .

**Proposition 2.3** (Vgl. [LPW09](#) Prop. 4.2 S. 48]). *Es gilt:*

$$\|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mu(x) - \mu'(x)| = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \mu(x) > \mu'(x)}} (\mu(x) - \mu'(x))$$

.

*Beweis.* Zur linken Gleichung: Sei  $B := \{x \in \mathcal{X} : \mu(x) \geq \mu'(x)\}$ . In der Summe in

$$|\mu(A) - \mu'(A)| = \left| \sum_{x \in A} (\mu(x) - \mu'(x)) \right|$$

gehören Summanden positiven bzw. negativen Vorzeichens zu Elementen  $x \in B$  bzw.  $x \in B^c$ . Der Ausdruck  $|\mu(A) - \mu'(A)|$  wird daher in einer der Mengen  $A = B$  oder  $A = B^c$  maximiert. Da  $\mu(B) - \mu'(B) = \mu'(B^c) - \mu(B^c)$ , maximieren  $B$  und  $B^c$  gleichermaßen. Es folgt:

$$2 \cdot \|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} = \mu(B) - \mu'(B) + \mu'(B^c) - \mu(B^c) = \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mu(x) - \mu'(x)|$$

Zur rechten Gleichung: Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 = \left( \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) \right) - \left( \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu'(x) \right) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (\mu(x) - \mu'(x)) \\ &= \left( \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \mu(x) > \mu'(x)}} \mu(x) - \mu'(x) \right) - \left( \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \mu(x) \leq \mu'(x)}} \mu'(x) - \mu(x) \right) \end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme sind daher identisch, womit folgt:

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mu(x) - \mu'(x)| = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \mu(x) > \mu'(x)}} \mu(x) - \mu'(x) \right) + \left( \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \mu(x) \leq \mu'(x)}} \mu'(x) - \mu(x) \right) \right)$$

2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

$$= \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \mu(x) > \mu'(x)}} (\mu(x) - \mu'(x))$$

□

**Definition 2.4.** Für eine Übergangsmatrix  $P$  einer Markov-Kette auf Zustandsraum  $\mathcal{X}$  mit stationärer Verteilung  $\pi$  seien für  $t \in \mathbb{N}_0$  definiert:

$$d(t) := \max_{x \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}$$

$$\bar{d}(t) := \max_{x, y \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}}$$

**Proposition 2.5** (Vgl. [\[LPW09\]](#) Prop. 4.10 S. 53; Ex. 4.1 S. 57).

1) Es gilt  $d(t) \leq \bar{d}(t) \leq 2d(t)$

2) Mit  $\mathcal{P} = \{\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1] : \mu \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathcal{X}\}$  gilt:

$$d(t) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \|\mu P^t - \pi\|_{\text{TV}}, \quad \bar{d}(t) = \sup_{\mu, \mu' \in \mathcal{P}} \|\mu P^t - \mu' P^t\|_{\text{TV}}$$

*Beweis.* Zu 1): Da  $\pi$  stationäre Verteilung ist, gilt für jedes  $y' \in \mathcal{X}$  und  $t \in \mathbb{N}_0$ :

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y) P^t(y, y') = (\pi P^t)(y') = \pi(y')$$

Aufsummiert über alle  $y' \in A$  für gewisses  $A \subseteq \mathcal{X}$  ergibt dies

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y) P^t(y, A) = \pi(A).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} &= \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |P^t(x, A) - \pi(A)| \\ &= \max_{A \subseteq \mathcal{X}} \left| \sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y) (P^t(x, A) - P^t(y, A)) \right| \\ &\leq \sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y) \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |P^t(x, A) - P^t(y, A)| \\ &= \sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y) \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}} \end{aligned}$$

Daher gilt

$$d(t) = \max_{x \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \leq \max_{x, y \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}} = \bar{d}(t).$$

Die Ungleichung  $\bar{d}(t) \leq 2d(t)$  folgt mit Einfügen einer nahrhaften Null ( $\pi - \pi$ ) und Anwenden der Dreiecksungleichung, welche auch für  $\|\cdot\|_{\text{TV}}$  gilt.

Zu 2): Wir zeigen nur die linke Gleichung, die rechte folgt ähnlich. Es gilt

$$\begin{aligned} d(t) &= \max_{x \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \leq \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \|\mu P^t - \pi\|_{\text{TV}} = \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathcal{X}} |\mu P^t(y) - \pi(y)| \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathcal{X}} \left| \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) (P^t(x, y) - \pi(y)) \right| \\ &\leq \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathcal{X}} |P^t(x, y) - \pi(y)| = \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \\ &\leq \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu(x) d(t) = d(t), \end{aligned}$$

wobei wir zweimal Prop. 2.3 angewendet haben.  $\square$

**Proposition 2.6** (Vgl. [LPW09, Ex. 4.2 S. 57]). *Für Verteilungen  $\mu, \mu' : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  gilt  $\|\mu P - \mu' P\|_{\text{TV}} \leq \|\mu - \mu'\|_{\text{TV}}$ . Außerdem sind  $d(t)$  und  $\bar{d}(t)$  monoton fallend.*

*Beweis.* Durch Anwenden von Prop. 2.3, der Dreiecksungleichung und erneutem Anwenden von Prop. 2.3 erhält man:

$$\begin{aligned} \|\mu P - \mu' P\|_{\text{TV}} &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} |(\mu P)(x) - (\mu' P)(x)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} \left| \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} P(x_0, x) (\mu(x_0) - \mu'(x_0)) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x_0 \in \mathcal{X}} \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x_0, x) |\mu(x_0) - \mu'(x_0)| \\ &= \|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} \end{aligned}$$

Die Monotonie von  $\bar{d}(t)$  folgt nun direkt mit Prop. 2.5. Für die Monotonie von  $d(t)$  wende man obige Ungleichung auf  $\mu = P^t(x, \cdot)$  und  $\mu' = \pi$  (Stationäre Verteilung) an und benutze anschließend Prop. 2.5  $\square$

**Proposition 2.7** (Vgl. [LPW09] Lemma. 4.11 S. 54]). Die Funktion  $\bar{d}(t)$  ist submultiplikativ, d.h. für  $t, t' \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\bar{d}(t + t') \leq \bar{d}(t)\bar{d}(t')$$

Der Beweis von Prop. 2.7 folgt später. Falls  $d(t) \leq \varepsilon$  für gewisse Schrittzahl  $t$  und  $\varepsilon > 0$  gilt, so bedeutet dies, dass  $X_t$   $\varepsilon$ -nah  $\pi$ -verteilt ist. Nach Prop. 2.6 sind dann auch die weiteren Schritte  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots$   $\varepsilon$ -nah  $\pi$ -verteilt. Dies motiviert folgende Definition:

**Definition 2.8.**

- 1) Der Wert  $\tau(\varepsilon) := \min\{t \in \mathbb{N}_0 : d(t) \leq \varepsilon\}$  heißt *Mischzeit* der Markov-Kette.
- 2) Eine Klasse von Markov-Ketten heißt *schnell mischend*, falls ein Polynom  $p \in \mathbb{R}[X]$  so existiert, dass mit  $N = |\mathcal{X}|$  für jede der Markov-Ketten gilt:

$$\tau(\varepsilon) \in \mathcal{O}\left(p\left(\log \frac{N}{\varepsilon}\right)\right)$$

Möchte man Markov-Ketten zur hinreichend uniformen Zufallserzeugung verwenden, so entspricht *schnell mischend* der wünschenswerten Eigenschaft, dass die benötigte Anzahl an Simulationsschritten polynomiell in einem Parameter  $n \sim \log |\mathcal{X}|$  ist. Denn wie folgende Proposition zeigt, genügt es dafür  $\tau(\varepsilon_0) \in \mathcal{O}(p(\log |\mathcal{X}|))$  für ein beliebiges aber festes  $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$  zu zeigen, da  $\tau(\varepsilon)$  von  $\varepsilon$  immer logarithmisch abhängt.

**Proposition 2.9** (Vgl. [LPW09] Absch. 4.5 S. 54]). Mit festem  $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$  gilt für beliebiges  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ :

$$\tau(\varepsilon) \leq \left\lceil c \cdot \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\rceil \tau(\varepsilon_0) \quad \text{wobei } c := -\frac{1}{\log(2\varepsilon_0)}$$

*Beweis.* Sei  $l \in \mathbb{N}_{>0}$ . Mit Prop. 2.5 1) und Prop. 2.7 folgt:

$$d(l \cdot \tau(\varepsilon_0)) \leq \bar{d}(l \cdot \tau(\varepsilon_0)) \leq \bar{d}(\tau(\varepsilon_0))^l \leq (2d(\tau(\varepsilon_0)))^l \leq (2\varepsilon_0)^l$$

Für  $l \geq \lceil c \cdot \log(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$  mit  $c := -\frac{1}{\log(2\varepsilon_0)}$  ist dann  $(2\varepsilon_0)^l \leq \varepsilon$  und damit  $\tau(\varepsilon) \leq l \cdot \tau(\varepsilon_0)$ .  $\square$

**Beispiel 2.10.** Ein Kartendeck mit  $n$  Karten wird gemischt, indem wiederholt zufällig ein Paar hintereinanderliegender Karten gewählt wird, eine Münze geworfen wird, und bei Kopf die beiden Karten aufsteigend und bei Zahl absteigend sortiert werden.

Dies entspricht einer symmetrischen Markov-Kette auf der Menge der  $|\mathcal{X}| = n!$  Permutationen. In [Wil04, Th. 6] wird gezeigt, dass nach

$$t \geq \left( \frac{6}{\pi^2} + o(1) \right) n^3 \log n$$

Schritten  $d(t) \leq o(1)$  gilt, wobei sich  $o(1)$  auf eine nur von  $n$  abhängige Funktion bezieht. Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ist dann  $\tau(\varepsilon) \in \mathcal{O}(n^3 \log n)$  und damit die Markov-Kette (formaler: die Klasse der Markov-Ketten) schnell mischend.

Im Folgenden werden verschiedene Techniken aufgezeigt, die häufig zur Abschätzung von  $\tau(\varepsilon)$  und zur Überprüfung von *schnell mischend* zum Einsatz kommen.

### 2.1.3. Schranken an Mischzeit über Eigenwerte

Im Spezialfall folgender Definition kann die Betrachtung der Eigenwerte der Übergangsmatrix  $P$  Erkenntnisse über die Mischzeit liefern. Wir geben hier nur Resultate und Intuition wieder, dabei der Übersichtsarbeit [Gur16] folgend.

**Definition 2.11.** Eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum  $\mathcal{X}$ , Übergangsmatrix  $P$  und existenter stationärer Verteilung  $\pi$  heißt *reversibel*, falls für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  gilt:

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$$

Die in dieser Arbeit betrachteten Markov-Ketten sind immer symmetrisch, woraus reversibel sofort folgt. Man rechnet nach, dass im reversiblen Fall die Abbildung

$$\langle v, w \rangle := \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{v(x)w(x)}{\pi(x)}$$

ein Skalarprodukt des Raumes  $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  ist, zu dem  $P$  ein selbstadjungierter linearer Operator ist, d.h. die Eigenschaft  $\langle vP, w \rangle = \langle v, wP \rangle$  erfüllt. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass alle Eigenwerte  $\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_{|\mathcal{X}|-1}$  reellwertig sind und eine Orthonormalbasis bestehend aus Links-Eigenvektoren  $v_0, \dots, v_{|\mathcal{X}|-1} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  von  $P$  existiert. Ferner beobachtet man:

- Es gilt  $|\lambda| \leq 1$  für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $P$ . Denn mit einem Rechts-Eigenvektor  $v$  gilt aufgrund der Zeilensummen  $|\lambda| \cdot \|v\|_{\infty} = \|Pv\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty}$ .
- Im irreduziblen Fall ist die stationäre Verteilung eindeutig. Daher ist der Links-eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_0 = 1$  eindimensional und wird vom Eigenvektor  $v_0 = \pi$  aufgespannt. Es gilt also  $1 = \lambda_0 > \lambda_1$ .

## 2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

- Im aperiodischen Fall ist  $-1$  kein Eigenwert von  $P$ . In der Tat kann man  $v \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}, v \neq 0, vP = -v$  annehmend zeigen, dass  $\mathcal{X}_- := \{x \in \mathcal{X} : v(x) < 0\}$  und  $\mathcal{X}_+ := \{x \in \mathcal{X} : v(x) > 0\}$  eine Bipartition von  $\mathcal{X}$  bilden, für welche  $P(x, y) > 0$  stets impliziert, dass entweder  $x \in \mathcal{X}_-$  und  $y \in \mathcal{X}_+$  oder  $x \in \mathcal{X}_+$  und  $y \in \mathcal{X}_-$ . Es muss für beliebiges  $x \in \mathcal{X}$  und  $t$  mit  $P^t(x, x) > 0$  dann  $t \in 2\mathbb{Z}$  gelten, im Widerspruch zur Aperiodizität (Details siehe z.B. [Lee S. 3]).

Insgesamt also  $1 = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{|\mathcal{X}|-1} > -1$  im Falle einer reversiblen, aperiodischen und irreduziblen Markov-Kette. Eine beliebige Startverteilung  $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$  kann nun in

$$\mu = c_0\pi + c_1v_1 + \dots + c_{|\mathcal{X}|-1}v_{|\mathcal{X}|-1}$$

zerlegt werden, wobei  $c_i = \langle \mu, v_i \rangle$ . Man berechnet  $c_0 = 1$ . Damit lässt sich die Verteilung nach  $t \geq 0$  Schritten als

$$\mu P^t = \pi + c_1\lambda_1^t v_1 + \dots + c_{|\mathcal{X}|-1}\lambda_{|\mathcal{X}|-1}^t v_{|\mathcal{X}|-1}$$

ausdrücken. Aus obiger Gleichung folgt sofort die wohlbekanntete Konvergenz  $\mu P^t \rightarrow \pi$ . Doch die Eigenwertbetrachtung liefert mehr: Man sieht, dass die Konvergenzgeschwindigkeit vom betragsmäßig größten Eigenwert ungleich 1,  $\lambda^* := \max\{\lambda_1, |\lambda_{|\mathcal{X}|-1}|\}$ , dominiert wird. Der Abstand  $1 - \lambda^*$  heißt *Spektralabstand*. Je größer dieser, desto schneller die Konvergenz. Dies wird durch folgendes Theorem quantifiziert, für dessen Beweis auf [LPW09, Th. 12.4, 12.5 S. 163 f.] verwiesen sei.

**Theorem 2.12.** *Von einer aperiodischen, irreduziblen, reversiblen Markov-Kette auf endlichem Zustandsraum  $\mathcal{X}$  mit stationärer Verteilung  $\pi$  habe die Übergangsmatrix  $P$  die Eigenwerte  $1 = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{|\mathcal{X}|-1} > -1$ , und sei  $\lambda^* := \max\{\lambda_1, |\lambda_{|\mathcal{X}|-1}|\}$ . Dann gelten für die Mischzeit folgende Schranken:*

$$\frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \log \left( \frac{1}{2\varepsilon} \right) \leq \tau(\varepsilon) \leq \frac{1}{1 - \lambda^*} \log \left( \frac{1}{\varepsilon \cdot \min\{\pi(x) : x \in \mathcal{X}\}} \right)$$

Möchte man die lästige Fallunterscheidung in  $\lambda^* = \max\{\lambda_1, |\lambda_{|\mathcal{X}|-1}|\}$  vermeiden, so bietet es sich an, anstatt der Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $P$  die Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $P' := \frac{1}{2}(\mathbb{I} + P)$  zu betrachten. Diese besitzt nämlich nur positive Eigenwerte, denn  $P'v = \lambda v$  impliziert  $Pv = (2\lambda - 1)v$ , daher  $|2\lambda - 1| \leq 1$  und somit  $\lambda \geq 0$ . Die abgewandelte Markov-Kette zu  $P'$  wird als zugehörige *träge Markov-Kette* (engl. *lazy Markov chain*) bezeichnet, da sie in jedem Schritt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  im aktuellen Zustand verharrt und sich ansonsten wie die ursprüngliche Markov-Kette verhält.

Theorem [2.12] ist meist schwierig direkt anzuwenden, denn wie sollen Eigenwerte einer Übergangsmatrix berechnet werden, deren Größe  $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{X}|$  typischerweise exponentiell

und mitunter nicht einmal genau bekannt ist? Jedoch liefert es die theoretische Grundlage, um aufbauend darauf weitere Werkzeuge zur Abschätzung von  $\tau(\varepsilon)$  zu entwickeln.

#### 2.1.4. Obere Schranken an Mischzeit durch Kopplung

**Definition 2.13.** Seien  $\mu, \mu' : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, 1]$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Menge  $\mathcal{X}$ . Eine Kopplung von  $\mu$  und  $\mu'$  ist eine Zufallsvariable  $(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  mit Randverteilungen  $\mu$  und  $\mu'$ , das bedeutet:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X} : \sum_{y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[(X, Y) = (x, y)] &= \mu(x) \\ \forall y \in \mathcal{X} : \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[(X, Y) = (x, y)] &= \mu'(y) \end{aligned}$$

Eine triviale Kopplung ist die Zufallsvariable  $(X, Y)$  mit dem Produktmaß  $\mu \otimes \mu'$ , d.h. mit unabhängigen Komponenten  $X$  und  $Y$ . Als besonders interessant werden sich jedoch abhängige Kopplungen erweisen. Die Motivation von Kopplungen liegt in folgendem Lemma.

**Lemma 2.14** (Vgl. [\[LPW09\]](#), Prop. 4.7 S. 50). Seien  $\mu, \mu' : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, 1]$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Menge  $\mathcal{X}$ . Dann gilt:

$$\|\mu - \mu'\|_{TV} = \min\{\mathbb{P}[X \neq Y] : (X, Y) \text{ ist Kopplung von } \mu \text{ und } \mu'\}$$

*Beweis.* Für bestimmtes  $A \subseteq \mathcal{X}$  und beliebige Kopplung  $(X, Y)$  von  $\mu$  und  $\mu'$  gilt:

$$\begin{aligned} \|\mu - \mu'\|_{TV} &= \mu(A) - \mu'(A) = \mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A] \\ &\leq \mathbb{P}[X \in A, Y \notin A] \leq \mathbb{P}[X \neq Y] \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass das Minimum angenommen wird. Dazu konstruiere folgende Kopplung von  $\mu$  und  $\mu'$ : Mit Kopf-Wahrscheinlichkeit  $p := 1 - \|\mu - \mu'\|_{TV}$  wirf eine Münze. Bei Kopf wähle  $X, Y$  gleich: Wähle zunächst  $Z$  entsprechend der Verteilung

$$\mathbb{P}[Z = z] = \frac{\min\{\mu(z), \mu'(z)\}}{p} = \frac{\min\{\mu(z), \mu'(z)\}}{1 - \|\mu - \mu'\|_{TV}}$$

2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

und setze  $X = Y = Z$ . Bei Zahl wähle  $X, Y$  ungleich, nämlich verteilt entsprechend

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu'(x)}{\|\mu - \mu'\|_{\text{TV}}} & \text{falls } \mu(x) > \mu'(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[Y = y] = \begin{cases} \frac{\mu'(y) - \mu(y)}{\|\mu - \mu'\|_{\text{TV}}} & \text{falls } \mu'(y) > \mu(y) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir zeigen, dass dies eine wohldefinierte Verteilung ist, und dass das Paar  $(X, Y)$  eine Kopplung von  $\mu$  und  $\mu'$  ist. Es gilt mit Prop. [2.3](#):

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{X}} \min\{\mu(z), \mu'(z)\} &= \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) \leq \mu'(z)}} \mu(z) + 0 + \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) > \mu'(z)}} \mu'(z) \\ &= \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) \leq \mu'(z)}} \mu(z) + \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) > \mu'(z)}} \mu(z) - \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) > \mu'(z)}} \mu(z) + \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) > \mu'(z)}} \mu'(z) \\ &= 1 - \left( \sum_{\substack{z \in \mathcal{X} \\ \mu(z) > \mu'(z)}} (\mu(z) - \mu'(z)) \right) = 1 - \|\mu - \mu'\|_{\text{TV}} = p \end{aligned}$$

Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Verteilung  $\mathbb{P}[(X, Y) = (z, z) \mid \text{Kopf}]$ . Ebenso folgt aus Prop. [2.3](#) die Wohldefiniertheit von  $\mathbb{P}[(X, Y) = (x, y) \mid \text{Zahl}]$ . Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = x] &= p \cdot \mathbb{P}[X = x \mid \text{Kopf}] + (1 - p) \cdot \mathbb{P}[X = x \mid \text{Zahl}] \\ &= \min\{\mu(x), \mu'(x)\} + \begin{cases} \mu(x) - \mu'(x) & \text{falls } \mu(x) > \mu'(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

Analog gilt  $\mathbb{P}[Y = y] = \mu'(y)$ . Somit ist  $(X, Y)$  in der Tat eine Kopplung von  $\mu$  und  $\mu'$  mit  $\mathbb{P}[X \neq Y] = 1 - p = \|\mu - \mu'\|_{\text{TV}}$ .  $\square$

Als erste Anwendung von Kopplungen in Verbindung mit Lemma [2.14](#) liefern wir den ausstehenden Beweis von Prop. [2.7](#).

*Beweis (Prop. [2.7](#)).* Seien  $x, y \in \mathcal{X}$  beliebig. Nach Lemma [2.14](#) gibt es zu den Verteilungen  $P^t(x, \cdot)$  und  $P^t(y, \cdot)$  eine Kopplung  $(X, Y)$  mit

$$\|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}} = \mathbb{P}[X \neq Y] .$$

Es gilt dann für beliebiges  $w \in \mathcal{X}$ :

$$P^{t+t'}(x, w) = \sum_{z \in \mathcal{X}} P^t(x, z) P^{t'}(z, w) = \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[X = z] P^{t'}(z, w) = \mathbb{E}[P^{t'}(X, w)]$$

und analog  $P^{t+t'}(y, w) = \mathbb{E}[P^{t'}(Y, w)]$ . Daraus und zweimalig mit Prop. 2.3 folgt:

$$\begin{aligned} \|P^{t+t'}(x, \cdot) - P^{t+t'}(y, \cdot)\|_{\text{TV}} &= \frac{1}{2} \sum_{w \in \mathcal{X}} \left| P^{t+t'}(x, w) - P^{t+t'}(y, w) \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{w \in \mathcal{X}} \left| \mathbb{E} \left[ P^{t'}(X, w) - P^{t'}(Y, w) \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \sum_{w \in \mathcal{X}} \left| P^{t'}(X, w) - P^{t'}(Y, w) \right| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \|P^{t'}(X, \cdot) - P^{t'}(Y, \cdot)\|_{\text{TV}} \right] \end{aligned}$$

Der letzte Term ist Null im Falle  $X = Y$  und andernfalls per Definition durch  $\bar{d}(t')$  beschränkt. Damit folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \bar{d}(t+t') &= \max_{x, y \in \mathcal{X}} \|P^{t+t'}(x, \cdot) - P^{t+t'}(y, \cdot)\|_{\text{TV}} \leq \max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[X \neq Y] \bar{d}(t') \\ &= \max_{x, y \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}} \cdot \bar{d}(t') = \bar{d}(t) \bar{d}(t') \end{aligned}$$

□

**Definition 2.15.** Sei  $\mathcal{X}$  endlicher Zustandsraum und sei  $P : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  Übergangsmatrix einer Markov-Kette auf  $\mathcal{X}$ . Eine Markov-Kette  $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  auf Zustandsmenge  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  heißt *Kopplung* von  $P$ , falls gilt:

- 1) Die Komponenten  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  sind jeweils Markov-Ketten auf Zustandsraum  $\mathcal{X}$  mit Übergangsmatrix  $P$ .
- 2) Für alle  $t' > t$  gilt  $\mathbb{P}[X_{t'} = Y_{t'} | X_t = Y_t] = 1$ .

Ferner heißt die Zufallsvariable  $\tau_c := \min\{t \in \mathbb{N}_0 : X_t = Y_t\}$  *Kopplungszeit*.

Eine Kopplung lässt sich beispielsweise wie folgt konstruieren: Man definiert  $X_0$  und  $Y_0$  mit beliebigen Startverteilungen  $\mu_x, \mu_y : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  und setzt dies rekursiv fort: Gilt  $X_t \neq Y_t$ , so werden  $X_{t+1}$  und  $Y_{t+1}$  unabhängig voneinander<sup>4</sup> entsprechend

<sup>4</sup>Dies ist nur ein Beispiel. Im Allgemeinen geschieht dies nicht unabhängig.

Übergangsmatrix  $P$  gewählt, d.h.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t] &= P(x_t, x_{t+1}) \\ \mathbb{P}[Y_{t+1} = y_{t+1} | Y_t = y_t] &= P(y_t, y_{t+1}),\end{aligned}$$

gilt jedoch  $X_t = Y_t$ , so werden  $X_{t+1}$  und  $Y_{t+1}$  identisch entsprechend  $P$  gewählt, also  $Y_{t+1} = X_{t+1}$ . Bei  $(X_n)$  und  $(Y_n)$  handelt es sich um Kopien der gleichen Markov-Kette (ggf. mit unterschiedlichen Startverteilungen), jedoch mit der besonderen Eigenschaft, dass wenn  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  bei  $t = \tau_c$  erstmalig zusammenlaufen, sie sich nie mehr trennen.

Der Knackpunkt, den es zu verstehen gilt, ist dieser:  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  sind jeweils für sich betrachtet Markov-Ketten mit Übergangsmatrix  $P$ , es gilt also  $X_t \sim \mu_x P^t$  und  $Y_t \sim \mu_y P^t$ , jedoch sind  $X_t$  und  $Y_t$  nicht unabhängig: Ab  $t \geq \tau_c$  stammen die Übergänge aus derselben „Zufallsquelle“. Die gemeinsame Verteilung von  $(X_t, Y_t)$  ist eine Kopplung der Verteilungen  $\mu_x P^t$  und  $\mu_y P^t$ . Durch folgendes Theorem lässt sich dann  $\|\mu_x P^t - \mu_y P^t\|_{TV}$  abschätzen. Dieses Theorem macht Kopplungen mit besonders kleiner Kopplungszeit  $\tau_c$  interessant.

**Theorem 2.16** (Vgl. [LPW09](#) Th. 5.4 S. 62). *Sei  $P$  Übergangsmatrix einer aperiodischen, irreduziblen Markov-Kette auf endlichem Zustandsraum  $\mathcal{X}$ . Seien  $x, y \in \mathcal{X}$  und  $(X_t, Y_t)$  eine Kopplung mit  $X_0 = x$  und  $Y_0 = y$  und mit Kopplungszeit  $\tau_c$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ :*

$$\|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{TV} \leq \mathbb{P}[\tau_c > t]$$

*Beweis.* Für jedes  $t \in \mathbb{N}$  sind die Randverteilungen der Zufallsvariable  $(X_t, Y_t)$  die Verteilungen von  $X_t \sim P^t(x, \cdot)$  und  $Y_t \sim P^t(y, \cdot)$ , daher ist  $(X_t, Y_t)$  eine Kopplung von  $P^t(x, \cdot)$  und  $P^t(y, \cdot)$  im Sinne von Def. [2.13](#). Mit Lemma [2.14](#) folgt:

$$\|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{TV} \leq \mathbb{P}[X_t \neq Y_t] = \mathbb{P}[\tau_c > t]$$

□

**Definition 2.17.** Großkopplungen

- 1) Eine Familie  $((X_t^x)_{t \geq 0})_{x \in \mathcal{X}}$  von Markov-Ketten  $(X_t^x)$  auf Zustandsraum  $\mathcal{X}$  und Übergangsmatrix  $P$  mit  $X_0^x = x$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  heißt *Großkopplung* von  $P$  (engl. *grand coupling*), falls  $(X_t^x, Y_t^y)$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  eine Kopplung von  $(X_t^x)$  und  $(Y_t^y)$  ist.

- 2) Sei zudem auf  $\mathcal{X}$  eine Partialordnung  $\leq$  definiert, so heißt die Großkopplung *monoton*, falls zusätzlich gilt:

$$\forall t \in \mathbb{N}_0 \forall x, y \in \mathcal{X} : \mathbb{P}[X_{t+1}^x \leq X_{t+1}^y | X_t^x \leq X_t^y] = 1$$

- 3) Für  $x, y \in \mathcal{X}$  bezeichne  $\tau_c(x, y)$  die Kopplungszeit  $\tau_c$  der Kopplung  $(X_t^x, X_t^y)$ .

Eine Großkopplung  $(X_t^x)_{x \in \mathcal{X}}$  betrachtet also eine Markov-Kette für jeden Startzustand  $x \in \mathcal{X}$ . Treffen sich zu einem Zeitpunkt  $t$  zwei dieser Ketten, d.h.  $X_t^x = X_t^{x'}$ , so laufen sie fortan zusammen:  $X_{t'}^x = X_{t'}^{y'}$  für alle  $t' \geq t$ .

**Theorem 2.18** (Vgl. [LPW09, Cor. 5.5 S. 62], [Ald83, (3.13) S. 252]). Sei  $(X_t^x)$  Großkopplung auf endlichem Zustandsraum  $\mathcal{X}$  mit aperiodischer und irreduzibler Übergangsmatrix  $P$ . Es gilt:

- 1)  $d(t) \leq \max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[\tau_c(x, y) > t]$
- 2)  $\tau\left(\frac{1}{2e}\right) \leq 2eT$  mit  $T := \max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[\tau_c(x, y)]$  und  $e = \exp(1)$

*Beweis.* Es gilt mit Prop. 2.5 und Theorem 2.16

$$d(t) \leq \bar{d}(t) = \max_{x, y \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}} \leq \max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[\tau_c(x, y) > t]$$

Dies ist Aussage 1). Da für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  dabei

$$\mathbb{P}[\tau_c(x, y) > t] = \sum_{t' > t} \mathbb{P}[\tau_c(x, y) = t'] \leq \frac{1}{t} \sum_{t' \geq 0} t' \cdot \mathbb{P}[\tau_c(x, y) = t'] = \frac{1}{t} \mathbb{E}[\tau_c(x, y)]$$

gilt, folgt  $d(t) \leq \frac{T}{t}$ . Dies zeigt die Aussage 2), da für  $t \geq 2eT$  nun  $d(t) \leq \frac{1}{2e}$  gilt.  $\square$

Um die Terme  $\max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}[\tau_c(x, y) > t]$  und  $\max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[\tau_c(x, y)]$  in Theorem 2.18 abzuschätzen, kann im Falle einer monotonen Großkopplung folgendes Lemma helfen.

**Lemma 2.19.** Sei  $(X_t^x)$  monotone Großkopplung auf einer Partialordnung  $(\mathcal{X}, \leq)$ , die ein Minimum  $\check{x} \in \mathcal{X}$  und ein Maximum  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  besitzt. Dann gilt  $\tau_c(x, y) \leq \tau_c(\check{x}, \hat{x})$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$ .

*Beweis.* Man zeigt dies über ein Quetschargument: Für beliebigen Startzustand  $x \in \mathcal{X}$  gilt  $\check{x} \leq x \leq \hat{x}$ , also  $X_0^{\check{x}} \leq X_0^x \leq X_0^{\hat{x}}$ . Induktiv folgt  $X_t^{\check{x}} \leq X_t^x \leq X_t^{\hat{x}}$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ ,

und zum Zeitpunkt  $t = \tau_c(\tilde{x}, \hat{x})$  gilt Gleichheit. Da  $x \in \mathcal{X}$  beliebig, sind dann bereits alle Markov-Ketten gekoppelt.  $\square$

### 2.1.5. Kopplung aus der Vergangenheit

Es ist verblüffend, dass Markov-Ketten eingesetzt werden können, um einen Zustand  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  nicht nur approximativ, sondern exakt entsprechend ihrer stationären Verteilung  $\pi$  zufällig zu erzeugen. Die dafür notwendige Technik „*Coupling from the past*“ wurde 1996 von Propp und Wilson entwickelt, fast ein Jahrhundert nach der Einführung von Markov-Ketten durch Markov [\[PW96\]](#).

Eine Großkopplung wie in Def. [2.17](#) mit Zustandsraum  $\mathcal{X}$  und Übergangsmatrix  $P$  lässt sich wie folgt realisieren: Erzeuge unabhängig für jedes  $t \in \mathbb{N}_0$  eine zufällige Abbildung  $F_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  so verteilt, dass  $\mathbb{P}[F_t(x) = y] = P(x, y)$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  gilt. Für  $x \in \mathcal{X}$  setze  $X_0^x := x$  und rekursiv  $X_{t+1}^x := F_t(X_t^x)$  für  $t \geq 0$ . Dann ist die Familie  $(X_t^x)$  eine Großkopplung. Der im Folgenden beschriebene Algorithmus basiert auf der einfachen, jedoch zunächst nicht sehr intuitiven Idee, dieselbe Konstruktion einer Großkopplung zu verwenden, jedoch mit negativen Zeitindizes (daher „Vergangenheit“), und zwar so, dass (spätestens) zum Zeitpunkt  $t = 0$  alle Markov-Ketten gekoppelt sind.

Man erzeugt also für jedes  $t \in \mathbb{N}_0$  eine zufällige Abbildung  $F_{-t} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  so, dass  $\mathbb{P}[F_{-t}(x) = y] = P(x, y)$ . Algorithmisch erzeugt man dabei die  $F_{-t}$  nicht alle auf einmal, denn dafür wäre unendliche Laufzeit vonnöten, sondern bei erstmaliger Verwendung.

Setze die Notation  $F_{-t}^0 := F_0 \circ \dots \circ F_{-t}$ . Die Bildmenge von  $F_{-t}^0$  kann mit jeder weiteren Komposition nur kleiner werden:  $|F_0^0(\mathcal{X})| \geq |F_{-1}^0(\mathcal{X})| \geq |F_{-2}^0(\mathcal{X})| \geq \dots$ . Irreduzibilität und Aperiodizität von  $P$  vorausgesetzt, existiert ein minimales  $T \gg 0$  und ein eindeutiges  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  so, dass  $F_{-t}^0(\mathcal{X}) = \{\bar{x}\}$  für alle  $t \geq T$  gilt. Dieses  $T$ , ab dem die Abbildung  $F_{-t}^0$  die konstante Abbildung  $F_{-t}^0 \equiv \bar{x}$  ist, ist eine Zufallsvariable, denn es ist abhängig von der zufälligen Wahl der  $F_0, F_{-1}, F_{-2}, \dots$ .

Nun ist  $\bar{x}$  überraschend exakt nach  $\pi$  verteilt, denn mit beliebigem  $x \in \mathcal{X}$  gilt:

$$\mathbb{P}[F_{-T}^0(\mathcal{X}) = \{\bar{x}\}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[F_{-t}^0(x) = \bar{x}] = \lim_{t \rightarrow \infty} P^t(x, \bar{x}) = \pi(\bar{x})$$

Dies führt zu folgender algorithmischen Idee: Man wählt  $T \gg 0$  zunächst beliebig groß. Gilt bereits  $|F_{-T}^0(\mathcal{X})| = 1$ , so gib das eindeutige Bild von  $F_{-T}^0$  aus. Falls nicht, so vergrößere  $T$ , zum Beispiel durch Verdopplung, und iteriere. Dieses Verfahren ist typischerweise interessant, wenn  $|\mathcal{X}|$  unbekannt oder exponentiell groß ist. Dann entsteht jedoch unter anderem die Frage, wie  $|F_{-T}^0(\mathcal{X})| = 1$  algorithmisch effizient

überprüft werden kann. Eine allgemeine Antwort darauf existiert leider nicht, wohl jedoch im Spezialfall, in dem die Abbildungen  $(F_{-t})_{t \in \mathbb{N}_0}$  monoton bzgl. einer Partialordnung  $\leq$  auf  $\mathcal{X}$  mit Minimum  $\tilde{x}$  und Maximum  $\hat{x}$  erzeugt werden können, d.h. mit  $x, y \in \mathcal{X}, x \leq y$  gilt  $\mathbb{P}[F_{-t}(x) \leq F_{-t}(y)] = 1$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ . In diesem Fall gilt nämlich  $F_{-t}^0(\mathcal{X}) = \{\tilde{x}\}$  genau dann, wenn  $F_{-t}^0(\tilde{x}) = F_{-t}^0(\hat{x}) = \tilde{x}$ , wie man durch ein Quetschargument ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.19 sieht. Algorithmus 1 setzt dies wie beschrieben um.

**Eingabe:** Übergangsmatrix  $P$  von irred. aperiod. Markov-Kette auf  $(\mathcal{X}, \leq)$

**Ausgabe:**  $\bar{x} \in \mathcal{X}, \bar{x} \sim \pi$

```

T ← -1; T' ← T_start
while True do
  for i ← T + 1, ..., T' do
    Wähle  $F_{-i} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  zufällig so,
    dass  $\mathbb{P}[F_{-i}(x) = y] = P(x, y)$  und  $F_{-i}$  monoton bzgl.  $\leq$ 
  end
  T ← T'
  if  $(F_{-T} \circ \dots \circ F_0)(\tilde{x}) = (F_{-T} \circ \dots \circ F_0)(\hat{x})$  then
    return  $(F_{-T} \circ \dots \circ F_0)(\tilde{x})$ 
  end
  T' ← 2T
end

```

**Algorithmus 1:** Kopplung aus der Vergangenheit

Bei diesem Verfahren gilt es zwei mögliche Fallen zu beachten. Erstens lässt sich die Kopplung aus der Vergangenheit nicht (ohne weiteres) durch eine Kopplung „in die Zukunft“ ersetzen: Erzeugt man sukzessive  $F_0, \dots, F_t$  bis zum kleinsten  $t$  mit  $|(F_t \circ \dots \circ F_0)(\mathcal{X})| = 1$ , so ist das eindeutige Bildelement im Allgemeinen nicht verteilt nach  $\pi$ . Zweitens ist es essentiell, jedes der  $F_{-t}$  nur einmal zufällig zu erzeugen, dann zu speichern und zukünftig wiederzuverwenden. Andernfalls gilt ebenso im Allgemeinen nicht  $\bar{x} \sim \pi$ .

Letzteres wirft die Frage auf, wie die  $F_{-t}$  technisch effizient kodiert werden können, ohne sich das Bild eines jeden  $x \in \mathcal{X}$  zu speichern. Es ist stets möglich, die  $F_{-t}$  mittels eines deterministischen Verfahrens aus einer uniform auf dem Intervall  $[0, 1]$  verteilten Zufallsvariable  $U_t$  zu generieren. Somit muss für jedes  $F_{-t}$  nur eine reelle Zahl (bis auf hinreichende Genauigkeit) gezogen und gespeichert werden. Wenn die möglichen Zustandsübergänge betrachteter Markov-Kette „Flips“ entsprechen, wie etwa im Beispiel des Kartendecks (Bsp. 2.10) Sortierungen eines Kartenpaares an bestimmter Position, so genügt es, für jedes  $F_{-t}$  nur eine Position für den Flip zu wählen und diese zu speichern.

Abschließend sei zu diesem Verfahren angemerkt, dass es auch benutzt werden kann,

um die Kopplungszeit  $\max_{x,y \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[\tau_c(x,y)]$  der Großkopplung  $(X_t^x)$  empirisch zu untersuchen, denn diese entspricht genau dem minimalen  $T$ , für das  $F_{-T}^0(\check{x}) = F_{-T}^0(\hat{x})$  gilt und die Schleife terminiert.

### 2.1.6. Schranken an Mischzeit durch Flaschenhals

Ein *Flaschenhals* ist eine Partition der Zustandsmenge  $\mathcal{X}$  in zwei ähnlich große Klassen  $A, A^c \subset \mathcal{X}$ , zwischen denen Zustandsübergänge unwahrscheinlich sind. Es liegt nahe, dass ein solcher Flaschenhals das Mischen, d.h. die Konvergenz zur stationären Verteilung, verlangsamt. Man stelle sich bildhaft eine Sanduhr vor, deren Sand man durch Schütteln mischt und dabei die Position eines einzelnen gefärbten Kornes verfolgt. Es dauert lang, bis sich dieses nahezu gleich wahrscheinlich in beiden Kammern befindet.

**Definition 2.20.** Sei  $P$  Übergangsmatrix einer irreduziblen und aperiodischen Markov-Kette auf endlichem Zustandsraum  $\mathcal{X}$  und stationärer Verteilung  $\pi$ . Für  $A \subseteq \mathcal{X}$  heißt

$$\Phi(A) := \frac{1}{\pi(A)} \sum_{x \in A, y \in A^c} \pi(x)P(x,y)$$

*Flaschenhals-Verhältnis* (engl. *bottleneck ratio*) von  $A$ . Ferner heißt

$$\Phi^* := \min \left\{ \Phi(A) : A \subset \mathcal{X}, \pi(A) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

*Flaschenhals-Verhältnis* der gesamten Markov-Kette.

Angenommen  $X_t \sim \pi$  und damit auch  $X_{t'} \sim \pi$  für alle  $t' \geq t$ , dann ist

$$\Phi(A) = \mathbb{P}[X_{t+1} \notin A | X_t \in A].$$

Also ist das Flaschenhals-Verhältnis  $\Phi(A)$  in der Tat dann klein, wenn es unter der stationären Verteilung  $\pi$  unwahrscheinlich ist,  $A$  im nächsten Schritt zu verlassen, gegeben man befindet sich in  $A$ . Falls  $A \subset \mathcal{X}$  kein unwesentlich kleines Ereignis ist, etwa möglichst  $\pi(A) = \frac{1}{2}$ , so führen seltene Übergänge zwischen  $A$  und  $A^c$  dann intuitiv zu einem langsameren Mischen. Zwar gilt für gewöhnlich nicht  $X_t \sim \pi$ , doch zumindest konvergiert  $X_t \rightarrow \pi$ . Folgendes Theorem bestätigt diese Intuition.

**Theorem 2.21** (Vgl. [\[LPW09\]](#), Th 7.4 S. 90). *Für eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette auf Zustandsraum  $\mathcal{X}$  mit stationärer Verteilung  $\pi$  gilt für  $A \subset \mathcal{X}$ ,  $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$  und  $\varepsilon > 0$ :*

$$\tau(\varepsilon) \geq \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\Phi(A)}$$

*Beweis.* Mit selbem Zustandsraum und Übergangswahrscheinlichkeiten sei  $(X_t)$  eine stationäre Markov-Kette, d.h.  $X_0 \sim \pi$  und folglich  $X_t \sim \pi P^t = \pi$  für alle  $t \geq 0$ . Für  $A \subseteq \mathcal{X}$  und  $t \geq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_0 \in A, X_t \notin A] &\leq \mathbb{P}\left[\bigvee_{r=1}^t [X_{r-1} \in A, X_r \notin A]\right] \leq \sum_{r=1}^t \mathbb{P}[X_{r-1} \in A, X_r \notin A] \\ &= t \cdot \mathbb{P}[X_0 \in A, X_1 \notin A] \\ &= t \sum_{x \in A, y \in A^c} \mathbb{P}[X_0 = x] \mathbb{P}[X_1 = y | X_0 = x] \\ &= t \sum_{x \in A, y \in A^c} \pi(x) P(x, y) = t \pi(A) \Phi(A) \end{aligned}$$

Dabei wurde für die erste Gleichheit genutzt, dass alle  $X_r$  identisch verteilt sind. Division beider Seiten durch  $\pi(A)$  zeigt  $\mathbb{P}[X_t \notin A | X_0 \in A] \leq t \Phi(A)$ , und über das Gegenereignis folgt  $\mathbb{P}[X_t \in A | X_0 \in A] \geq 1 - t \Phi(A)$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} \frac{\pi(x)}{\pi(A)} P^t(x, A) &= \frac{1}{\pi(A)} \sum_{x \in A} \mathbb{P}[X_t \in A | X_0 = x] \mathbb{P}[X_0 = x] \\ &= \frac{1}{\pi(A)} \mathbb{P}[X_t \in A, X_0 \in A] = \mathbb{P}[X_t \in A | X_0 \in A] \\ &\geq 1 - t \Phi(A), \end{aligned}$$

daher existiert  $x \in A$  mit  $P^t(x, A) \geq 1 - t \Phi(A)$ . Also gilt für dieses

$$P^t(x, A) - \pi(A) \geq 1 - t \Phi(A) - \pi(A).$$

Es gilt  $d(t) \geq 1 - t \Phi(A) - \pi(A)$ , denn ist die rechte Seite negativ, so gilt dies trivialerweise, andernfalls folgt dies mit der Definition von  $\|\cdot\|_{\text{TV}}$  aus voriger Ungleichung. Für  $A \subseteq \mathcal{X}$  mit  $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$  und alle  $t < \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\Phi(A)}$  gilt dann  $d(t) > \varepsilon$ , daher  $\tau(\varepsilon) \geq \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\Phi(A)}$ .  $\square$

**Theorem 2.22** (Vgl. [SJ88, Lemma 3.3]). *Für eine aperiodische, irreduzible und reversible Markov-Kette gilt für den zweitgrößten Eigenwert  $\lambda_1$  der Übergangsmatrix  $P$ :*

$$\lambda_1 \leq 1 - \frac{(\Phi^*)^2}{2}$$

Theorem 2.22 liefert ein Gegenstück zu Theorem 2.21 da es in Verbindung mit Theorem 2.12 eine obere Schranke an  $\tau(\varepsilon)$  liefert. Für den Beweis verweisen wir auf [SJ88].

### 2.1.7. Obere Schranken an Mischzeit durch Stauung

Im vorigen Abschnitt wurde gesehen, wie ein Flaschenhals das Mischen verlangsamt. Nun überlegt man sich als Gegenstrategie, dass möglichst viele möglichst disjunkte Pfade von Zustandsübergängen zwischen beliebigen Paaren  $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  einen solchen Flaschenhals vermeiden und zu einem schnellen Mischen führen sollten. Genau diese Idee wird vom Konzept der *Kanonischen Pfade* aufgegriffen.

**Definition 2.23.** Sei  $M$  Markov-Kette auf endlichem Zustandsraum  $\mathcal{X}$  mit Übergangsmatrix  $P$  und stationärer Verteilung  $\pi$ .

- 1) Der gerichtete und gewichtete Graph  $G(M) = (\mathcal{X}, E)$  bestehe aus Kanten  $E(M) := \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : P(x, y) > 0\}$  und Gewichten  $w(x, y) := \pi(x)P(x, y)$ .
- 2) Eine Familie  $\{\gamma_{x,y}\}_{x \neq y}$  von gerichteten  $x$ - $y$ -Pfaden in  $G(M)$  für jedes Paar  $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ ,  $x \neq y$  heißt *Familie kanonischer Pfade* zu  $M$ .
- 3) Für eine Familie kanonischer Pfade  $\Gamma = \{\gamma_{x,y}\}$  heißt

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E(M)} \frac{1}{w(e)} \sum_{\substack{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \\ e \in \gamma_{x,y}}} \pi(x)\pi(y)$$

die *Stauung* (engl. *path congestion*) von  $\Gamma$ .

- 4) Der Wert  $\rho := \inf\{\rho(\Gamma) : \rho \text{ Fam. kan. Pfade zu } M\}$  heißt *Stauung* von  $M$ .

Man stelle sich vor, dass von jedem Zustand  $x \in \mathcal{X}$  zu jedem anderen Zustand  $y \in \mathcal{X}$ ,  $x \neq y$  ein Fluss der Stärke  $\pi(x)\pi(y)$  entlang des Pfades  $\gamma_{x,y}$  fließt. In dieser Anschauung misst der zu maximierende Term in der Definition von  $\rho(\Gamma)$  die „Auslastung“ oder „Stauung“ an einer Kante  $e$ , d.h. das Verhältnis von durch sie laufendem Fluss zu ihrem Gewicht  $w(e)$ . Will man eine Familie kanonischer Pfade niedriger Stauung finden, so muss man den „Fluss“ zwischen Zuständen gleichmäßig auf die Kanten von  $G(M)$  aufteilen. Je besser dies gelingt, desto vernetzter sind die Zustände und desto schneller die Mischzeit, wie folgendes Theorem bestätigt.

**Theorem 2.24** (Vgl. [Gur16](#) Lemma 4.1]). *Für jede reversible Markov-Kette mit kanonischen Pfaden  $\Gamma$  gilt für das Flaschenhals-Verhältnis:*

$$\Phi^* \geq \frac{1}{2\rho(\Gamma)}$$

*Beweis.* Sei  $\Gamma = \{\gamma_{x,y}\}$ . Sei  $A \subset \mathcal{X}$  mit  $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$  und  $\Phi^* = \Phi(A)$ . Betrachte die Kanten im Schnitt  $[A : A^c]$ . Ein Pfad  $\gamma_{x,y}$  mit  $x \in A$  und  $y \in A^c$  enthält mindestens eine Kante in  $[A : A^c]$  und trägt in dieser mit einem Fluss der Stärke  $\pi(x)\pi(y)$  bei. Summiert man über alle  $x \in A$  und  $y \in A^c$ , so fließt insgesamt durch  $[A : A^c]$  ein Fluss von mindestens  $\pi(A)\pi(A^c) \geq \frac{\pi(A)}{2}$ . Diesem Fluss steht ein Gesamtgewicht in  $[A : A^c]$  von

$$\sum_{x \in A, y \in A^c} \pi(x)P(x, y)$$

gegenüber. Also gibt es eine Kante  $e$  mit Auslastung

$$\frac{1}{w(e)} \sum_{\substack{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \\ e \in \gamma_{x,y}}} \pi(x)\pi(y) \geq \frac{\pi(A)}{2} \left( \sum_{x \in A, y \in A^c} \pi(x)P(x, y) \right)^{-1} = \frac{1}{2\Phi(A)} = \frac{1}{2\Phi^*} .$$

Maximieren linker Seite über  $e$  und Umstellen liefert das Ergebnis.  $\square$

## 2.2. Erzeugung einer hexagonalen Rhombenpflasterung

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem zufälligen Erzeugen eines einfachen Arrangements mit drei Klassen, d.h. der Form  $(n_1, n_2, n_3)$ . Dies ist äquivalent zum zufälligen Erzeugen einer Rhombenpflasterung eines von drei Vektoren erzeugten Zonotops, also eines Hexagons. Wir geben hier die Ergebnisse aus [LRS95](#) wieder.

### 2.2.1. Abschätzung von Kopplungszeiten durch Abstandsfunktion

Sei  $(X_t, Y_t)$  Kopplung zweier Markov-Ketten auf Zustandsraum  $\mathcal{X}$ . Wenn  $X_t$  und  $Y_t$  mit jedem Schritt  $t \rightarrow t + 1$  im Erwartungsfall „näher“ kommen, bis sie schließlich zusammenlaufen, erlaubt dies eine Abschätzung der Kopplungszeit  $\tau_c$ . Zur Formalisierung dient eine *Abstandsfunktion*, d.h. eine Abbildung  $\delta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit der Eigenschaft  $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$ . Für die Untersuchung des Abstandes zwischen  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  setze  $\delta(t) := \delta(X_t, Y_t)$  und  $\Delta\delta(t) := \delta(t + 1) - \delta(t)$ .

**Lemma 2.25.** *Sei  $(X_t, Y_t)$  Kopplung zweier Markov-Ketten mit einer entsprechenden Abstandsfunktion  $\delta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1, \dots, \delta_{max}\}$ . Falls für alle  $t \in \mathbb{N}_0$   $\mathbb{E}[\Delta\delta(t) | X_t, Y_t] \leq 0$  gilt und falls, wann immer  $X_t \neq Y_t$ ,  $\mathbb{E}[(\Delta\delta(t))^2 | X_t, Y_t] \geq V$  gilt, dann folgt:*

$$\mathbb{E}[\tau_c] \leq \frac{\delta(0)(2\delta_{max} - \delta(0))}{V}$$

Folgender Beweis entspricht dem der korrigierten Fassung [\[LRS01\]](#) von [\[LRS95\]](#).

*Beweis.* Setze  $Z(t) := \delta(t)^2 - 2\delta_{\max}\delta(t) - VT(t)$ , wobei  $T(t) := t$  für  $t < \tau_c$  und  $T(t) := \tau_c$  für  $t \geq \tau_c$ . Dieser stochastische Prozess erfüllt  $\mathbb{E}[Z(t+1)|X_t, Y_t] \geq Z(t)$ . Denn wann immer  $X_t = Y_t$ , so ist  $t \geq \tau_c$  und damit

$$Z(t) = -VT(t) = -V\tau_c = -VT(t+1) = Z(t+1),$$

und wann immer  $X_t \neq Y_t$ , so ist  $t < \tau_c$  und es gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[Z(t+1)|X_t, Y_t] - Z(t) \\ &= \mathbb{E}[\delta(t+1)^2|X_t, Y_t] - 2\delta_{\max}\mathbb{E}[\delta(t+1)|X_t, Y_t] - V - \delta(t)^2 + 2\delta_{\max}\delta(t) \\ &= (\mathbb{E}[\delta(t+1)|X_t, Y_t] - \delta(t))^2 + 2\delta(t)\mathbb{E}[\delta(t+1)|X_t, Y_t] - \delta(t)^2 \\ &\quad - 2\delta_{\max}\mathbb{E}[\delta(t+1)|X_t, Y_t] - V - \delta(t)^2 + 2\delta_{\max}\delta(t) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[(\Delta\delta(t))^2|X_t, Y_t] - V}_{\geq 0} + 2\underbrace{(\delta(t) - \delta_{\max})}_{\leq 0} \underbrace{\mathbb{E}[\Delta\delta(t)|X_t, Y_t]}_{\leq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

Der Prozess  $Z(t)$  wächst also in jedem Schritt im Erwartungsfall. Ein solcher Prozess wird in der Stochastik *Submartingal* genannt, hier bezüglich der Folge  $(X_t, Y_t)$ , und ein zufälliger Zeitpunkt wie die Kopplungszeit  $\tau_c = \min\{t : \delta(t) = 0\}$  heißt *Stoppzeit*. In dieser Situation liefert das *Optional Stopping Theorem* aus [\[Dur19\]](#), Th. 4.8.5 S. 256 f.] (mit  $\mathbb{E}[\tau_c] < \infty$  und nach oben beschränktem  $\mathbb{E}[|Z(t+1) - Z(t)| | X_t, Y_t]$ ) die intuitiv einleuchtende Aussage  $\mathbb{E}[Z(\tau_c)] \geq \mathbb{E}[Z(0)]$ , und da  $\delta(\tau_c) = 0$ , gilt

$$-V\mathbb{E}[\tau_c] \geq \delta(0)^2 - 2\delta_{\max}\delta(0) = \delta(0)(\delta(0) - 2\delta_{\max}),$$

womit die Aussage durch Umstellen folgt. □

### 2.2.2. Markov-Kette auf Pfadsystemen

Das einzige Arrangement der Form  $(n_1, n_3)$  besteht aus  $n_1$  und  $n_3$  Geraden, die sich gitterförmig schneiden. Sämtliche Arrangements der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  erhält man durch Einfügen einer Klasse dazwischen, bestehend aus  $n_2$  Geraden, siehe Abb. [2.1a](#). Abb. [2.1b](#) zeigt die nach Anwenden der Bijektion aus Lemma [1.17](#) entstandene Rhombenpflasterung. Hier wird dieses Einfügen sehr anschaulich. Bezeichne  $Z(r, s) := \{0, \dots, r\} \times \{0, \dots, s\}$  das Gitter, das wir in Zeichnungen immer wie folgt orientieren:  $(0, 0)$  links,  $(r, s)$  rechts,  $(r, 0)$  unten und  $(0, s)$  oben. Nun betrachte in  $Z(n_3, n_1)$  kürzeste Pfade von  $(0, 0)$  nach  $(n_3, n_1)$ , d.h. Pfade der Länge  $n_1 + n_3$ , die nur aus Schritten  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  bestehen, siehe Abb. [2.1c](#). Für zwei Pfade  $p, p'$  gelte  $p \prec p'$ , wenn  $p$  niemals oberhalb von  $p'$  verläuft. Eine Kette  $p_1 \leq \dots \leq p_k$  nicht notwendigerweise verschiedener kürzester Pfade (z.B. die drei Pfade in Abb. [2.1c](#))

heißt  $k$ -Pfadsystem. Einfügen neuer Rhomben entlang eines  $n_2$ -Pfadsystems liefert eine Rhombenpflasterung der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  wie in Abb. [2.1b](#).

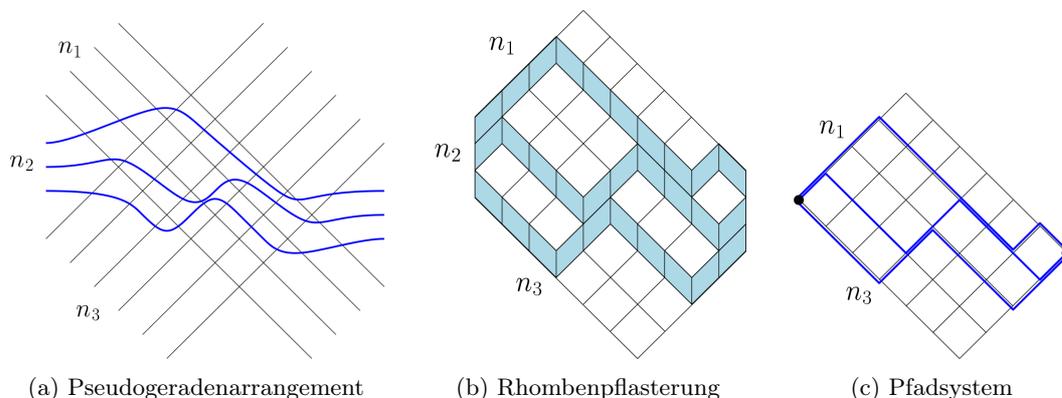


Abbildung 2.1.: Beispiel zur Erzeugung einer Rhombenpflasterung für  $(n_1, n_2, n_3) = (4, 3, 6)$

Folglich ist nur ein  $n_2$ -Pfadsystem in  $Z(n_3, n_1)$  zu erzeugen, da diese in Bijektion zu Rhombenpflasterungen und Arrangements der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  stehen. Wir beschreiben nun eine Markov-Kette mit der Menge aller  $n_2$ -Pfadsysteme als Zustandsmenge  $\mathcal{X}$ .

Dazu führen wir die folgende Terminologie ein. Jeder Pfad  $p$  besteht aus  $n_1 + n_3 - 1$  *inneren Punkten*, d.h. Gitterpunkten ohne Startpunkt  $(0, 0)$  und Endpunkt  $(n_1, n_3)$ . Benenne diese in ihrer Reihenfolge  $p^1, \dots, p^{n_1+n_3-1}$ . An einem Pfad  $p$  ist ein *Flip* von  $p^i$  nach oben (d.h. über die darüber liegende Gitterzelle) *möglich*, wenn  $p$  bei  $p^i$  ein „Tal“ bildet. In einem Pfadsystem *impliziert* ein solcher Flip für alle Pfade  $q \geq p$  des Pfadsystems mit  $q^i = p^i$  ebenso einen Flip von  $q^i$  nach oben. Analog ist ein Flip von  $p^i$  nach unten *möglich*, wenn  $p$  bei  $p^i$  einen „Gipfel“ bildet, und *impliziert* für jeden Pfad  $q \leq p$  mit  $q^i = p^i$  einen Flip von  $q^i$  nach unten. Werden mögliche Flips stets zusammen mit ihren implizierten Flips ausgeführt, so bleibt die Eigenschaft des Pfadsystems erhalten.

Dies erlaubt, auf Pfadsystemen  $p_1 \leq \dots \leq p_{n_2}$  folgende Zustandsübergänge zu definieren: Wähle jeweils uniform verteilt zufällig einen Pfadindex  $i \in \{1, \dots, n_2\}$ , einen Index  $j \in \{1, \dots, n_1 + n_3 - 1\}$  eines inneren Punktes von  $p_i$  und eine Zahl  $z \in [0, 1]$ . Ist an  $p_i$  ein Flip bei  $p_i^j$  nach oben möglich und impliziert dieser  $h$  weitere Flips nach oben (ggf.  $h = 0$ ), und ist  $z \geq 1 - \frac{1}{2(h+1)}$ , so führe alle diese Flips aus. Ist an  $p_i$  ein Flip bei  $p_i^j$  nach unten möglich und impliziert dieser  $h$  weitere Flips nach unten (ggf.  $h = 0$ ), und ist  $z \leq \frac{1}{2(h+1)}$ , so führe alle diese Flips aus. In allen anderen Fällen führe keinen Flip aus.

Für einen Pfad  $p$  bezeichne  $h(p)$  dessen Höhe, d.h. die Zahl der Gitterzellen unterhalb von  $p$ . Für ein Pfadsystem  $P : p_1 \leq \dots \leq p_{n_2}$  setze  $h(P) := \sum_{i=1}^{n_2} h(p_i)$ . Für zwei Pfade  $p \leq p'$  bezeichne  $\delta(p, p') := h(p') - h(p)$  die Zahl der Gitterzellen zwischen  $p$  und  $p'$ .

2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

Für Pfadsysteme  $P \leq P'$  setze ebenso  $\delta(P, P') := h(P') - h(P) = \sum_{i=1}^{n_2} \delta(p_i, p'_i)$ . Es gilt  $P = P'$  genau dann, wenn  $\delta(P, P') = 0$ .

Nun lässt sich eine Kopplung  $(X_t, Y_t)$  definieren. Sei  $X_0 : p_1 = \dots = p_{n_2}$  das Pfadsystem, in dem alle Pfade dem untersten, d.h. dem minimalen Pfad bzgl.  $\leq$  entsprechen, und sei  $Y_0 : q_1 = \dots = q_{n_2}$  das Pfadsystem, in dem alle Pfade dem obersten, d.h. maximalen Pfad bzgl.  $\leq$  entsprechen. Es gilt  $X_0 \leq Y_0$ . Seien nun  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  von diesen Startzuständen ausgehende Markov-Ketten entsprechend den oben beschriebenen Übergängen, jedoch so, dass in jedem Schritt  $i, j, z$  für  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  identisch gewählt werden. Dann bleibt die Eigenschaft  $X_t \leq Y_t$  in jedem Schritt erhalten und  $(X_t, Y_t)$  ist eine Kopplung. Setze  $\delta(t) := \delta(X_t, Y_t)$  und  $\Delta\delta(t) := \delta(t+1) - \delta(t)$ . Ferner seien  $\Delta h(X_t) := h(X_{t+1}) - h(X_t)$  und  $\Delta h(Y_t) := h(Y_{t+1}) - h(Y_t)$ . Damit gilt auch  $\Delta\delta(t) = \Delta h(Y_t) - \Delta h(X_t)$ . Folgendes Lemma zeigt, dass der Abstand  $\delta(t)$  zwischen  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  mit jedem Schritt im Erwartungsfall kleiner wird.

**Lemma 2.26.** *Für oben beschriebene Kopplung  $(X_t, Y_t)$  gilt  $\mathbb{E}[\Delta\delta(t)|X_t, Y_t] \leq 0$ , und, wann immer  $X_t \neq Y_t$ , gilt  $\mathbb{E}[(\Delta\delta(t))^2|X_t, Y_t] \geq \frac{1}{2n^2}$ , wobei  $n := n_1 + n_2 + n_3$ .*

*Beweis.* Seien  $X_t \leq Y_t$ ,  $X_t = P : p_1 \leq \dots \leq p_{n_2}$ ,  $Y_t = Q : q_1 \leq \dots \leq q_{n_2}$ . Sei  $N := n_2(n_1 + n_3 - 1)$  die Zahl innerer Punkte von Pfaden in  $P$  bzw.  $Q$ .

Werden im nächsten Schritt die Werte  $i, j, z$  so gewählt, dass an Punkt  $p_i^j$  ein Flip nach oben (bzw. nach unten) zusammen mit  $h$  implizierten Flips durchgeführt wird, so erhöht (bzw. senkt) dies  $h(P)$  um  $d := h + 1$ . Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2Nd}$ . Sei  $P_d^+$  (bzw.  $P_d^-$ ) die Menge dieser Tupel  $(i, j)$ , die  $h(P)$  um  $d$  erhöhen (bzw. senken). Analog definiere  $Q_d^+$  und  $Q_d^-$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta\delta(t)|X_t, Y_t] &= \mathbb{E}[\Delta h(Y_t)|X_t, Y_t] - \mathbb{E}[\Delta h(X_t)|X_t, Y_t] \\ &= \left( \sum_d |Q_d^+| \frac{d}{2Nd} - \sum_d |Q_d^-| \frac{d}{2Nd} \right) \\ &\quad - \left( \sum_d |P_d^+| \frac{d}{2Nd} - \sum_d |P_d^-| \frac{d}{2Nd} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left( \left( \sum_d |Q_d^+| + |P_d^-| \right) - \left( \sum_d |Q_d^-| + |P_d^+| \right) \right) \end{aligned}$$

Die rechte Summe im letzten Ausdruck entspricht der Zahl der Täler in Pfaden von  $P$  und Gipfeln in Pfaden von  $Q$ , im Folgenden *gute* Punkte ( $G$ ) genannt. Ebenso entspricht die linke Summe der Zahl an Tälern in  $Q$  und Gipfeln in  $P$ , im folgenden *schlechte* Punkte ( $S$ ) genannt (Übereinander liegende Gipfel und Täler verschiedener Pfade werden einzeln gezählt).

2.2. Erzeugung einer hexagonalen Rhombenpflasterung

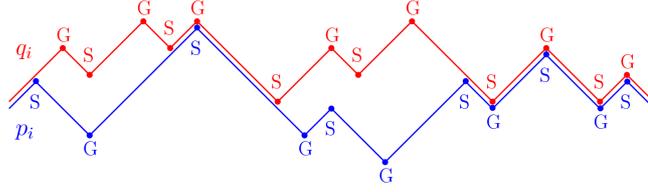


Abbildung 2.2.: Gute und Schlechte Punkte auf korrespondierendem Pfadpaar  $p_i \leq q_i$

Betrachte ein Paar  $p_i \leq q_i$ , wie in Abb. 2.2 dargestellt. Die Pfade teilen sich abwechselnd in Abschnitte übereinstimmender und sich unterscheidender Kanten auf. In den inneren Punkten übereinstimmender Abschnitte fallen gute und schlechte Punkte zusammen. An den beiden Randpunkten eines unterschiedlichen Abschnittes kann jeweils einer der Pfade  $p_i$  und  $q_i$  einen schlechten Punkt besitzen. Dazwischen alternieren auf beiden Pfaden gute mit schlechten Punkten, sodass in Summe die Zahl der schlechten Punkte die der guten Punkte nicht übertrifft. Dies zeigt  $\mathbb{E}[\Delta\delta(t)|X_t, Y_t] \leq 0$ .

Falls  $X_t \neq Y_t$ , also  $P < Q$ , so gibt es ein Paar von Pfaden  $p_i < q_i$ . In einem unterschiedlichen Abschnitt dieses Paares wähle den ersten guten Punkt von links, ungeachtet, ob dieser auf  $p_i$  oder  $q_i$  liegt. Werden im nächsten Schritt  $i, j, z$  so gewählt, dass an diesem Punkt ein Flip zusammen mit  $h$  implizierten Flips durchgeführt wird, so senkt dies  $\delta(t)$  um  $d = h + 1$ , was mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2Nd}$  geschieht. Dies zeigt

$$\mathbb{E}[(\Delta\delta(t))^2|X_t, Y_t] \geq \frac{d^2}{2Nd} \geq \frac{1}{2N} = \frac{1}{2n_2(n_1 + n_3 - 1)} \geq \frac{1}{2n^2} .$$

□

**Theorem 2.27** (Vgl. [LRS95] Theo. 10). Für oben beschriebene Markov-Kette auf Arrangements der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  gilt  $\tau(\varepsilon) \in \mathcal{O}(n^8 \log \frac{1}{\varepsilon})$ , wobei  $n := n_1 + n_2 + n_3$ .

*Beweis.* Für beliebige  $n_2$ -Pfadssysteme  $X \leq Y$  gilt  $\delta(X, Y) \leq n_1 n_2 n_3 =: \delta_{\max}$ , eine Schranke, welche vom Startzustand  $(X_0, Y_0)$  oben beschriebener Kopplung  $(X_t, Y_t)$  angenommen wird. Mit Lemma 2.25 in Verbindung mit  $V := \frac{1}{2n^2}$  aus Lemma 2.26 gilt für die erwartete Kopplungszeit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tau_c] &\leq \frac{\delta(X_0, Y_0)(2\delta_{\max} - \delta(X_0, Y_0))}{V} = (n_1 n_2 n_3)^2 2n^2 \\ &\leq 2n^8 \end{aligned}$$

Die Kopplung  $(X_t, Y_t)$  lässt sich zu einer monotonen Großkopplung erweitern, indem nicht nur ausgehend vom  $\leq$ -minimalen Pfadssystem  $X_0$  und vom  $\leq$ -maximalen Pfadssystem  $Y_0$ , sondern von jedem Pfadssystem ausgehend eine Markov-Kette gestartet wird, wobei für den Zustandsübergang  $t \rightarrow t + 1$  alle Markov-Ketten oben beschriebene Flips

ausführen, basierend auf der identischen zufälligen Wahl von  $i, j, z$ . Nach Lemma 2.19 gilt  $\tau_c(x, y) \leq \tau_c$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  und somit

$$\max_{x, y \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[\tau_c(x, y)] \leq \mathbb{E}[\tau_c].$$

Dann folgt mit Theorem 2.18 2) für die Mischzeit  $\tau(\frac{1}{2\varepsilon}) \leq \lceil 4en^8 \rceil$  und mit Prop. 2.9 gilt für beliebiges  $\varepsilon > 0$ :

$$\tau(\varepsilon) \leq \left\lceil \log \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \lceil 4en^8 \rceil \in \mathcal{O}\left(n^8 \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

□

Im ursprünglichen Artikel [LRS95] wird nicht genau obige Schranke, sondern die ähnliche Schranke  $\tau(\varepsilon) \leq 12\bar{n}^4 (1 + \log \frac{1}{\varepsilon})$  gezeigt, wobei  $\bar{n} = n_1n_2 + n_2n_3 + n_1n_3$  die Zahl der Rhomben resultierender Pflasterung ist. Diese Schranke wird in [Wil04] durch feinere Analyse der gleichen Markov-Kette auf  $\tau(\varepsilon) \in \Theta(\bar{n}^2 \log \bar{n})$  verbessert.

Es sei schließlich angemerkt, dass für die Markov-Kette auf Pfadsystemen die in Absch. 2.1.5 beschriebene Technik *Kopplung aus der Vergangenheit* angewendet werden kann, um ein Arrangement bestehend aus 3 Klassen effizient zufällig zu erzeugen.

### 2.3. Erzeugung einer neuen Klasse

Im vorigen Abschnitt fügten wir in ein Gitter, d.h. in ein Arrangement mit zwei Klassen, eine dritte Klasse ein. Die dabei zum Einsatz kommende Markov-Kette erwies sich als schnell mischend. Ziel dieses Abschnitts ist die Untersuchung der Verallgemeinerung dessen: In ein Arrangement aus  $r$  Klassen wird an ausgewiesener Stelle eine  $(r + 1)$ -te Klasse eingefügt. Unter allen Möglichkeiten soll dies zufällig mit uniformer Verteilung geschehen.

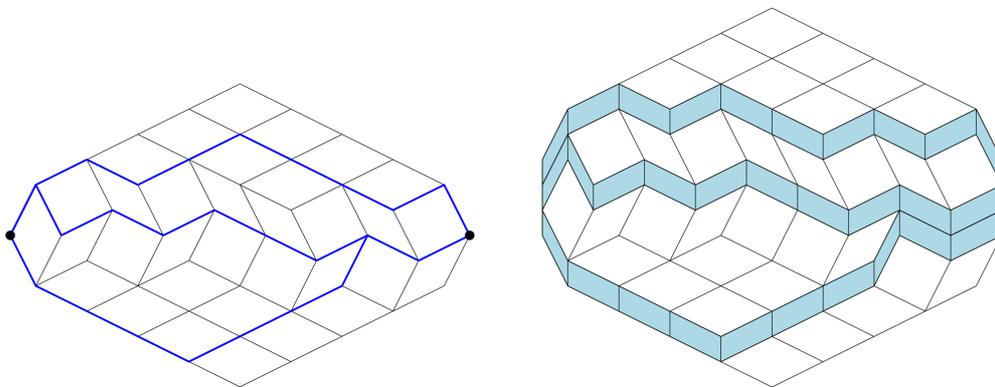
Wir zeigen, dass die naheliegende Verallgemeinerung dieser Markov-Kette auf  $r$  Klassen wider erster Erwartung im Allgemeinen nicht schnell mischend ist, und schlagen stattdessen ein anderes, nicht auf Markov-Ketten basierendes Verfahren vor.

Um keine falsche Hoffnung zu schüren, sei erwähnt, dass das iterative uniforme Einfügen von Klassen ausgehend von einem Gitter nicht zu einem uniform verteilten Arrangement mit  $r > 3$  Klassen führt. Zwar entspricht jedes Arrangement der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  einer eindeutigen Einfügefølge von  $n_3, \dots, n_r$  sich nicht schneidender Geraden, startend mit einem  $(n_1 \times n_2)$ -Gitter, doch ist die Anzahl der Einfügemöglichkeiten abhängig von vergangenen Einfügungen. Trotzdem ist die Untersuchung des uniformen Einfügens

von unabhängigem Interesse und wird zudem durch die Markov-Kette im späteren Abschnitt [2.4.2](#) motiviert.

### 2.3.1. Verallgemeinerte Markov-Kette auf Pfadsystemen

Von einem Arrangement der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  betrachte man die zugehörige Rhombenpflasterung und weise die beiden Ecken aus, an denen die  $(r + 1)$ -te Klasse aus  $n_{r+1}$  Geraden eingefügt werden soll. Will man nun Geraden einfügen, entspricht dies wieder einem System kürzester, die beiden Eckpunkte verbindender, nicht schneidender Pfade, siehe Abb. [2.3](#).



(a) Pfadsystem zwischen ausgewiesenen Ecken

(b) Einfügen in Rhombenpflasterung

Abbildung 2.3.: Pfadsysteme entsprechen neuer Klasse in Rhombenpflasterung

Analog wie im vorherigen Fall eines Gitters (Absch. [2.2.2](#)) lassen sich Zustandsübergänge auf der Menge solcher Pfadsysteme definieren. Wir verzichten auf die Ausführung der Details dieser Markov-Kette, da wir zeigen können, dass schon im Fall eines einzelnen einzufügenden Pfades, also im Fall  $n_{r+1} = 1$ , die Markov-Kette für  $r > 2$  überraschenderweise nicht schnell mischend ist. In diesem Fall wird die Markov-Kette vereinfacht wie folgt beschrieben: Man startet mit einem der möglichen kürzesten Pfade und flippt diesen in jedem Schritt an einem uniform zufällig ausgewählten Rhombus nach oben oder unten, sofern dies möglich ist.

### Verallgemeinerte Markov-Kette auf Pfadsystemen nicht schnell mischend

Für den Fall  $r = 2$  wurde in Absch. [2.2.2](#) die Mischzeit beschränkt, indem für eine monotone Kopplung zweier Pfade argumentiert wurde, dass sich die Zahl der Zellen zwischen beiden Pfaden im Erwartungsfall stets hinreichend verringert. Dies trifft schon im Fall  $r = 3$  nicht mehr zu, wie das Beispiel der „Treppe“ der Größe  $N$

2. Erzeugung von Pseudogeradenarrangements mittels Markov-Ketten

zeigt, welche in Abb. 2.4 für  $N = 5$  dargestellt ist und einem Arrangement der Form  $(N + 1, 1, N)$  entspricht. Über und unter den diagonalen Rhomben sind zwei Pfade  $X \leq Y$  eingezeichnet. Die Wahl eines der  $2N$  roten Rhomben führt zur Vergrößerung des Abstandes, wohingegen nur bei der Wahl eines der beiden grünen Rhomben sich der Abstand verringert.

Tatsächlich ist unklar, ob die Markov-Kette auf der Treppe schnell mischend ist. Wir liefern stattdessen die Beispiele in Abb. 2.5. In der Ausrichtung der Zeichnungen sind kürzeste Pfade  $x$ -monotone Pfade zwischen den markierten Eckpunkten. Die Menge dieser Pfade partitioniert sich in Pfade  $R$ , die oberhalb des blauen Rhombus verlaufen, und den Pfaden  $G = R^c$  unterhalb des blauen Rhombus. Pfade  $R$  können grüne Zellen berühren, verlaufen jedoch niemals zwischen diesen. Ebenso verlaufen Pfade  $G$  niemals zwischen roten Zellen. Der einzige Zustandsübergang zwischen  $R$  und  $G$  ist ein Flip an der blauen Zelle. Dieser wechselt zwischen den beiden hervorgehobenen Pfaden.

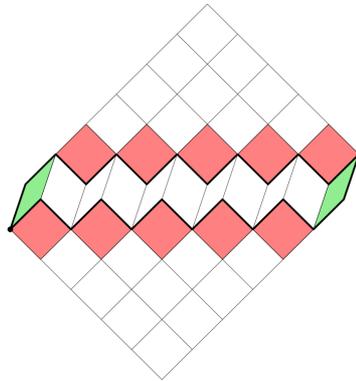


Abbildung 2.4.: Treppe der Größe  $N = 5$

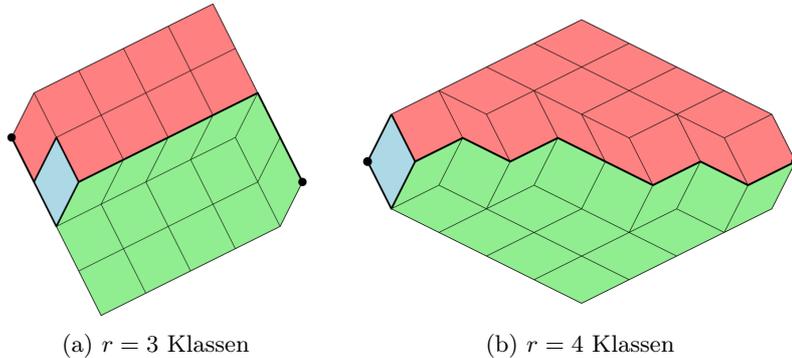


Abbildung 2.5.: Instanzen, auf denen die Markov-Kette nicht schnell mischend ist

**Theorem 2.28.** *Die Markov-Kette zum Einfügen einer  $(r + 1)$ -ten Klasse in ein Arrangement mit  $r$  Klassen (durch Flips von kürzesten, sich nicht schneidenden Pfaden zwischen gegenüberliegenden Ecken der entsprechenden Rhombenpflasterung an deren Zellen) ist für  $r = 2$  schnell mischend und für  $r \geq 3$  nicht schnell mischend.*

*Beweis.* Der Fall  $r = 2$  ist Theorem 2.27 (Absch. 2.2.2) aus LRS95.

Für  $r = 3$  betrachte die Instanzen wie in Abb. 2.5a der Größe  $(N, 1, N)$ . Die Kardinalitäten  $|G|$  und  $|R|$  wachsen exponentiell in  $N$ , insbesondere auch  $|\mathcal{X}| = |G| + |R|$ . Pfade in  $G$  korrespondieren durch Punktspiegelung am Mittelpunkt der Zeichnung genau mit Pfaden in  $R$ , bis auf jene  $N + 1$  Pfade in  $G$ , welche eine der  $N + 1$  Kanten am „Stufenabsatz“ enthalten. Für große  $N$  gilt daher  $|G| = |R| + N + 1 \sim |R|$  und  $\pi(G) \sim \pi(R) \sim \frac{1}{2}$ , wobei  $\pi$  die stationäre, d.h. uniforme Verteilung ist. Für das Flaschenhals-Verhältnis von  $R$  gilt:

$$\Phi(R) = \frac{1}{\pi(R)} \sum_{x \in R, y \in G} \pi(x)P(x, y) \sim \frac{2}{|\mathcal{X}|(N^2 + 2N)} \leq \frac{1}{|\mathcal{X}|}$$

Daraus folgt mit Theorem 2.21 für die Mischzeit für  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ :

$$\tau(\varepsilon) \geq \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\Phi(R)} = |\mathcal{X}| \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \in \Omega(\exp(cN))$$

mit einem gewissen  $c > 0$ . Daher  $\tau(\varepsilon) \notin \mathcal{O}\left(p\left(\log\left(\frac{|\mathcal{X}|}{\varepsilon}\right)\right)\right)$  für beliebige  $p \in \mathbb{R}[X]$ .

Für  $r = 4$  betrachte analog Instanzen wie die in Abb. 2.5b mit der Besonderheit, dass hier Pfade in  $G$  sogar exakt durch horizontale Spiegelung den Pfaden in  $R$  entsprechen, also exakt  $|G| = |R|$  gilt.

Für  $r > 4$  betrachte in dem zu Abb. 2.5b gehörigen Arrangement die beiden Geraden, deren Kreuzung der blauen Zelle entspricht. Der beschriebene Flaschenhals entsteht dadurch, dass diese beiden Geraden sich vor allen anderen Geraden selbst schneiden und alle anderen Schnittpunkte des Arrangements sich zur Hälfte oberhalb und zur Hälfte unterhalb der beiden Geraden befinden, ohne dass sich eine Kreuzung zwischen diesen befindet. Jedes Arrangement dieser Gestalt, auch mit  $r > 4$  Klassen, führt zu einem Flaschenhals, der schnelles Mischen verhindert.  $\square$

### Simulation zur empirischen Untersuchung der Kopplungszeit

Im Hinblick auf Theorem 2.28 ist es interessant, die Kopplungszeit der eben behandelten Beispiele zu simulieren. Dies tun wir mit einem  $(N \times N)$ -Gitter (Für  $N = 4$  lösche man aus der Instanz in Abb. 2.5a die  $2N$  Querrhomben des Zick-Zack-Bandes), einem  $(N \times N)$ -Gitter „mit Band“ (Dies entspricht für  $N = 4$  genau Abb. 2.5a) und einem  $(N \times N)$ -Gitter „mit Treppe“ (Für  $N = 5$  ist dies Abb. 2.4). Jede dieser drei Instanzen wird für die Größen  $N \in \{6, 8, 10, 12\}$  untersucht, indem jeweils 50 Mal eine Kopplung  $(X_t, Y_t)$  vom tiefsten Pfad  $x_0$  und vom höchsten Pfad  $y_0$  ausgehend gestartet wird und höchstens für  $T_{\max}$  Schritte simuliert wird. Jeder Schritt besteht aus der Wahl eines zufälligen Rhombus und dem Flippen der Pfade an diesem, sofern möglich. Zu

## 2. Erzeugung von Pseudogradenarrangements mittels Markov-Ketten

jedem getesteten Zeitachsenabschnitt  $t$  kann  $\mathbb{P}[\tau_c \leq t | X_0 = x_0, Y_0 = y_0]$  als Anteil der 50 Versuche, bei denen  $(X_t)$  und  $(Y_t)$  nach spätestens  $t$  Schritten koppelten, geschätzt werden. Mithilfe der Wilson-Methode wird ein 0.95-Konfidenzintervall bestimmt.

Abb. 2.6 zeigt die Ergebnisse über einer logarithmischen Zeitachse. Es ist zu sehen, dass die Zeit für das Koppeln mit zunehmenden  $N$  für das  $(N \times N)$ -Gitter und das  $(N \times N)$ -Gitter mit Treppe langsamer wächst als für das  $(N \times N)$ -Gitter mit Band. Für ersteres wurde in Theorem 2.27 ja in der Tat eine gute obere Schranke an  $\tau_c$  gefunden, wohingegen die Markov Kette auf dem  $(N \times N)$ -Gitter mit Band nicht schnell mischend ist. Für das  $(N \times N)$ -Gitter mit Treppe scheint es, als könnten ebenso gute obere Schranken an  $\tau_c$  gefunden und gezeigt werden, dass die Markov-Kette schnell mischend ist.

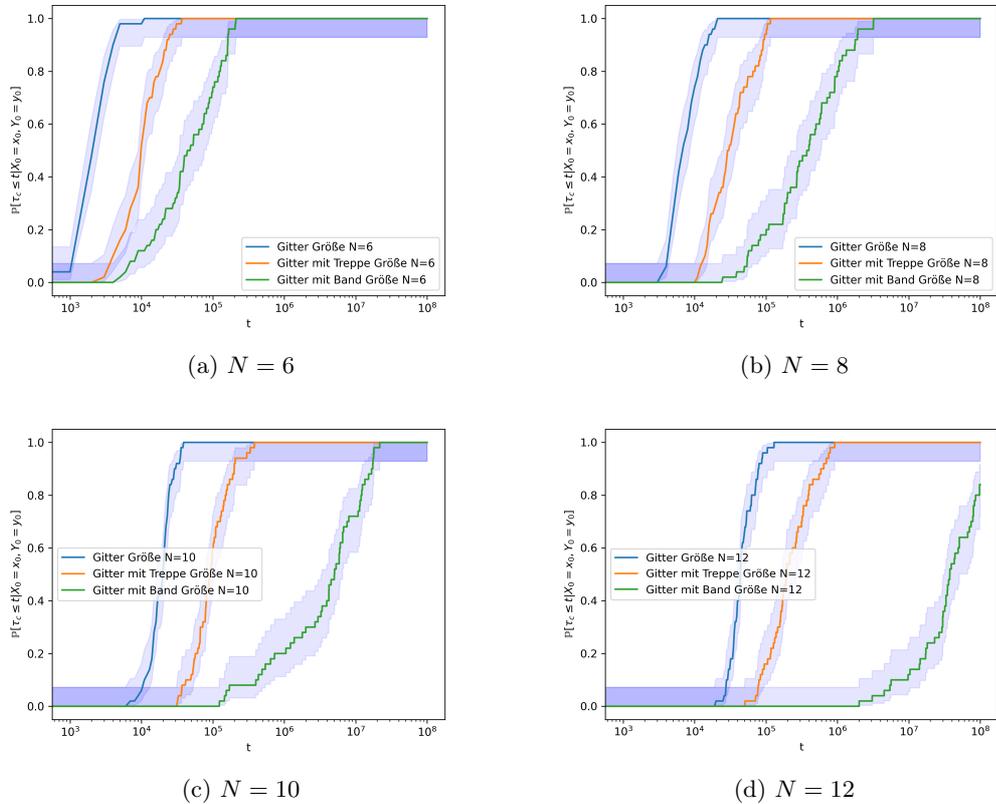


Abbildung 2.6.: Simulation der Kopplungszeit für drei verschiedene Instanzen und  $N \in \{6, 8, 10, 12\}$ . Farbige Bereiche um die Kurven sind punktweise Konfidenzintervalle zum Irrtumsniveau  $\alpha = 0.05$ .

### 2.3.2. Erzeugung einer Klasse mittels Dynamischer Programmierung

Als Alternative zu Markov-Ketten stellen wir hier einen direkten, der Idee von dynamischer Programmierung folgenden Ansatz vor, der in ein Arrangement bestehend aus  $n$  Geraden eine neue Klasse bestehend aus  $k$  Geraden uniform zufällig einfügt. Dieser hat eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(p(n) \cdot n^{2k})$  mit  $p \in \mathbb{R}[x]$ , also polynomielle Laufzeit für festes  $k$ .

Dazu betrachtet man die Rhombenpflasterung des Arrangements als gerichteten Graphen  $G = (V, E)$ : Die Knotenmenge  $V$  besteht aus den Eckpunkten der einzelnen Rhomben. Zwei ausgezeichnete Knoten  $s, t \in V$  gehören zu gegenüberliegenden Eckpunkten am Rand des Zonotops, und alle Kanten  $E$  sind von  $s$  blickend in Richtung  $t$  gerichtet. Die Ecken  $s, t \in V$  bestimmen die Stelle, an der die neue Klasse eingefügt wird. Für  $v \in V$  sei  $d(s, v)$  die Distanz in  $G$  von  $s$  zu  $v$ , und für  $0 \leq i \leq n$  setze  $V_i := \{v \in V : d(s, v) = i\}$ , wobei  $V_0 = \{s\}$ ,  $V_n = \{t\}$  und  $V = V_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_n$  gilt.

Im Falle  $k = 1$  ist nur ein einzelner  $s$ - $t$ -Pfad in  $G$  zu wählen. Dies ist ein Musterbeispiel dynamischer Programmierung: Man bestimmt effizient für alle  $v \in V$  die Anzahl  $c_v$  an  $s$ - $v$ -Pfadern, und zwar iterativ für alle  $v \in V_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , indem man in jeder Iteration für  $c_v$  die Werte  $c_{v'}$  der Knoten  $v' \in V_{i-1}$  mit  $(v', v) \in E$  summiert. Anschließend rekonstruiert man zufällig einen der  $c_t$   $s$ - $t$ -Pfade  $p : s = p^0, p^1, \dots, p^{n-1}, p^n = t$  iterativ von hinten: Für  $i = n - 1, \dots, 1$  wählt man zufällig  $p^i \in \{v \in V_i : (v, p^{i+1}) \in E\}$ , und zwar mit der Verteilung  $\mathbb{P}[p^i = v | p^{i+1}] = \frac{c_v}{c_{p^{i+1}}}$ . Auf diese Weise wird tatsächlich ein zufälliger  $s$ - $t$ -Pfad erzeugt, der uniform verteilt ist, denn:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[p^0 = v_0, p^1 = v_1, \dots, p^n = v_n] &= \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[p^i = v_i | p^{i+1} = v_{i+1}, \dots, p^n = v_n] \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{c_{v_i}}{c_{v_{i+1}}} = \frac{c_{v_1}}{c_{v_n}} = \frac{1}{c_t} \end{aligned}$$

Diese Idee lässt sich für Pfadsysteme bestehend aus  $k \geq 1$  Pfaden verallgemeinern. Dazu konstruiert man einen Hilfsgraphen  $G^k = (V^k, E^k)$ , in dem  $\bar{s}$ - $\bar{t}$ -Pfade genau den  $k$ -Pfadsystemen von  $s$  nach  $t$  entsprechen. Die Mengen  $V_i$  besitzen die Totalordnung  $\leq_i$  entsprechend ihrer Anordnung „von unten nach oben“ in einer Zeichnung der Pflasterung, die so ausgerichtet ist, dass sich  $s$  und  $t$  auf selber Höhe ganz links und ganz rechts befinden. Bezeichne  $V_i^k$  die Menge der Konfigurationen, in denen ein  $s$ - $t$ -Pfadsystem  $P : p_1 \leq \dots \leq p_k$  in  $G$  die Knoten  $V_i$  verwenden kann, formal  $V_i^k := \{(p_1^i, \dots, p_k^i) \in (V_i)^k : p_1^i \leq_i \dots \leq_i p_k^i\}$ . Der Graph  $G^k$  besteht nun aus Knotenmenge  $V^k := V_0^k \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_n^k$ . Kanten  $E^k$  sind Paare kompatibler Konfigurationen  $((p_1^i, \dots, p_k^i), (p_1^{i+1}, \dots, p_k^{i+1})) \in V_i^k \times V_{i+1}^k$ , die  $(p_j^i, p_j^{i+1}) \in E$  für alle  $j = 1, \dots, k$  erfüllen. Es ist  $V_0^k = \{\bar{s}\}$  und  $V_n^k = \{\bar{t}\}$ , wobei  $\bar{s} := (s, \dots, s)$  und  $\bar{t} := (t, \dots, t)$ . Da  $\bar{s}$ - $\bar{t}$ -Pfade

in  $G^k$  genau den Pfadsystemen bestehend aus  $k$  Pfaden in  $G$  entsprechen, wurde das Problem auf das Erzeugen eines einzelnen Pfades wie oben beschrieben zurückgeführt. In der Tat gilt für  $k = 1$  die Graphenisomorphie  $G^k \simeq G$ .

Zur Laufzeitanalyse werde angenommen, eine uniforme Zufallszahl  $X \in \{1, \dots, l\}$  kann in Laufzeit  $\mathcal{O}(\log(l))$  generiert werden<sup>5</sup>. Für alle  $0 \leq i \leq n$  gilt  $|V_i^k| \leq |V_i| \leq n^k$ . Für die Bestimmung der  $c_v$  für alle  $v \in V_i^k$  müssen höchstens  $|V_{i-1}^k| \leq n^k$  Additionen durchgeführt werden, also über alle Iterationen insgesamt höchstens  $n \cdot n^{2k}$  Additionen. Zwar treten hier Summanden exponentieller Größe in  $n$  auf, doch da die Laufzeit einer Addition logarithmisch in der Größe ihrer Operanden ist, geht dies insgesamt in einem in  $n$  polynomiellen Faktor auf. Für das Konstruieren des zufälligen Pfades muss an jedem Pfadknoten  $v_i \in V_i^k$  ein zufälliger Vorgängerknoten  $v_{i-1} \in V_{i-1}^k$  ausgewählt werden, was bis auf polynomiellen Faktor in Laufzeit  $\mathcal{O}(n^k)$  möglich ist. Es ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(p(n) \cdot n^{2k})$  für ein Polynom  $p \in \mathbb{R}[x]$ .

## 2.4. Markov-Ketten auf Arrangements

Wir betrachten nun zwei Markov-Ketten, die zum Mischen einfacher Arrangements verwendet werden können. Beiden sind symmetrisch, nähern sich also der uniformen Verteilung. Die spannende Frage ist, ob diese schnell mischend sind. Diese Frage werden wir für beide Markov-Ketten erörtern, jedoch nicht beantworten können.

### 2.4.1. Flippen zufälliger Dreiecke

In einem einfachen Arrangement bilden drei Geraden  $f^i, f^j, f^k$  verschiedener Klassen  $i, j, k$  ein *Dreieck*, falls zwischen den drei Schnittpunkten von  $f^i, f^j, f^k$  keine weiteren Schnittpunkte liegen. Betrachte die Markov-Kette, welche in jedem Schritt uniform drei Geraden  $f^i, f^j, f^k$  wählt und, falls diese ein Dreieck bilden, dieses wie in Abb. 2.7 gezeigt flippt. In den Rhombenpflasterungen entsprechen diese Flips 180°-Drehungen von Hexagons, und in Signotopen entsprechen sie Flips zwischen den Orientierungen + und – von Geradentripeln, welche die Signotopeigenschaft erhalten.

Für Arrangements mit drei Klassen, wie in Abb. 2.7, unterscheidet sich die in Absch. 2.2.2 behandelte Markov-Kette auf Pfadsystemen nur dadurch, dass dort nicht nur einzelne Dreiecke, sondern auch ganze „Türme“ in einem Schritt geflippt werden

---

<sup>5</sup>Dies ist insofern realistisch, als dass wenn Münzwürfe in konstanter Zeit simuliert werden können, dann im Average-Case  $\mathcal{O}(\log l)$  davon nötig sind, um eine uniforme Zufallszahl  $X \in \{1, \dots, l\}$  zu erzeugen. Tatsächlich benötigt jeder Algorithmus dafür im Worst-Case unbeschränkt viele Münzwürfe, mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt man jedoch nahe am Average-Case.

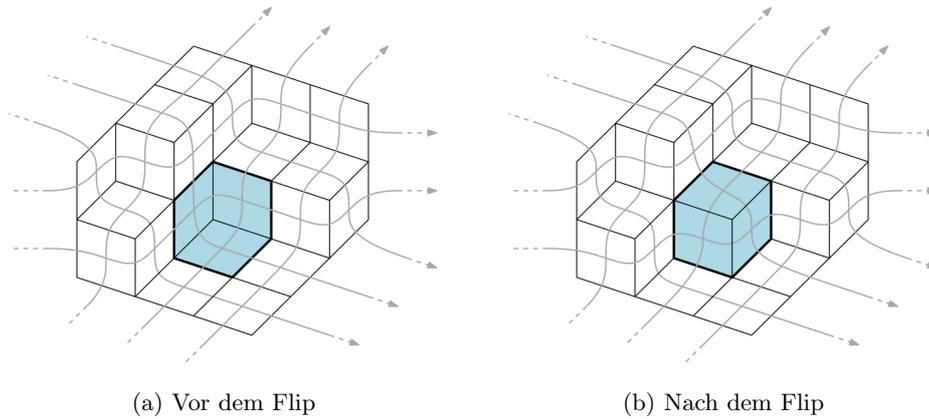


Abbildung 2.7.: Flip eines Dreiecks

können, wozu hier mehrere Schritte nötig wären. Doch wenig überraschend ist auch diese Markov-Kette schnell mischend, wie folgendes Theorem aus [RT00] zeigt:

**Theorem 2.29.** *Die Markov-Kette, welche zufällige Dreiecke eines Arrangements der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  flippt, besitzt die Mischzeit*

$$\tau(\varepsilon) \in \mathcal{O}(N^4 \log N + N^3 \log N \log \varepsilon^{-1}),$$

wobei  $N := n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3$  die Zahl der Schnittpunkte ist.

In [Des01] wird basierend auf statistischen Untersuchungen und heuristischen Argumenten behauptet, dass selbige Markov-Kette auch für  $r > 3$  Klassen schnell mischend ist. Sei  $M$  deren Übergangsmatrix. Sei ferner  $M_i$  die Übergangsmatrix der eingeschränkten Markov-Kette, welche nur Dreiecke flippt, an denen Klasse  $i$  beteiligt ist. Dann lässt sich  $M$  zerlegen als

$$M = \frac{M_1 + \dots + M_r - (r-3)\text{Id}}{3}.$$

Die Normierung stellt sicher, dass eine gültige Übergangsmatrix entsteht, und beachtet dabei, dass ein Flip des Dreiecks  $f^i, f^j, f^k$  als Zustandsübergang in  $M_i, M_j$  und  $M_k$  auftaucht.

Die Markov-Kette zu  $M_i$  ist zwar auf der Menge aller Arrangements der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  definiert, hält aber das Arrangement der  $r-1$  anderen Klassen untereinander fest und verharrt in einer von diesem abhängigen Zustandsteilmenge. Fasst man die  $i$ -te Klasse wie in Abb. 2.3 als Pfadsystem innerhalb der durch die anderen  $r-1$  Klassen definierten Rhombenpflasterung auf, so entspricht dies exakt der in Absch. 2.3.1 behandelten Markov-Kette, deren Zustandsübergänge sich als Dreiecksflips auffassen lassen.

In [Des01] wird über die Theorie des Spektralabstandes wie in Theorem 2.12 argumen-

tiert, dass falls die Markov-Ketten der einzelnen  $M_1, \dots, M_r$  schnell mischend sind, dann auch die gesamte Markov-Kette zu  $M$  schnell mischend ist. Experimentell wird gezeigt, dass, falls überhaupt Instanzen existieren, für die die Markov-Kette der  $M_i$  nicht schnell mischend ist, diese so selten sein müssen, dass, wie weiter heuristisch argumentiert wird, dies für die Mischzeit der gesamten Markov-Kette unbedeutend sei.

Dazu sei angemerkt, dass wir in Theorem 2.28 ja tatsächlich mithilfe konkreter Instanzen gezeigt haben, dass die Markov-Ketten der einzelnen  $M_i$  im Allgemeinen nicht schnell mischend sind. Es ist unklar, ob die heuristische Argumentation in Des01 zu einem strengen Beweis führt. Zumindest wird in Des01 ein starkes Indiz dafür geliefert, dass die Markov-Kette zu  $M$  in der Tat schnell mischend ist.

Interessant wäre eine Partialordnung auf der Menge der Arrangements der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  mit  $r > 3$ , die wie die Partialordnung in Absch. 2.2.2 die Voraussetzungen für Kopplung aus der Vergangenheit erfüllt. Damit könnte die Mischzeit experimentell überprüft werden.

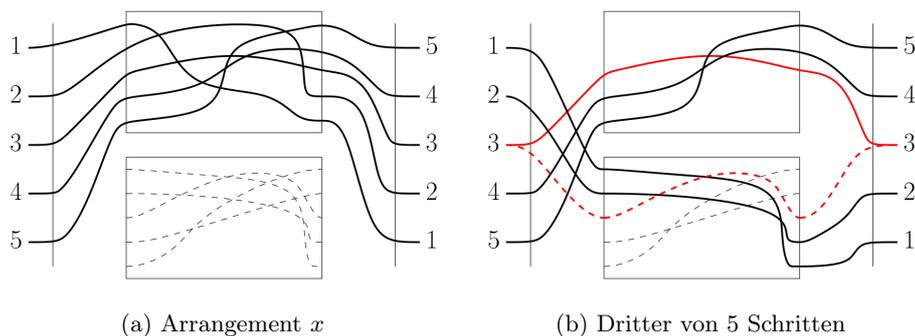
### 2.4.2. Neueinfügungen zufälliger Pseudogeraden

Betrachte die Markov-Kette auf einfachen Arrangements der Ordnung  $n$ , die in jedem Schritt eine der  $n$  Geraden uniform zufällig auswählt, löscht und an gleicher Stelle unter allen Möglichkeiten uniform zufällig wieder einfügt. Man beachte, dass sich diese Markov-Kette auf Arrangements der Form  $(n_1, \dots, n_r)$  erweitern lässt, indem in jedem Schritt eine der Klassen ausgewählt wird und mittels des Verfahrens in Absch. 2.3.2 zufällig wieder eingefügt wird.

Interessant ist, dass die Markov-Kette in nur  $n$  Schritten von jedem Zustand  $x \in \mathcal{X}$  zu jedem anderen Zustand  $y \in \mathcal{X}$  übergehen kann, was man wie folgt sieht: Zeichne das Arrangement  $y$  als Blaupause in einem Rechteck unter das Arrangement  $x$ . Wähle dann in beliebiger Reihenfolge  $\sigma \in S_n$  die Geraden  $1, \dots, n$ , lösche sie aus dem Arrangement und führe sie stattdessen  $y$  aufbauend unten durch das Rechteck. Abb. 2.8 stellt dies mit der Reihenfolge  $\sigma = [1, 2, 3, 4, 5]$  dar.

Fixiert man die Reihenfolge  $\sigma$ , im Folgenden  $\sigma = [1, \dots, n]$ , so definiert dies eine Familie  $\Gamma = \{\gamma_{x,y}\}$  kanonischer Pfade auf der Zustandsmenge  $\mathcal{X}$  einfacher Arrangements der Ordnung  $n$ . Um zu zeigen, dass die Markov-Kette schnell mischend ist, genügte es mit Theorem 2.24 Theorem 2.22 und Theorem 2.12 zu zeigen, dass die Stauung  $\rho(\Gamma)$  polynomiell in  $n$  beschränkt ist.

Für ein Arrangement  $x \in \mathcal{X}$  bezeichne  $\text{Ext}(x, \{i_1, \dots, i_k\})$  die Anzahl der Möglichkeiten,  $x$  ohne die Geraden  $[n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ , also unter Festhalten der Geraden  $i_1, \dots, i_k$ , erneut zu einem Arrangement der Ordnung  $n$  zu erweitern. Sind Arrangements  $x, y \in \mathcal{X}$

Abbildungung 2.8.: Schrittweiser Übergang von Arrangement  $x$  zu  $y$ 

durch Neueinfügung der Geraden  $i$  ineinander überführbar, so ist

$$P(x, y) \geq \frac{1}{n \cdot \text{Ext}(x, [n] \setminus \{i\})}$$

die Übergangswahrscheinlichkeit von  $x$  zu  $y$  <sup>[6]</sup> Bezeichne  $G(M)$  den Graphen auf Knotenmenge  $\mathcal{X}$  wie in Def. 2.23, sei  $e = (x_0, y_0)$  darin eine beliebige Kante und  $i$  der Index der in diesem Übergang neueingefügten Gerade. Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(e)} \sum_{\substack{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \\ e \in \gamma_{x,y}}} \pi(x)\pi(y) \\ \leq \frac{n \cdot \text{Ext}(x_0, \{1, \dots, i-1\}) \text{Ext}(y_0, \{i+1, \dots, n\}) \text{Ext}(x_0, [n] \setminus \{i\})}{|\mathcal{X}|}, \end{aligned}$$

da das Produkt  $\text{Ext}(x_0, \{1, \dots, i-1\}) \text{Ext}(y_0, \{i+1, \dots, n\})$  genau die Kombinationen von Start- und Zielzuständen  $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  zählt, für die der Pfad  $\gamma_{x,y}$  die Kante  $(x_0, y_0)$  benutzt, und außerdem  $\pi(x) = \frac{1}{|\mathcal{X}|}$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  gilt.

Die Stauung  $\rho(\Gamma)$  erhält man nun durch Maximierung über  $e$ . Zwar ist der Nenner des letzten Ausdrucks exponentiell, jedoch ebenso die drei Ext-Ausdrücke im Zähler <sup>[7]</sup>. Vermutlich lässt sich der Term nicht polynomiell abschätzen.

Die kurzen Pfade in  $G(M)$  lassen es dennoch plausibel erscheinen, dass die Markov-Kette schnell mischend ist. Um dies zu beweisen, könnte versucht werden, unter Ausnutzung verschiedener Permutationen  $\sigma$  eine geeignetere Familie kanonischer Pfade mit polynomieller Stauung zu konstruieren.

<sup>6</sup>Unterscheiden sich  $x$  und  $y$  nicht nur durch einen Drecksflip, so steht hier Gleichheit. Doch im Falle eines Drecksflips kann der Zustandsübergang auch durch Neueinfügung einer der anderen beiden am Dreieck beteiligten Geraden geschehen und ein Faktor von 3 ist zu berücksichtigen.

<sup>7</sup>Für eine obere Schranke an  $\text{Ext}(x_0, [n] \setminus \{i\})$  siehe Lemma 3.8 in Absch. 3.2

## 2.5. Optimale Plane Partitions

Zeichnungen von hexagonalen Rhombenpflasterungen wie die in Abb. [2.1b](#) wirken optisch wie perspektivische Zeichnungen von in der Ecke einer Lagerhalle gestapelten Kisten. Jeder Stapel hat von der unteren Ecke der Zeichnung ausgehend eine Koordinate  $(i, j) \in [n_3] \times [n_1]$  und eine Höhe  $0 \leq h_{i,j} \leq n_2$  mit der Eigenschaft  $h_{i,j} \leq h_{i+1,j}$  und  $h_{i,j} \leq h_{i,j+1}$ , da kein Stapel von vordergründigeren Stapeln verdeckt wird. Dies entspricht folgender Definition.

**Definition 2.30.** Eine  $r \times s$ -Matrix  $[h_{i,j}]$  mit  $h_{i,j} \in \mathbb{N}_0$  und monoton wachsenden Zeilen und Spalten heißt *Plane Partition* der Größe  $r \times s$  und Höhe  $\hat{h} := \max h_{i,j}$ .

**Proposition 2.31.** *Zonotopale Pflasterungen der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  stehen mit Plane Partitions der Größe  $n_3 \times n_1$  und Höhe  $\hat{h} \leq n_2$  in Bijektion.*

Dabei lässt sich in Prop. [2.31](#) die Form  $(n_1, n_2, n_3)$  für beliebige Permutation  $\pi \in S_3$  durch  $(n_{\pi(1)}, n_{\pi(2)}, n_{\pi(3)})$  ersetzen, da zonotopale Pflasterungen der Formen  $(n_1, n_2, n_3)$  und  $(n_{\pi(1)}, n_{\pi(2)}, n_{\pi(3)})$  über Drehungen und Spiegelungen in Bijektion stehen.

Für folgenden Beweis und für später führen wir für  $(i, j) \in [r] \times [s]$  die Bezeichnung  $z(i, j)$  für die von  $(i-1, j-1), (i-1, j), (i, j-1), (i, j) \in Z(r, s)$  aufgespannte Gitterzelle ein, und außerdem die Spiegelung  $\varphi : [r] \times [s] \rightarrow [r] \times [s], (i, j) \mapsto (r - i + 1, j)$ , welche zwischen Gitterindizes und Indizes der Plane Partition transformiert. Beachte  $\varphi^{-1} = \varphi$ .

*Beweis.* Ein  $n_2$ -Pfadsystem in  $Z(n_3, n_1)$  liefert eine Plane Partition  $H = [h_{i,j}]$  der Größe  $n_3 \times n_1$ , in der  $h_{i,j}$  die Zahl der unterhalb von  $z(\varphi(i, j)) = z(n_3 - i + 1, j)$  verlaufenden Pfade ist, denn Monotonieeigenschaft und  $\max h_{i,j} \leq n_2$  sind dann klar.

Sei umgekehrt eine Plane Partition  $H$  der Größe  $n_3 \times n_1$  und Höhe  $\hat{h} \leq n_2$  gegeben. Für  $k \in \{0, \dots, n_2 - 1\}$  betrachte die Grenzlinie  $p_k$  zwischen den Zellen  $I_{\leq}^k := \{z(\varphi(i, j)) : h_{i,j} \leq k\}$  und  $I_{>}^k := \{z(\varphi(i, j)) : h_{i,j} > k\}$  und verlängere diese über Randkanten von  $Z(n_3, n_1)$  zu Pfaden zwischen  $(0, 0)$  und  $(n_3, n_1)$ . Aufgrund der Zeilen- und Spaltenmonotonie von  $H$  benutzen diese Pfade nur Kanten  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  und sind daher kürzeste Pfade. Es gilt  $I_{\leq}^0 \subseteq I_{\leq}^1 \subseteq I_{\leq}^2 \subseteq \dots$ , daher schneiden sich die Pfade  $p_k$  nicht, sondern bilden ein Pfadsystem  $\bar{P} : p_0 \leq \dots \leq p_{n_2-1}$  in  $Z(n_3, n_1)$ . Dabei entspricht die Zahl der unterhalb von Zelle  $z(\varphi(i, j))$  verlaufenden Pfade  $p_k$  genau  $h_{i,j}$ . Die Abbildung  $H \mapsto \bar{P}$  ist somit invers zu obiger.  $\square$

Die in Absch. [2.2](#) bis [2.4](#) behandelten Methoden können also verwendet werden, um uniform zufällige Plane Partitions gegebener Größe und beschränkter Höhe zu

erzeugen. Für Gewichtsfunktionen  $f_{i,j} : \{0, \dots, h\} \rightarrow \mathbb{Q}$  betrachte das naheliegende Optimierungsproblem auf Plane Partitions der Größe  $r \times s$  und Höhe  $\hat{h} \leq h$ :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s f_{i,j}(h_{i,j}) \\
 \text{s.t.} \quad & h_{i,j} \leq h_{i,j+1} \quad \text{für alle } i \in [r], j \in [s-1] \\
 & h_{i,j} \leq h_{i+1,j} \quad \text{für alle } i \in [r-1], j \in [s] \\
 & 0 \leq h_{i,j} \leq h \\
 & h_{i,j} \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Im Lichte der Bijektion in Prop. 2.31 führen wir 2.1 auf das Problem des Findens eines minimalen  $h$ -Pfadsystems in  $Z(r, s)$  unter einer geeigneten Gewichtung zurück. Die Gewichte  $f_{i,j}(x)$  der Einträge von Plane Partitions übertragen sich zunächst auf Gewichte  $f_{\varphi(i,j)}(x)$  der Zellen  $z(i, j) \in Z(r, s)$ , und anschließend wie folgt auf die Kanten von  $Z(r, s)$ .

Für  $(i, j) \in [r] \times [s]$  bezeichne die Menge  $Z_{i,j}^-$  die zueinander parallelen Kanten in  $Z(r, s)$ , die von Zelle  $z(i, j)$  gesehen in der Bahn in Richtung links unten liegen, formal:

$$Z_{i,j}^- := \{((i-1, j'), (i, j')) : 0 \leq j' \leq j-1\}$$

Für  $k \in [h]$  definiere nun folgende Kantengewichte: Für  $(i, j) \in [r] \times \{0, \dots, s-1\}$  setze

$$w_k((i-1, j), (i, j)) := \sum_{\substack{(i', j') \in [r] \times [s] \\ ((i-1, j), (i, j)) \in Z_{i', j'}^-}} f_{\varphi(i', j')}(k) - f_{\varphi(i', j')}(k-1).$$

Für alle anderen Kanten  $e$  in  $Z(r, s)$  setze  $w_k(e) = 0$ . Betrachte nun auf der Menge  $\mathcal{P}$  der  $h$ -Pfadsysteme zwischen Gitterpunkten  $(0, 0)$  und  $(r, s)$  folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^h \sum_{e \in p_k} w_k(e) \\
 \text{s.t.} \quad & (p_1 \leq \dots \leq p_h) \in \mathcal{P}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

**Lemma 2.32.** Ein Löser für 2.2 löst unter oben beschriebener Gewichtung 2.1.

*Beweis.* Zulässige Lösungen von 2.1 und 2.2 stehen wie im Beweis von Prop. 2.31 gesehen in Bijektion. Wir zeigen, dass unter dieser Bijektion und oben beschriebener

Kantengewichtung die Zielfunktionen von (2.1) und (2.2) äquivalent sind. Unter dieser Bijektion laufen in einem Pfadsystem  $P : p_1 \leq \dots \leq p_h$  genau die Pfade  $\{p_k : k \leq h_{i,j}\}$  unterhalb der Zelle  $z(\varphi(i, j))$  und benutzen dabei exakt eine der Kanten  $Z_{\varphi(i,j)}^-$ , sodass jeder Pfad  $p_k$  mit  $k \leq h_{i,j}$  in Verbindung mit Zelle  $z(\varphi(i, j))$  zu den Gesamtkosten um  $f_{i,j}(k) - f_{i,j}(k-1)$  beiträgt. Aufsummiert über alle  $k = 1, \dots, h_{i,j}$  ergibt dies  $f_{i,j}(h_{i,j}) - f_{i,j}(0)$ , was summiert über alle  $(i, j) \in [r] \times [s]$  die Zielfunktion in (2.1) abzüglich des konstanten Summanden  $\sum_{(i,j)} f_{i,j}(0)$  ergibt.  $\square$

**Theorem 2.33.** *Problem (2.1) kann für gewisses Polynom  $p \in \mathbb{R}[x]$  in Laufzeit  $\mathcal{O}(p(r+s)(r+s)^{2h})$  gelöst werden.*

*Beweis.* Benutze die Rückführung von (2.1) auf (2.2) in Lemma 2.32 und ferner die in Absch. 2.3.2 beschriebene Bijektion von Pfadsystemen zu  $\bar{s}$ - $\bar{t}$ -Pfaden des Hilfsgraphen  $G_h = (V_0^h \cup \dots \cup V_{r+s}^h, E^h)$ . Es ist nur die Gewichtung  $w_k(e)$  zu einer äquivalenten Gewichtung auf  $G^h$  zu übertragen und ein kürzester  $\bar{s}$ - $\bar{t}$ -Pfad in  $G^h$  zu finden. Für ersteres genügt es, der Kante  $((p_1^i, \dots, p_h^i), (p_1^{i+1}, \dots, p_h^{i+1})) \in V_i^h \times V_{i+1}^h$  das Gewicht  $\sum_{k=1}^h w_k(p_k^i, p_k^{i+1})$  zuzuweisen. Die Laufzeit ergibt sich ähnlich wie in Absch. 2.3.2  $\square$

Die Optimierung von Pfadsystemen über Kantengewichte wie in (2.2) lässt sich zum optimalen Einfügen einer neuen Klasse in ein Arrangement beliebiger Größe verallgemeinern. Auch andere Zielfunktionen sind denkbar, was zu neuen Anwendungen führen könnte. Es ist eine interessante Frage, ob auch ein effizienteres Lösungsverfahren existiert. Durch die Wahl zufälliger Kantengewichte und eines geeigneten Optimierungsproblems könnte es gelingen, effizient uniform zufällig eine Klasse einzufügen.

### 3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

#### 3.1. Zählen von hexagonalen Rhombenpflasterungen

Wie im vorigen Kapitel gesehen, stehen einfache Arrangements der Form  $(n_1, n_2, n_3)$ , hexagonale Rhombenpflasterungen, Pfadsysteme auf Gittern und Plane Partitions in Bijektion. Wir leiten nun eine Formel für deren Anzahl in Abhängigkeit von  $n_1, n_2, n_3$  her. Die folgende Idee stammt aus [Aig01](#).

Anstatt  $n_2$ -Pfadsysteme in  $Z(n_3, n_1)$  betrachte Systeme  $(p_1, \dots, p_{n_2})$  vertexdisjunkter  $s_i$ - $t_i$ -Pfade  $p_i$  in dem gerichteten Graphen  $G(n_3, n_1)$  wie in Abb. [3.1b](#), der aus  $n_2$ -fachem „Versetzen“ von  $Z(n_3, n_1)$  entsteht. Dies steht in Bijektion: Jeder der  $s_i$ - $t_i$ -Pfade  $p_i$  bildet einen kürzesten Pfad in  $Z(n_3, n_1)$ , und zwei Pfade  $p_i, p_{i+1}$  sind genau dann vertexdisjunkt, wenn nach jeder Anzahl an Kanten  $0 \leq k \leq n_1 + n_3$  der Pfad  $p_i$  nicht mehr auf-Schritte  $(0, 1)$  enthält als  $p_{i+1}$  und sich somit  $p_i$  und  $p_{i+1}$  in  $Z(n_3, n_1)$  nicht kreuzen. Für das Zählen solcher vertexdisjunkter Pfadsysteme dient das Lindström-Gessel-Viennot-Lemma, welches wir hier der Vollständigkeit wegen wiedergeben, jedoch aufgrund dessen Bekanntheit für den Beweis auf den Originalartikel in [GV89](#) verweisen.

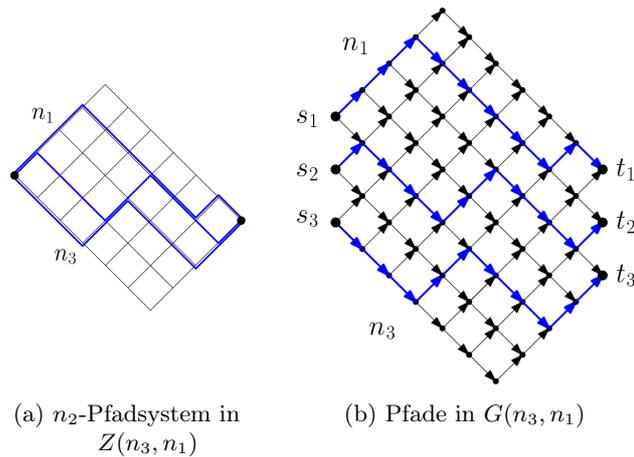


Abbildung 3.1.: Pfadsysteme und Systeme vertexdisjunkter Pfade

### 3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

**Lemma 3.1** (Lindström-Gessel-Viennot). Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, azyklischer Graph mit Gewichten  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , ausgezeichneten Startknoten  $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq V$  und Zielknoten  $T = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq V$ . Ein gerichteter Pfad  $p$  in  $G$  habe Gewicht  $w(p) = \prod_{e \in p} w(e)$ , und für  $v, w \in V$  bezeichne  $w(v, w) := \sum_p w(p)$  die Gewichtssumme über alle  $v$ - $w$ -Pfade. Ein System vertexdisjunkter Pfade  $P = (p_1, \dots, p_k)$  verbinde  $S$  mit  $T$ , wenn für eine Permutation  $\pi(P) \in S_k$  Pfad  $p_i$  ein  $s_i$ - $t_{\pi(i)}$ -Pfad ist. Dann gilt:

$$\det([w(s_i, t_j)]_{1 \leq i, j \leq k}) = \sum_{P \text{ verbindet } S, T} \operatorname{sgn}(\pi(P)) \prod_{i=1}^k w(p_i)$$

Angewandt auf  $G(n_3, n_1)$  mit uniformen Kantengewichten von 1 zählt die rechte Seite der Gleichung des Lindström-Gessel-Viennot-Lemmas die vertexdisjunkten Pfadsysteme  $P$ , denn für alle Summanden gilt  $\pi(P) = \operatorname{Id}_k$  und  $\prod_{i=1}^k w(p_i) = 1$ . Es ist also nur die Determinante auf der linken Seite auszuwerten. Da jeder Pfad Gewicht 1 besitzt, zählt  $w(s_i, t_j)$  die  $s_i$ - $t_j$ -Pfade. Diese bestehen aus  $n_1 + n_3$  Kanten, von denen beliebige  $n_3 + j - i$  Kanten Abwärtskanten sind. Somit ist  $w(s_i, t_j) = \binom{n_1 + n_3}{n_3 + j - i}$ . Zur Berechnung der Determinante geben wir im Folgenden einen Ansatz aus [\[Kra99\]](#) wieder.

**Lemma 3.2.** (Desnanot–Jacobi-Formel) Sei  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Bezeichne  $M_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$  die Matrix, die durch Streichung der Zeilen  $i_1, \dots, i_r$  und Spalten  $j_1, \dots, j_s$  aus  $M$  hervorgeht. Dann gilt:

$$\det(M) \det(M_{1,n}^{1,n}) = \det(M_1^1) \det(M_n^n) - \det(M_1^n) \det(M_n^1)$$

**Lemma 3.3.** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left[ \begin{pmatrix} a+b \\ a-i+j \end{pmatrix} \right] = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

*Beweis.* Per Induktion über  $n$ . Seien  $M_n(a, b) := \left[ \begin{pmatrix} a+b \\ a-i+j \end{pmatrix} \right]_{i,j}$ ,  $L_n(a, b) := \det M_n(a, b)$  der Ausdruck der linken und  $R_n(a, b)$  der Ausdruck der rechten Seite. Für  $n = 0$  ist die Gleichung trivial. Für  $n = 1$  gilt ebenso

$$R_n(a, b) = \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{j+k}{j+k-1} = \prod_{j=1}^a \frac{j+b}{j} = \binom{a+b}{a} = L_n(a, b).$$

Für den Induktionsschritt nutzt man Lemma [3.2](#). Mit derselben Notation beobachtet man  $M_n(a, b)_n^n = M_{n-1}(a, b)$ ,  $M_n(a, b)_1^1 = M_{n-1}(a, b)$ ,  $M_n(a, b)_1^n = M_{n-1}(a+1, b-1)$ ,  $M_n(a, b)_n^1 = M_{n-1}(a-1, b+1)$  und  $M_n(a, b)_{1,n}^{1,n} = M_{n-2}(a, b)$ . Damit folgt unter

Anwendung der Induktionsvoraussetzung:

$$L_n(a, b)R_{n-2}(a, b) = R_{n-1}(a, b)^2 - R_{n-1}(a-1, b+1)R_{n-1}(a+1, b-1).$$

Man kann nun  $L_n(a, b) = R_n(a, b)$  nachrechnen. □

Für einen ausführlichen, jedoch anderen Beweis von Lemma [3.3](#) sei auf [Gor21](#), Absch. 2.2 S. 28f] verwiesen.

**Theorem 3.4** (MacMahon-Formel, [Mac16](#) § 495]). *Die Zahl hexagonaler Rhombenpflasterungen der Form  $(n_1, n_2, n_3)$  beträgt*

$$\prod_{i=1}^{n_1} \prod_{j=1}^{n_2} \prod_{k=1}^{n_3} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

*Beweis.* Folgt mit den Erläuterungen oben aus dem Lindström-Gessel-Viennot-Lemma und Lemma [3.3](#). □

## 3.2. Exponentielle Schranken an Anzahl einfacher Arrangements der Ordnung $n$

Bezeichne  $B_n$  die Menge einfacher Arrangements der Ordnung  $n$ . Es sind aus [FV01](#) und [DM20](#) die folgenden Schranken bekannt:

**Theorem 3.5.** *Es gilt  $0.2083n^2 \leq \log_2 |B_n| \leq 0.6571n^2$  für hinreichend große  $n$ .*

Wir geben im Folgenden nur den einfachen Beweis der älteren und schwächeren oberen Schranke  $\log_2 |B_n| \leq 0.7925n^2$  von Knuth wieder und orientieren uns dabei an der Beweisformulierung in [FV01](#).

**Theorem 3.6** (Vgl. [Knu92](#) p. 39]). *Es gilt  $|B_n| \leq 3^{\binom{n}{2}}$ .*

Jedes einfache Arrangement der Ordnung  $n$  entsteht auf eindeutige Weise durch Einfügen der  $n$ -ten Gerade entlang eines sogenannten *Schnittpfades* in das durch die Geraden  $1, \dots, n-1$  induzierte Arrangement, wie in Abb. [3.2](#) dargestellt. Die Schnittpfade entsprechen den  $s$ - $t$ -Pfadern des Dualgraphen  $G = (V, E)$ . Dieser ist

3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

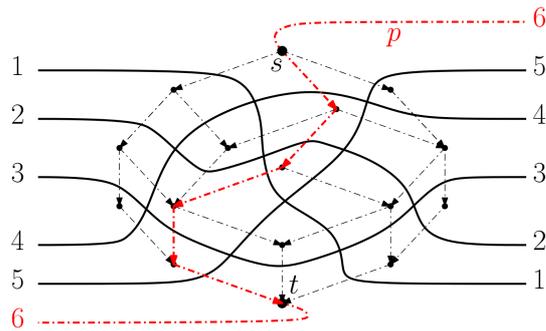


Abbildung 3.2.: Schnittpfad  $p$  bildet neue Gerade

schon aus Absch. [2.3.2](#) bekannt, da er isomorph zum Graphen auf den Kanten der zugehörigen Rhombenpflasterung ist.

Sei  $\gamma_n$  die maximale Anzahl an Schnittpfaden, die in einem Arrangement der Ordnung  $n$  auftreten können. Es gilt  $|B_n| \leq \gamma_n \cdot |B_{n-1}|$ . Kann man  $\gamma_n \leq 3^n$  zeigen, so folgt Theorem [3.6](#) unter Beachtung von  $|B_1| = 1$  induktiv. Der Beweis beruht auf folgender Idee: Alle Schnittpfade haben Länge  $n$ . Zwar können in  $G$  Ausgangsgrade größer als 3 auftreten, jedoch können die Ausgangsgrade entlang eines gesamten Schnittpfades in Summe nicht beliebig groß werden.

Sei  $v \in V$  ein Knoten mit Ausgangsgrad  $d \geq 3$ . Die  $d - 2$  ausgehenden Kanten von  $v$ , welche nicht die ganz linke oder ganz rechte sind, bezeichnen wir als *mittig ausgehende* Kanten von  $v$ . Wir sagen,  $v$  *sehe* Gerade  $i$  *mittig*, wenn eine mittig ausgehende Kante von  $v$  Gerade  $i$  schneidet. In Abb. [3.2](#) beispielsweise sieht  $s$  die Gerade 4 mittig und der zweite Knoten des Schnittpfades  $p$  sieht Gerade 2 mittig. Entlang von  $p$  werden ansonsten keine Geraden mittig gesehen.

**Lemma 3.7.** *Entlang eines gerichteten Pfades in  $G$  wird jede Gerade höchstens einmal mittig gesehen.*

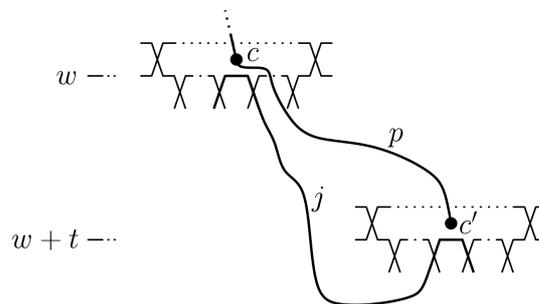


Abbildung 3.3.: Situation im Beweis vom Lemma [3.7](#)

*Beweis.* Angenommen, ein Schnittpfad  $p$  sieht Gerade  $j$  zweimal mittig, und zwar zunächst bei Knoten  $c$  und später nochmals bei Knoten  $c'$ . Betrachte dies in der Zeichnung eines Drahtdiagrammes, in der die Geraden auf diskreten Tiefen  $1, \dots, n$  verlaufen, zwischen denen die Flächensegmente und damit Knoten von  $G$  liegen. Seien  $w$  und  $w + t$  die Tiefen der Gerade  $j$  bei  $c$  und bei  $c'$ . Abb. 3.3 stellt die Situation dar.

Entlang der Knoten von  $p$  steigen die Tiefen, zwischen denen sich die Knoten befinden, um jeweils 1. Daher hat  $p$  zwischen  $c$  und  $c'$  genau  $t$  Kanten, schneidet also genau  $t$  Geraden. Die Gerade  $j$  hingegen schneidet zwischen dem Abschnitt bei  $c$  bis zum Abschnitt bei  $c'$  mindestens  $t + 2$  Geraden, da sie stellenweise mindestens Tiefe  $w + t + 1$  erreicht. Diese  $t + 2$  Geraden müssen auch  $p$  im Abschnitt zwischen  $c$  und  $c'$  schneiden. Widerspruch.  $\square$

**Lemma 3.8.** *Es gilt  $\gamma_n \leq 3^n$ .*

*Beweis.* Sei  $a_{m,r}$  die über alle Arrangements der Ordnung  $n$  größtmögliche Zahl an Pfaden, die in einem gemeinsamen Knoten starten können, in  $t$  enden, deren Länge  $m$  beträgt und entlang derer höchstens  $r$  Geraden mittig gesehen werden. Wir zeigen  $a_{m,r} \leq 3^r 2^{m-r}$  per Induktion über  $m$ . Man sieht  $\gamma_n = a_{n,n}$ , woraus die Aussage folgt.

Für  $m = 0$  ist  $a_{m,r} = 1$  und die Ungleichung trivial. Sei also  $m > 0$ . Betrachte ein Arrangement und in dessen Graphen  $G$  einen gemeinsamen Startknoten  $v \in V$ , die zusammen das Maximum  $a_{m,r}$  realisieren. Sei  $d$  der Ausgangsgrad von  $v$ . Für die erste Kante eines  $v$ - $t$ -Pfades gibt es  $d$  Wahlmöglichkeiten, und da  $v$  genau  $d - 2$  Geraden mittig sieht, können entlang des restlichen Pfades der Länge  $m - 1$  nach Lemma 3.7 diese  $d - 2$  Geraden nicht mehr mittig gesehen werden. Deshalb gilt:

$$a_{m,r} \leq \begin{cases} d \cdot a_{m-1,r} & \text{falls } d \in \{1, 2\} \\ d \cdot a_{m-1,r-d+2} & \text{falls } d \geq 3 \end{cases}$$

Mittels der Induktionsvoraussetzung rechnet man nun  $a_{m,r} \leq 3^r 2^{m-r}$  nach.  $\square$

### 3.3. Zählen und Erzeugung von einfachen Permutationssequenzen

Aus Kapitel 1 ist bekannt, dass einfache Arrangements der Ordnung  $n$  Äquivalenzklassen von einfachen Permutationssequenzen entsprechen, im Folgenden kurz *Sequenzen* genannt. Fasst man in einer Sequenz die Umdrehungen jeweils zweier benachbarter Zeichen als Nachbartranspositionen auf, die nacheinander angewendet werden, beginnend mit der Identitätspermutation, so entsprechen Sequenzen genau den minimalen

### 3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

Zerlegungen (engl. *reduced decompositions*)  $\pi_{\text{rev}} = \text{Id} \circ \tau_{s_1} \circ \dots \circ \tau_{s_N}$  der Permutation  $\pi_{\text{rev}} := [n, \dots, 1]$  in Nachbartranspositionen  $\tau_i := [1, \dots, i+1, i, \dots, n] \in S_n$ , wobei  $N = \binom{n}{2}$ . Diese lassen sich wiederum als maximale Ketten in der Bruhat-Ordnung  $S_n(2)$  auf Permutationen auffassen, siehe Abb. 3.4. Zwei Sequenzen sind genau dann direkt äquivalent, wenn sich deren Ketten in  $S_n(2)$  durch einen Flip an einem Diamanten überführen lassen.

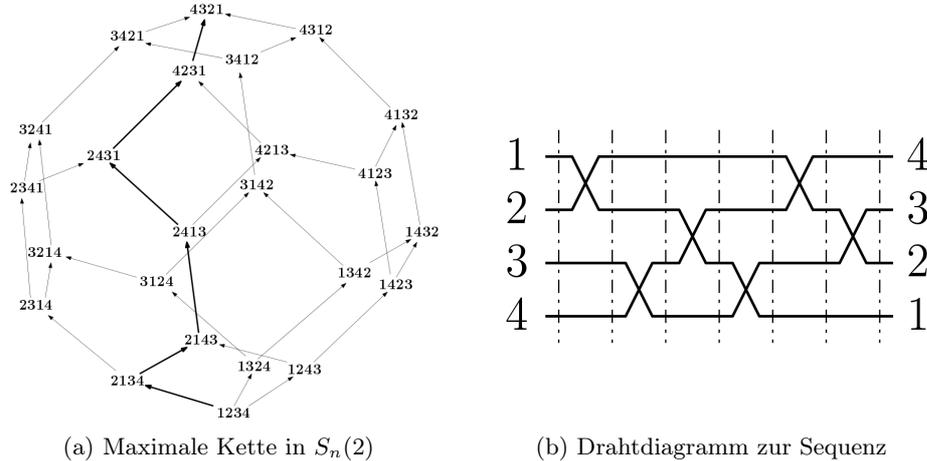


Abbildung 3.4.: Sequenzen als maximale Ketten der Bruhat-Ordnung

Im Jahr 1987 beschrieben Edelman und Greene eine Bijektion zwischen *Standard-Young-Tableaus* in *Treppenstufenform* und maximalen Ketten in  $S_n(2)$ , welche als Edelman-Greene-Bijektion bekannt wurde (Siehe [EG87]). Die Übereinstimmung derer Kardinalitäten war schon vorher bekannt (Vgl. [Sta84]). Wir folgen hier den Ausführungen von Angel, Holroyd, Romik, Virág in [AHRV07], die eine Methode aus [GNW79] nutzen, um diese Tableaus und damit auch Sequenzen, die sie als *Sortiernetzwerke* auffassen, zufällig zu erzeugen.

#### 3.3.1. Edelman-Greene-Bijektion

Wir erklären die bereits erwähnte Edelman-Greene-Bijektion ohne Beweis, dabei [AHRV07] folgend. Für einen Beweis der Bijektion sei auf [EG87] verwiesen. Im Folgenden bezeichne  $\Omega_n \subseteq [n-1]^N$  die Menge der Sequenzen bzw. wie oben der Zerlegungen  $[n, \dots, 1] = \text{Id} \circ \tau_{s_1} \circ \dots \circ \tau_{s_N}$ , die wir als  $N$ -Tupel  $(s_1, \dots, s_N)$  kodieren, wobei  $N = \binom{n}{2}$ .

**Definition 3.9.**                      Standard-Young-Tableaus

- 1) Ein Tupel  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$  mit  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$  heißt *Partition* von  $|\lambda| := \sum \lambda_i$ .

2) Das *Young-Diagramm* einer Partition  $\lambda$  besteht aus den Zellen

$$Z(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \lambda_k\},$$

die wir als Quadrate in einem nach unten und nach rechts ausgerichteten Koordinatensystem zeichnen.

3) Ein *Standard-Young-Tableau* der Form  $\lambda$  ist eine in beiden Argumenten monoton wachsende Bijektion  $Z(\lambda) \rightarrow \{1, \dots, |\lambda|\}$ , die wir im Young-Diagramm als Beschriftung der Zellen  $Z(\lambda)$  mit deren Bildern darstellen.

Es bezeichne  $\text{SYT}(\lambda)$  die Menge aller Standard-Young-Tableaus der Form  $\lambda$ . Für  $T \in \text{SYT}(\lambda)$  sei  $(i_{\max}(T), j_{\max}(T)) := T^{-1}(|\lambda|)$  die Zelle mit dem größten Eintrag  $|\lambda|$ .

Algorithmus 2 beschreibt den sogenannten *Schützenberger-Operator*  $\Phi$  auf Standard-Young-Tableaus.

**Eingabe:**  $T \in \text{STY}(\lambda)$     **Ausgabe:**  $T \in \text{STY}(\lambda)$

**Konvention:** Falls  $i < 1$  oder  $j < 1$ :  $T(i, j) = -\infty$

1) **Slide:** Bestimmen eines Pfades  $c_1, \dots, c_d$ :

```

 $c_1 \leftarrow (i_{\max}(T), j_{\max}(T)); i \leftarrow 1$ 
while  $c_i \neq (1, 1)$  do
    | if  $T(c_i - (0, 1)) > T(c_i - (1, 0))$  then  $c_{i+1} \leftarrow c_i - (0, 1)$ 
    | if  $T(c_i - (0, 1)) < T(c_i - (1, 0))$  then  $c_{i+1} \leftarrow c_i - (1, 0)$ 
    |  $i \leftarrow i + 1$ 
end

```

2) **Shift:** Aufrücken der Werte  $T(c_1), \dots, T(c_d)$ :

```

for  $i \leftarrow 1, \dots, d - 1$  do  $T(c_i) \leftarrow T(c_{i+1})$ 
 $T(1, 1) = T(c_d) \leftarrow 0$ 

```

3) **Inc:** Inkrementieren aller Werte um 1:

```

foreach  $(i, j) \in Z(\lambda)$  do  $T(i, j) \leftarrow T(i, j) + 1$ 

```

### Algorithmus 2: Schützenberger-Operator

**Lemma 3.10.** *Der Schützenberger-Operator  $\Phi$  ist eine wohldefinierte bijektive Abbildung  $\Phi : \text{STY}(\lambda) \rightarrow \text{STY}(\lambda)$ .*

*Beweis.*  $\Phi$  ist wohldefiniert: Nach Schritt **Shift** ist  $T(Z(\lambda)) = \{0, \dots, |\lambda| - 1\}$  und somit ist nach Schritt **Inc**  $T$  wieder bijektiv. Zeilen- und Spaltenmonotonie bleiben in Schritt **Shift** innerhalb der Zellen  $c_1, \dots, c_d$  sowie innerhalb der Zellen  $Z(\lambda) \setminus \{c_1, \dots, c_d\}$  trivialerweise erhalten, jedoch auch zwischen Zellen  $c_1, \dots, c_d$  und  $Z(\lambda) \setminus \{c_1, \dots, c_d\}$ ,

### 3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

was durch Fallbetrachtung aus der Konstruktionsweise des Pfades  $c_1, \dots, c_d$  ersichtlich wird. Die anderen Schritte **Slide** und **Inc** beeinflussen die Monotonie nicht.

Ferner ist  $\Phi$  bijektiv: Durch Ausnutzung der Monotonieeigenschaft von  $T \in \text{SYT}(\lambda)$  lässt sich aus dem Bild  $\Phi(T)$  der verwendete Pfad  $c_1, \dots, c_d$  eindeutig rekonstruieren, indem man rückwärts, ausgehend von Zelle  $(1, 1)$ , in jedem Schritt zu jener der beiden unteren oder rechten Nachbarzellen wandert, die den kleineren Wert enthält, bis man an eine Ecke gelangt. Basierend darauf konstruiere man eine Umkehrabbildung  $T^{-1}$ .  $\square$

Es bezeichne im Folgenden  $\lambda_\Delta(n) := (n-1, n-2, \dots, 1)$  die Partition von  $|\lambda_\Delta(n)| = \binom{n}{2}$ , deren Young-Diagramm *Treppenstufenform* besitzt.

**Definition 3.11.** Die *Edelman-Greene-Abbildung*  $EG : \text{SYT}(\lambda_\Delta(n)) \rightarrow \Omega_n$  ist definiert durch  $T \mapsto (j_{\max}(\Phi^{N-k}(T)))_{k=1, \dots, N}$ , wobei  $N = \binom{n}{2}$ .

Abb. 3.5 demonstriert die Abbildung eines Standard-Young-Tableaus durch  $EG$  auf die Sequenz in Abb. 3.4.

Zur Definition der Umkehrabbildung von  $\Phi$  wird der Einfügealgorithmus (Alg. 3) benötigt. Dieser arbeitet auf Tableaus, die zwar die Monotonieeigenschaft erfüllen, jedoch beliebige Ganzzahlen enthalten können, auch mehrfach. Der Algorithmus fügt eine neue Zahl ein und erweitert die Form des Tableaus um eine Zelle.

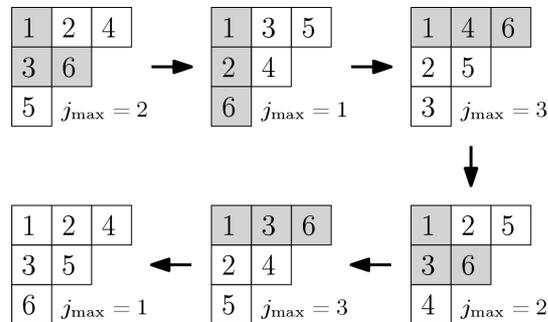


Abbildung 3.5.: Beispiel  $EG : T \mapsto (1, 3, 2, 3, 1, 2)$  mit  $T$  oben linkem SYT. Iterative Anwendung von  $\Phi$ . Pfad  $c_1, \dots, c_d$  grau hinterlegt.

**Definition 3.12.** Die *Inverse Edelman-Greene-Abbildung*  $EG^{-1} : \Omega_n \rightarrow \text{SYT}(\lambda_\Delta(n))$  bildet  $(s_1, \dots, s_N)$  auf das Tableau  $T$  der Form  $\lambda_\Delta(n)$  ab, in der  $T(i, j)$  die minimale Zahl  $k$  ist, so dass nach sukzessivem Einfügen von  $s_1, \dots, s_k$  in ein anfangs leeres Tableau  $\emptyset$  mittels Alg. 3 das resultierende Tableau die Zelle  $(i, j)$  enthält.

Abb. 3.6 demonstriert  $EG^{-1}(\omega)$  mit  $\omega$  aus Abb. 3.4

**Eingabe:** Tableau  $T : Z(\lambda) \rightarrow \mathbb{N}$ ; Einfügezahl  $u$

**Ausgabe:** Tableau  $T : T(\lambda') \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $|\lambda'| = |\lambda| + 1$

**Konvention:**  $(i, j) \notin Z(\lambda) \iff T(i, j) = \infty$

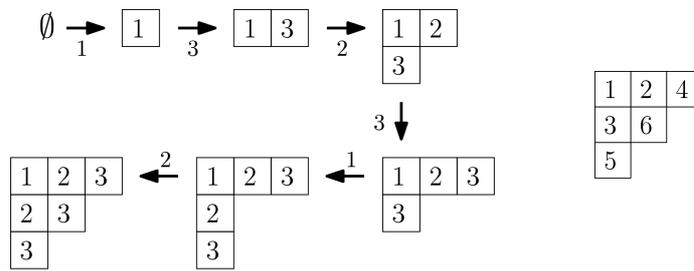
**Initialisiere:**  $i \leftarrow 1$ ;  $q \leftarrow u$

**while**  $q \neq \infty$  **do**

$j_0 \leftarrow \min\{j \in \mathbb{N} : T(i, j) \geq q\}$   
**if**  $T(i, j_0) = q$  **then**  $q \leftarrow q + 1$   
**if**  $T(i, j_0) > q$  **then**  $q' \leftarrow T(i, j_0)$ ;  $T(i, j_0) \leftarrow q$ ;  $q \leftarrow q'$   
 $i \leftarrow i + 1$

**end**

**Algorithmus 3:** Einfügealgorithmus



(a) Iteratives Anwenden von Alg. 3 (b) Res.  $T$

Abbildung 3.6.: Beispiel  $EG^{-1} : (1, 3, 2, 3, 1, 2) \mapsto T$

**Lemma 3.13.** Die Abbildung  $EG^{-1}$  ist wohldefiniert.

**Theorem 3.14.** ([EG87]) Die Abbildungen  $EG$  und  $EG^{-1}$  sind invers zueinander, insbesondere bijektiv.

### 3.3.2. Zählen und Erzeugung von Standard-Young-Tableaus

In diesem Abschnitt, in dem Ergebnisse aus [GNW79] wiedergegeben werden, beweisen wir das folgende Theorem und zeigen einen Algorithmus auf, mit dem effizient uniform zufällige Standard-Young-Tableaus erzeugt werden können. Zusammen mit der Edelman-Greene-Bijektion aus vorigem Abschnitt liefert dies Anzahl und Zufallserzeugung von Sequenzen.

Für eine Partition  $\lambda$  und  $(i, j) \in Z(\lambda)$  bezeichne

$$H_{i,j} := \{(i', j') \in Z(\lambda) : (i' = i \wedge j' \geq j) \vee (i' \geq i \wedge j' = j)\}$$

den *Hook* von  $\lambda$  an der Stelle  $(i, j)$ , und  $h_{i,j} := |H_{i,j}|$  dessen *Länge*. Eine Zelle

3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

$(i, j) \in Z(\lambda)$  heie *Eckzelle*, falls  $h_{i,j} = 1$ , was  $j = \lambda_i$  impliziert.

**Theorem 3.15.** (*Hook-Formel, Frame-Robinson-Thrall-Formel, [FRT54]*)

$$|\text{SYT}(\lambda)| = \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in Z(\lambda)} h_{i,j}}$$

**Korollar 3.16.** *Die Zahl einfacher Permutationssequenzen der Ordnung  $n$  beträgt*

$$|\Omega_n| = \frac{\binom{n}{2}!}{\prod_{i=1}^{n-1} (2n-1-2i)^i}$$

*Beweis.* Ergibt sich direkt aus Theorem 3.15, angewandt auf  $\lambda_\Delta(n)$ , und der Edelman-Greene-Bijektion nach Theorem 3.14.  $\square$

Betrachte folgendes Zufallsexperiment: Ziehe uniform eine Zelle  $(a_1, b_1) \in Z(\lambda)$ , d.h. jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{|\lambda|}$ . Wurde  $(a_i, b_i)$  gezogen, so ziehe uniform  $(a_{i+1}, b_{i+1})$  aus  $H_{a_i, b_i} \setminus \{(a_i, b_i)\}$ , d.h. jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{h_{a_i, a_j} - 1}$ . Iteriere dies bis zum Erreichen einer Eckzelle.

Fur zwei Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ , fur die  $(\alpha_A, \beta_B) := (\max A, \max B)$  eine Eckzelle in  $Z(\lambda)$  ist, bezeichne  $\mathbb{P}[A, B | \min A, \min B]$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $\{a_1, \dots, a_m\} = A$  und  $\{b_1, \dots, b_m\} = B$  bedingt auf das Ereignis  $a_1 = \min A$  und  $b_1 = \min B$ . Außerdem bezeichne  $\mathbb{P}[(\alpha, \beta)] := \mathbb{P}[(a_m, b_m) = (\alpha, \beta)]$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment in Eckzelle  $(\alpha, \beta) \in Z(\lambda)$  endet.

**Lemma 3.17.** *Es gilt:*

$$\mathbb{P}[A, B | \min A, \min B] = \left( \prod_{\substack{i \in A \\ i \neq \alpha_A}} \frac{1}{h_{i, \beta_B} - 1} \right) \left( \prod_{\substack{j \in B \\ j \neq \beta_B}} \frac{1}{h_{\alpha_A, j} - 1} \right)$$

*Beweis.* Seien  $A = \{\bar{a}_1 \leq \dots \leq \bar{a}_{|A|} = \alpha_A\}$  und  $B = \{\bar{b}_1 \leq \dots \leq \bar{b}_{|B|} = \beta_B\}$  und bezeichne  $R_{A,B}$  die rechte Seite der Aussage. Per Induktion über  $|A|$  und  $|B|$ .

Falls  $|A| = 1$ , so ist  $A = \{\bar{a}_1\}$ . Dann entspricht  $\mathbb{P}[A, B | \min A, \min B]$  der Wahrscheinlichkeit der Sequenz  $(\bar{a}_1, \bar{b}_1), \dots, (\bar{a}_1, \bar{b}_{|B|})$  bedingt auf deren Anfang  $(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ , welche auch dem rechten Produkt in  $R_{A,B}$  entspricht, wahrend das linke Produkt verschwindet. Der Fall  $|B| = 1$  folgt analog.

Seien nun  $|A|, |B| > 1$ . Per Induktion erhalten wir

$$\mathbb{P}[A \setminus \{\bar{a}_1\}, B | \min A \setminus \{\bar{a}_1\}, \min B] = R_{A \setminus \{\bar{a}_1\}, B} = (h_{\bar{a}_1, \beta_B} - 1) R_{A, B}$$

und

$$\mathbb{P}[A, B \setminus \{\bar{b}_1\} | \min A, \min B \setminus \{\bar{b}_1\}] = R_{A, B \setminus \{\bar{b}_1\}} = (h_{\alpha_A, \bar{b}_1} - 1) R_{A, B}.$$

Startet man mit  $(a_1, b_1) = (\bar{a}_1, \bar{b}_1)$ , so folgt als nächstes entweder  $(a_2, b_2) = (\bar{a}_2, \bar{b}_1)$  oder  $(a_2, b_2) = (\bar{a}_1, \bar{b}_2)$ . Damit lässt sich  $\mathbb{P}[A, B | \min A, \min B]$  einen Schritt auflösen und die Induktionsvoraussetzung nutzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A, B | \min A, \min B] &= \frac{1}{h_{\bar{a}_1, \bar{b}_1} - 1} (\mathbb{P}[A \setminus \{\bar{a}_1\}, B | \bar{a}_2, \bar{b}_1] + \mathbb{P}[A, B \setminus \{\bar{b}_1\} | \bar{a}_1, \bar{b}_2]) \\ &\stackrel{\text{IV.}}{=} \frac{1}{h_{\bar{a}_1, \bar{b}_1} - 1} ((h_{\bar{a}_1, \beta_B} - 1) + (h_{\alpha_A, \bar{b}_1} - 1)) R_{A, B} \end{aligned}$$

Es bleibt also  $h_{\bar{a}_1, \bar{b}_1} - 1 = (h_{\bar{a}_1, \beta_B} - 1) + (h_{\alpha_A, \bar{b}_1} - 1)$  zu zeigen, was man jedoch elementar leicht einsieht.  $\square$

Für  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$  setze

$$F(\lambda) := \begin{cases} \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j) \in Z(\lambda)} h_{i,j}(\lambda)} & \text{falls } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für  $\alpha \in [k]$  setze  $F_\alpha(\lambda) := F(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_k)$ .

**Lemma 3.18.** *Sei  $\lambda$  eine Partition und  $(\alpha, \beta) \in Z(\lambda)$  eine Eckzelle. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}[(\alpha, \beta)] = \frac{F_\alpha(\lambda)}{F(\lambda)}$$

*Beweis.* Setzt man für  $F_\alpha$  und  $F$  obige Definition ein und kürzt zu Hooks  $H_{i,j}$  gehörige Faktoren, deren Längen  $h_{i,j}$  in  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  und  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_k)$

übereinstimmen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{F_\alpha(\lambda)}{F(\lambda)} &= \frac{1}{|\lambda|} \left( \prod_{1 \leq i < \alpha} \frac{h_{i,\beta}}{h_{i,\beta} - 1} \right) \left( \prod_{1 \leq j < \beta} \frac{h_{\alpha,j}}{h_{\alpha,j} - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{|\lambda|} \left( \prod_{1 \leq i < \alpha} \left( 1 + \frac{1}{h_{i,\beta} - 1} \right) \right) \left( \prod_{1 \leq j < \beta} \left( 1 + \frac{1}{h_{\alpha,j} - 1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{\substack{A \subseteq [\alpha-1] \\ B \subseteq [\beta-1]}} \left( \prod_{i \in A} \frac{1}{h_{i,\beta} - 1} \right) \left( \prod_{j \in B} \frac{1}{h_{\alpha,j} - 1} \right).
 \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.17 sieht man dann:

$$\begin{aligned}
 \frac{F_\alpha(\lambda)}{F(\lambda)} &= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{\substack{A \subseteq [\alpha-1] \\ B \subseteq [\beta-1]}} \mathbb{P}[A \cup \{\alpha\}, B \cup \{\beta\} | \min A \cup \{\alpha\}, \min B \cup \{\beta\}] \\
 &= \sum_{a,b \in Z(\lambda)} \mathbb{P}[(a_1, b_1) = (a, b)] \\
 &\quad \cdot \sum_{\substack{A \subseteq [\alpha-1], \min A = a \\ B \subseteq [\beta-1], \min B = b}} \mathbb{P}[A \cup \{\alpha\}, B \cup \{\beta\} | (a_1, b_1) = (a, b)] \\
 &= \mathbb{P}[(\alpha, \beta)]
 \end{aligned}$$

□

*Beweis.* (Theorem 3.15) Sei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Jede Realisierung des oben beschriebenen Zufallsexperiments endet in einer Eckzelle  $(\alpha, \beta)$ , wobei  $\beta = \lambda_\alpha$ . Aufsummiert gilt dann mit Lemma 3.18

$$1 = \sum_{\alpha=1}^k \mathbb{P}[(\alpha, \lambda_\alpha)] = \sum_{\alpha=1}^k \frac{F_\alpha(\lambda)}{F(\lambda)}$$

und damit  $F(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^k F_\alpha(\lambda)$ . Wir zeigen nun  $|\text{SYT}(\lambda)| = F(\lambda)$  per Induktion über  $|\lambda|$ . Der Fall  $|\lambda| = 1$  ist klar, sei also  $|\lambda| > 1$ .

Jedes  $T \in \text{SYT}(\lambda)$  enthält aufgrund der Monotonieeigenschaft die Zahl  $|\lambda|$  in einer Eckzelle  $(\alpha, \lambda_\alpha)$ . Löscht man diese aus  $T$ , so erhält man ein gültiges Standard-Young-Tableau  $T' \in \text{SYT}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_k)$ . Daher sieht man mit der Induktionsvoraussetzung:

$$|\text{SYT}(\lambda)| = \sum_{\text{Eckzelle } (\alpha, \lambda_\alpha)} |\text{SYT}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_k)|$$

$$\stackrel{\text{IV.}}{=} \sum_{\alpha=1}^k F(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_{\alpha} - 1, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_k) = \sum_{\alpha=1}^k F_{\alpha}(\lambda) = F(\lambda)$$

Dass nach der zweiten Gleichung auch über Werte für  $\alpha$  summiert wird, für die  $(\alpha, \lambda_{\alpha})$  keine Eckzelle ist (wenn  $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha+1}$ ), stört nicht, da die Summanden per Definition von  $F$  dann verschwinden.  $\square$

**Korollar 3.19.** *Sei  $\lambda$  eine Partition. Wähle eine zufällige Eckzelle  $(\alpha, \beta) \in Z(\lambda)$  durch oben beschriebenes Experiment, setze  $T(\alpha, \beta) := |\lambda|$  und fahre rekursiv mit  $\lambda' := (\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_{\alpha} - 1, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_k)$  fort, bis hin zu  $\lambda' = \emptyset$ . Dann ist das so erzeugte  $T \in \text{SYT}(\lambda)$  uniform verteilt.*

*Beweis.* Per Induktion über  $|\lambda|$ . Für  $|\lambda| = 1$  ist die Aussage klar. Sei also  $|\lambda| > 1$ . Nach Lemma 3.18 beträgt die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn Eckzelle  $(\alpha, \beta) \in Z(\lambda)$  zu wählen,  $\frac{F_{\alpha}(\lambda)}{F(\lambda)}$ , und nach Induktionsvoraussetzung wird rekursiv jedes  $T' \in \text{SYT}(\lambda')$  nach der Hook-Formel mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{|\text{SYT}(\lambda')|} = \frac{1}{F_{\alpha}(\lambda)}$  erzeugt. Das Produkt  $\frac{1}{F(\lambda)}$  beider Wahrscheinlichkeiten entspricht erneut nach der Hook-Formel der uniformen Verteilung auf  $\text{SYT}(\lambda)$ .  $\square$

### 3.3.3. Erzeugung einfacher Arrangements mittels Verwerfungsmethode

Wie in Kapitel 1 ausgeführt, sind Arrangements  $(\mathcal{A}, F)$  Äquivalenzklassen von Blocksequenzen, und die Klasse von  $(\mathcal{A}, F)$  entspricht der Menge der topologischen Sortierungen von  $G(\mathcal{A}, F)$ . Nun ist aus dem vorigen Abschnitt bekannt, wie Sequenzen  $\Omega_n$  effizient über  $\text{SYT}(\Delta_{n-1})$  gezählt und zufällig erzeugt werden können. Führt dies auch zu einer Möglichkeit, deren Äquivalenzklassen  $B_n$ , einfache Arrangements der Ordnung  $n$ , zu zählen oder zu erzeugen?

Zieht man uniform  $x \in \Omega_n$ , so ist die Wahrscheinlichkeit, damit ein bestimmtes Arrangement  $(\mathcal{A}, F) \in B_n$  zu ziehen, nicht  $\frac{1}{|B_n|}$ , sondern proportional zur Größe der Äquivalenzklasse, d.h. zur Zahl der topologischen Sortierungen von  $G(\mathcal{A}, F)$ .

Die *Verwerfungsmethode* ist ein Verfahren zum Ziehen aus einer Menge  $\mathcal{X}$  mit Verteilung  $f$ , wenn zunächst nur ein Verfahren bekannt ist, welches Elemente mit Verteilung  $g$  erzeugt. Wir betrachten hier nur den diskreten Fall.

**Lemma 3.20.** *Seien  $f, g : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$  diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge  $\mathcal{X}$ ,  $g(x) \neq 0$  und  $M > 0$  mit  $f(x) \leq M \cdot g(x)$  für alle  $x \in \mathcal{X}$ . Betrachte das folgende Verfahren:*

### 3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

Ziehe  $X \in \mathcal{X}$  entsprechend der Verteilung  $g$ . Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{f(X)}{M \cdot g(X)}$  akzeptiere das Ergebnis. Andernfalls verwirf es und wiederhole das Verfahren.

Dann werden im Erwartungsfall  $M$  Iterationen bis zum Akzeptieren benötigt und das so erzeugte  $X$  hat die Verteilung  $f$ .

*Beweis.* Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit des Akzeptierens in einer einzelnen Iteration.

$$\mathbb{P}[X = x \mid \text{Verfahren akzep. in Iter. } k] = \frac{(1-p)^{k-1} \cdot g(x) \cdot \frac{f(x)}{M \cdot g(x)}}{(1-p)^{k-1} p} = \frac{f(x)}{pM}$$

Dies muss in Summe über alle  $x \in \mathcal{X}$  genau 1 ergeben. Daher muss  $p = \frac{1}{M}$  gelten, was auch direkt nachgerechnet werden kann. Damit folgt  $\mathbb{P}[X = x] = f(x)$ , und die erwartete Anzahl an Iterationen ist der Erwartungswert einer geometrischen Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $\frac{1}{M}$ .  $\square$

In unserem Fall ist die Zielverteilung die uniforme Verteilung  $f(x) = \frac{1}{|B_n|}$  auf der Menge  $B_n$ . Nimmt man das Arrangement einer uniform aus  $\Omega_n$  gezogenen Sequenz, so besitzt dies die Verteilung  $g(x) = \frac{|\text{Top}(x)|}{|\Omega_n|}$ , wobei  $\text{Top}(x)$  die Menge der topologischen Sortierungen des Graphen  $G(x)$  bezeichnet. Es ist nun also ein konstantes  $M > 0$  zu finden, für das  $|\Omega_n| \leq |\text{Top}(x)| \cdot |B_n| \cdot M$  für alle  $x$  gilt, und dann die Verwerfungsmethode mit Akzeptanzwahrscheinlichkeit

$$\frac{f(x)}{M \cdot g(x)} = \frac{|\Omega_n|}{|B_n| \cdot M \cdot |\text{Top}(x)|}$$

anzuwenden. Hier stellt sich die Frage nach der Bestimmung oder zumindest Abschätzung von  $|\text{Top}(x)|$ . Man beobachtet zunächst, dass Instanzen  $x \in \Omega_n$  existieren, für die  $|\text{Top}(x)| = 1$ , siehe Abb. 3.7a. Daher ist die Wahl der Konstante  $M := \frac{|\Omega_n|}{|B_n|}$  optimal im Sinne obiger Ungleichung und darüber hinaus äußerst günstig, da sich dann die Akzeptanzwahrscheinlichkeit wie oben angegeben als  $\frac{1}{|\text{Top}(x)|}$  ergibt und sich die schwierige genaue Bestimmung von  $|B_n|$  und  $|\Omega_n|$  erübrigt.

Genauso existieren Instanzen, für die  $|\text{Top}(x)|$  exponentiell in  $n$  wächst. Betrachte dazu eine Folge  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  von Arrangements, in der  $\mathcal{A}_1$  aus einer einzelnen Gerade besteht, und  $\mathcal{A}_{i+1}$  wie in Abb. 3.7b dargestellt aus zwei Kopien von  $\mathcal{A}_i$  hervorgeht. In dieser sind nun die Kreuzungspunkte obiger Kopie unabhängig von denen unterer Kopie, was eine exponentielle Anzahl an topologischen Sortierungen erlaubt.

In [BW91] wird die #P-Vollständigkeit des exakten Zählens linearer Erweiterungen gezeigt. Es wird aber außerdem gezeigt, dass es durch einen randomisierten Algorithmus

möglich ist, in Laufzeit  $\mathcal{O}(d^9 \log^6 d \log(\frac{1}{\varepsilon}) \varepsilon^{-2} \log(\frac{1}{\beta}))$  ein  $L$  zu erzeugen, sodass

$$\mathbb{P} \left[ \left| \frac{L}{|\text{Top}(x)|} - 1 \right| > \varepsilon \right] < \beta$$

gilt, wobei  $d$  die Dimension der Partialordnung ist und  $\varepsilon, \beta > 0$  beliebige Parameter sind, die die Güte der dadurch erhaltenen Approximation festlegen.

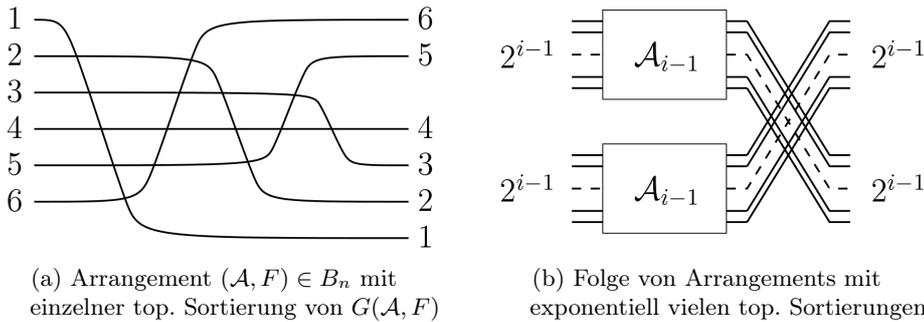


Abbildung 3.7.: Anzahl topologischer Sortierungen von  $G(\mathcal{A}, F)$

Erfreulicherweise ist eine Abschätzung oder gar exakte Bestimmung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit  $\frac{1}{|\text{Top}(x)|}$  zum Anwenden der Verwerfungsmethode gar nicht nötig, wenn man eine der folgenden beiden Akzeptanzregeln verwendet.

**Akzeptieren, falls  $x = x'$  für zufälliges  $x' \in \text{Top}(x)$ :** Hat man  $x \in \Omega_n$  gezogen, so ziehe man uniform zufällig eine weitere Sequenz  $x' \in \text{Top}(x)$  und akzeptiere genau im Falle  $x = x'$  das zu  $x$  gehörige Arrangement  $(\mathcal{A}, F)$ . In [FW97] wird beschrieben, wie mittels Kopplung aus der Vergangenheit effizient uniform zufällig eine lineare Erweiterung einer Partialordnung  $(\mathcal{X}, \prec)$  mit  $|\mathcal{X}| < \infty$  erzeugt werden kann, falls diese *zweidimensional* ist, d.h. sich als Schnitt zweier Totalordnungen von  $\mathcal{X}$  darstellen lässt.

Diese Voraussetzung ist für die durch  $G(\mathcal{A}, F)$  definierte Partialordnung in der Tat erfüllt. Fügt man der Ordnung künstlich ein globales Minimum und ein globales Maximum hinzu, so erfüllt sie die Definition eines *Verbandes*, dessen Diagramm planar ist. Nach [Bir48] Kap. II, p. 20, Bsp. 7c] (J. Zilber) ist dessen Unvergleichbarkeitsgraph dann zugleich Vergleichbarkeitsgraph einer anderen Partialordnung, was nach [DM41] Theo. 3.61] äquivalent zur Zweidimensionalität ist. Dieser Zusammenhang wird in [BFR72] beschrieben.

**Akzeptieren, falls  $x$  linksextrem:** Nach dem Ziehen von  $x \in \Omega_n$  akzeptiere man genau dann, wenn  $x$  *linksextrem* ist. Dabei bedeutet linksextrem, dass in der Kodierung von  $x$  als Vektor (siehe Abschnitt [3.3.1]),  $x$  bezüglich der lexikografischen Ordnung

### 3. Zählen und Erzeugung von Pseudogeradenarrangements

minimal unter allen  $x' \in \text{Top}(x)$  ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass aus der Äquivalenzklasse  $\text{Top}(x)$  das eindeutige linksextreme Element gewählt wurde, entspricht dann genau  $\frac{1}{|\text{Top}(x)|}$ . Prüfung auf Linksextremität ist in Linearzeit möglich, wie folgendes Lemma zeigt. Daher ist diese Akzeptanzregel deutlich effizienter als die vorige, in der Kopplung aus der Vergangenheit zur Erzeugung von  $x' \in \text{Top}(x)$  erforderlich ist.

**Lemma 3.21.** *Sequenz  $x \in \Omega_n$ ,  $x = (s_1, \dots, s_N)$  ist genau dann linksextrem, wenn kein adjazentes Paar  $(s_i, s_{i+1})$  mit  $s_i \geq s_{i+1} + 2$  existiert.*

*Beweis.* Ein adjazentes Paar  $(s_i, s_{i+1})$  heiÙe *tauschbar*, falls  $|s_i - s_{i+1}| \geq 2$ . Zwei Sequenzen  $x, x' \in \Omega_n$  mit  $x = (s_1, \dots, s_N)$  und  $x' = (s'_1, \dots, s'_N)$  sind genau dann äquivalent, wenn  $x'$  aus  $x$  durch Vertauschen tauschbarer Paare hervorgeht. Die Notwendigkeit obiger Bedingung für Linksextremität folgt sofort.

Sie ist auch hinreichend. Denn angenommen  $x' < x$  bzgl. lexikografischer Ordnung, und angenommen  $x \sim x'$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$  der minimale Index mit  $s'_k < s_k$ . Da Vertauschungen die Häufigkeiten der Einträge erhalten, gibt es mindestens einen Index  $k' > k$  mit  $s_{k'} = s'_k$ . Sei  $k'$  minimal mit dieser Eigenschaft. In einer Sequenz von Vertauschungen tauschbarer Paare, die  $x$  in  $x'$  überführt, muss  $s_{k'}$  mit den Werten  $\{s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k'-1}\}$  vertauscht werden. Sei  $k'' \in \{k, k+1, \dots, k'-1\}$  maximaler Index mit  $s_{k''} > s_{k'}$ . Die Werte  $s_{k'}$  und  $s_{k''}$  treten als tauschbares Paar in einer der Zwischenstufen auf. Daher ist  $s_{k''+1} \leq s_{k'} \leq s_{k''} - 2$  und somit enthält  $x$  das adjazente Paar  $(s_{k''}, s_{k''+1})$  wie gefordert.  $\square$

In einer Implementierung wurde die Verwerfungsmethode mittels dieser Akzeptanzregel umgesetzt. Dabei wurden auch das in Kor. 3.19 gegebene Verfahren zur Erzeugung zufälliger Standard-Young-Tableaus sowie die Edelman-Greene Bijektion wie in Absch. 3.3.1 beschrieben implementiert. Damit konnten innerhalb kurzer Laufzeit zufällige Arrangements mit bis zu 8 Pseudogeraden generiert werden, ein eher ernüchterndes Ergebnis.

Die Korrektheit dieser Implementierung wurde unter anderem überprüft, indem die a posteriori bestimmte Zahl  $M'$  an erforderlichen Iterationen bis zum Akzeptieren mit dem theoretischen, für kleine  $n$  bestimmbaren Erwartungswert  $M = \frac{|\Omega_n|}{|B_n|}$  statistisch verglichen wurde<sup>1</sup>. Umgekehrt könnte für größere  $n$  ein Konfidenzintervall für  $M$  bestimmt und dann herangezogen werden, um unter Kenntnis von  $|\Omega_n|$  (Kor. 3.16) den Wert  $|B_n|$  probabilistisch zu approximieren.

Das Verfahren kann durch „Sequenzialisierung“ beschleunigt werden. Nach jeder Iteration der Erzeugung des zufälligen Standard-Young-Tableaus (Kor. 3.19) wird direkt von

<sup>1</sup>Mit Daten von OEIS:  $|\Omega_n|$  entspricht Folge [A005118](#),  $|B_n|$  entspricht Folge [A006247](#)

hinten ein weiterer Eintrag der resultierenden Sequenz  $x = (s_1, \dots, s_N) \in \Omega_n$  aufgedeckt und durch Vergleich der beiden zuletzt generierten Einträge geprüft, ob  $x$  noch linksextrem werden kann (Lemma 3.21). Im negativen Fall wird sofort abgebrochen, sodass die teure Erzeugung weiterer Tableau-Einträge eingespart werden kann. Die über den Schützenberger-Operator  $\Phi$  definierte Abbildung EG lässt sich nicht sequenziell verwenden. Für die über den Einfügealgorithmus definierte Abbildung  $EG^{-1}$  lässt sich jedoch eine direkte Umkehrung konstruieren, mit der dies funktioniert. Diese deutlich bemerkbare Beschleunigung des Verfahrens hat in einem Versuch dennoch nicht zur schnellen Erzeugung von Arrangements der Ordnung  $n > 8$  geführt.

Weitere Forschung könnte darin bestehen, für die Verwerfungsmethode andere effiziente Akzeptanzregeln in Verbindung mit Algorithmen zu suchen, die basierend auf diesen während der Zufallserzeugung des Tableaus noch früher zwischen Akzeptieren und Verwerfen entscheiden.

In dem Verfahren in Kor. 3.19 wird die jeweils nächste Eckzelle  $(\alpha, \lambda_\alpha)$  mit einer Wahrscheinlichkeit ausgewählt, die dem Verhältnis  $\frac{F_\alpha(\lambda)}{F(\lambda)}$  entspricht. Könnte man ebendieses Verhältnis für eine Funktion  $F'$  bestimmen, die Standard-Young-Tableaus zählt, deren zugehörige Sequenzen unter der Edelman-Greene-Bijektion linksextrem sind, so würde dies die ineffiziente Verwerfungsmethode überflüssig machen. Ein weiterer interessanter Ansatz wäre daher, dieses Verhältnis mittels dynamischer Programmierung zu bestimmen.

Für beide Ansätze könnte die anschaulichere geometrische Fassung der Edelman-Greene-Bijektion in [Fel01] helfen. Diese ahmt „Viennots Geometrische Konstruktion“ der *Robinson-Schensted-Bijektion* aus [Vie77] nach.



## 4. Fazit und offene Fragen

Ein effizientes Verfahren zum exakten Zählen oder zum zufälligen Erzeugen mit uniformer Verteilung würde einen Durchbruch in der Erforschung von Pseudogeradenarrangements darstellen. Beide Probleme sind eng verwandt. Für letzteres Problem, sowie auch für das zufällige Erzeugen anderer kombinatorischer Strukturen, stellen Markov-Ketten, wie in Kapitel 2 ausgeführt, ein Hauptwerkzeug dar. Für die Effizienz ist die Frage entscheidend, ob diese Markov-Ketten schnell mischend sind.

Zufällige Dreiecksflips definieren eine Markov-Kette auf Arrangements. Diese kann auf Flips von Dreiecken mit Beteiligung einer einzelnen Klasse eingeschränkt werden. Für Arrangements bestehend aus drei Klassen fallen der eingeschränkte und der uneingeschränkte Fall zusammen, und die Markov-Kette ist nach den Resultaten aus [LRS95] und [Wil04] schnell mischend. Dabei ermöglicht eine geeignete Partialordnung auf der Menge der Arrangements, die Mischzeit über eine monotone Kopplung abzuschätzen. Überraschenderweise ist für mehr als drei Klassen im eingeschränkten Fall die Markov-Kette wie in Theorem 2.28 gezeigt nicht schnell mischend. Für den uneingeschränkten Fall wird schnell mischend zwar in [Des01] nahegelegt, doch steht ein formaler Beweis aus.

**Frage 1.** *Ist die Markov-Kette, welche in jedem Schritt drei Pseudogeraden wählt und, falls diese ein Dreieck bilden, dieses Dreieck flippt, schnell mischend?*

**Frage 2.** *Gibt es auf der Menge der Arrangements eine Partialordnung, für die durch Dreiecksflips eine monotone Großkopplung definiert wird?*

Im Falle einer positiven Antwort auf Frage 2 ließe sich Kopplung aus der Vergangenheit einerseits zur Erzeugung von zufälligen Arrangements selbst, als auch für die empirische Untersuchung der Mischzeit (Frage 1) einsetzen.

Als Alternative zu Dreiecksflips wurde gezeigt, wie in ein Arrangement aus  $n$  Pseudogeraden eine neue Klasse mit  $k$  Pseudogeraden zufällig eingefügt werden kann. Die dafür erforderliche Laufzeit ist zwar polynomiell in  $n$ , jedoch exponentiell in  $k$ .

**Frage 3.** *Kann in einer Laufzeit, die polynomiell in  $n + k$  ist, in ein Arrangement*

#### 4. Fazit und offene Fragen

aus  $n$  Pseudogeraden eine Klasse von  $k$  sich nicht schneidenden Pseudogeraden mit uniformer Verteilung unter allen Möglichkeiten zufällig eingefügt werden?

Im Spezialfall gewöhnlicher Pseudogeradenarrangements entspricht das Einfügen einer Klasse dem zufälligen Erzeugen einer einzelnen Pseudogerade, was die folgende Frage motiviert.

**Frage 4.** *Ist die Markov-Kette, welche in jedem Schritt zufällig eine Pseudogerade auswählt, löscht, und mit uniformer Verteilung unter allen Möglichkeiten zufällig an selber Stelle wieder einfügt, schnell mischend?*

Sequenzen (einfache zulässige Permutationssequenzen, Sortiernetzwerke) stehen mit Standard-Young-Tableaus über die Edelman-Greene-Bijektion in Verbindung. Es wurden verschiedene Ansätze diskutiert, um mittels der Verwerfungsmethode aus zufälligen Tableaus zufällige Arrangements zu erhalten. Zur Beschleunigung ist eine Formulierung der Edelman-Greene-Bijektion hilfreich, mit der bereits während des Erzeugens des Tableaus die zugehörige Sequenz Eintrag für Eintrag aufbaut werden kann. Es können auf diese Weise in kurzer Laufzeit Arrangements mit bis zu 8 Geraden erzeugt werden, was jedoch auch mit iterativen Verfahren möglich wäre. Kann das Verfahren noch weiter beschleunigt werden? Arrangements stehen in Bijektion mit linksextremen Sequenzen, daher sind die folgenden Fragen spannend:

**Frage 5.** *Lassen sich Standard-Young-Tableaus, welche unter der Edelman-Greene-Bijektion linksextreme Sequenzen (d.h. Sequenzen ohne Paare  $s_i \geq s_{i+1} + 2$ ) liefern, besser charakterisieren?*

*Lassen sich diese mittels dynamischer Programmierung (z.B. für jede Partition) effizienter zählen?*

Insgesamt sind die Probleme des Zählens und der Erzeugung von Pseudogeradenarrangements weiterhin offen, und auch die Schranken an deren Anzahl sind verbesserungswürdig. Doch wurden in dieser Arbeit neue vielversprechende Ansätze aufgezeigt, die die Hoffnung bergen, im Rahmen weiterer Untersuchungen diese Probleme, die in der mathematischen Forschung durchaus Beachtung gefunden haben, zu lösen.

## Literaturverzeichnis

- [AHRV07] Omer Angel; Alexander E. Holroyd; Dan Romik; Bálint Virág, *Random sorting networks*, Adv. Math. **215** (2007), Nr. 2, 839 – 868.
- [Aig01] Martin Aigner, *Lattice paths and determinants*, Computational discrete mathematics. Advanced lectures. LNCS 2122 (2001), 1 – 12.
- [Ald83] David Aldous, *Random walks on finite groups and rapidly mixing Markov chains*, Semin. de probabilites XVII, Lect. Notes Math. 986, 1983, S. 243 – 297.
- [BFR72] Kirby A. Baker; Peter C. Fishburn; Fred S. Roberts, *Partial orders of dimension 2*, Networks **2** (1972), 11 – 28.
- [Bir48] Garrett Birkhoff, *Lattice theory. Rev. ed.*, AMS, 1948.
- [BW91] Graham Brightwell; Peter Winkler, *Counting linear extensions*, Order **8** (1991), Nr. 3, 225 – 242.
- [Coc00] Eric Cockayne, *Random tiling models for quasicrystals*, From Quasicrystals to More Complex Systems, Centre de Physique des Houches 13, 2000, S. 115 – 143.
- [Des01] Nicolas Destainville, *Mixing times of plane rhombus tilings*, DMTCS Proc. AA, DM-CCG, 2001, S. 1 – 22.
- [DM41] Ben Dushnik; Edwin W. Miller, *Partially ordered sets*, Am. J. Math. **63** (1941), 600 – 610.
- [DM20] Adrian Dumitrescu; Ritankar Mandal, *New lower bounds for the number of pseudoline arrangements*, J. Comput. Geom. **11** (2020), Nr. 1, 60 – 92.
- [Dur19] Rick Durrett, *Probability. Theory and examples. 5th ed.*, Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics 49, Cambridge Uni. Press, 2019.

- [EG87] Paul Edelman; Curtis Greene, *Balanced tableaux*, Adv. Math. **63** (1987), 42 – 99.
- [Fel01] Stefan Felsner, *The skeleton of a reduced word and a correspondence of Edelman and Greene*, Electron. J. Comb. **8** (2001), Nr. 1, Research paper R10.
- [FRT54] J. S. Frame; Gilbert de B. Robinson; R. M. Thrall, *The hook graphs of the symmetric group*, Can. J. Math. **6** (1954), 316 – 324.
- [FV01] Stefan Felsner; Pavel Valtr, *Coding and counting arrangements of pseudolines*, Discrete Comput. Geom. **46** (2001), Nr. 3, 405 – 416.
- [FW97] Stefan Felsner; Lorenz Wernisch, *Markov chains for linear extensions: the two-dimensional case*, Proceedings of the Eighth Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1997, S. 239 – 247.
- [FW00] Stefan Felsner; Helmut Weil, *A theorem on higher Bruhat orders*, Discrete Comput. Geom. **23** (2000), Nr. 1, 121 – 127.
- [FW01] Stefan Felsner; Helmut Weil, *Sweeps, arrangements and signotopes*, Discrete Appl. Math. **109** (2001), Nr. 1 – 2, 67 – 94.
- [GNW79] Curtis Greene; Albert Nijenhuis; Herbert S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of young tableaux of a given shape*, Adv. Math. **31** (1979), 104 – 109.
- [Gor21] Vadim Gorin, *Lectures on random lozenge tilings*, Cambridge Uni. Press, 2021, Preprint: [http://math.mit.edu/~vadicgor/Random\\_tilings.pdf](http://math.mit.edu/~vadicgor/Random_tilings.pdf)
- [GP80] Jacob E. Goodman; Richard Pollack, *Proof of Grünbaum’s conjecture on the stretchability of certain arrangements of pseudolines*, J. Comb. Theory **A 29** (1980), 385 – 390.
- [Grü72] Branko Grünbaum, *Arrangements and spreads*, Conference Board of the Mathematical Sciences. Regional Conference Series in Mathematics, Bd. 10, AMS, 1972.
- [Gur16] Venkatesan Guruswami, *Rapidly mixing markov chains: A comparison of techniques (a survey)*, arXiv:1603.01512 [cs.DS] (2016).
- [GV89] Ira Martin Gessel; Xavier Gérard Viennot, *Determinants, paths, and plane partitions*, <http://people.brandeis.edu/~gessel/homepage/papers/pp.pdf> 1989, abgerufen am 07.08.2021.

- [GY80] Leo J. Guibas; F. Frances Yao, *On translating a set of rectangles*, Proc. of the 12th annual ACM Symp. on Th. of Comput. (1980), 154 – 160.
- [Knu92] Donald E. Knuth, *Axioms and hulls*, LNCS 606, Springer, 1992.
- [Kra99] Christian Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, arXiv:math/9902004 [math.CO] (1999).
- [Lee] James R. Lee, *Unpublished lecture notes CSE 525, Lec. 18 (Winter 2015)*, <https://homes.cs.washington.edu/~jrl/teaching/cse525wi15/lectures/lecture18.pdf>, abgerufen am 27.09.2021.
- [Lev26] Friedrich Levi, *Die Teilung der projectiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade*, Sächs. Akad. Wiss. Math.-Phys. Klasse **78** (1926), 256 – 267.
- [LPW09] David A. Levin; Yuval Peres; Elizabeth L. Wilmer, *Markov chains and mixing times*, AMS, 2009.
- [LRS95] Michael Luby; Dana Randall; Alistair Sinclair, *Markov chain algorithms for planar lattice structures*, Proc. IEEE 36th Annual Foundations of Comput. Sci. **1** (1995), 150 – 161.
- [LRS01] Michael Luby; Dana Randall; Alistair Sinclair, *Markov chain algorithms for planar lattice structures*, SIAM J. Comput. **31** (2001), Nr. 1, 167 – 192.
- [Mac16] Major Percy A. MacMahon, *Combinatory analysis*, Bd. 2, Cambridge Uni. Press, 1916.
- [PW96] James Gary Propp; David Bruce Wilson, *Exact sampling with coupled markov chains and application to statistical mechanics*, Random Structures & Algorithms **9** (1996), Nr. 1–2, 223 – 252.
- [Rin56] Gerhard Ringel, *Teilung der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden*, Mathematische Zeitschrift **64** (1956), 79 – 102.
- [RT00] Dana Randall; Prasad Tetali, *Analyzing Glauber dynamics by comparison of Markov chains*, J. Math. Phys. **41** (2000), Nr. 3, 1598 – 1615.
- [She74] Geoffrey C. Shephard, *Combinatorial properties of associated zonotopes*, Can. J. Math. **26** (1974), 302 – 321.
- [Sho91] Peter W. Shor, *Stretchability of pseudolines is NP-hard*, DIMACS Series in Disc. Math. and Theor. Comput. Sci. **4** (1991), 531 – 554.

*Literaturverzeichnis*

- [SJ88] Alistair Sinclair; Mark Jerrum, *Approximate counting, uniform generation and rapidly mixing markov chains*, Information and Computation **82** (1988), Nr. 1, 93 – 133.
- [Sta84] Richard P. Stanley, *On the number of reduced decompositions of elements of coxeter groups*, Eur. J. Comp **5** (1984), 359 – 372.
- [Vie77] X. Gérard Viennot, *Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted*, Lect. Notes in Math. **597** (1977), 29 – 58.
- [Wil04] David Bruce Wilson, *Mixing times of lozenge tiling and card shuffling markov chains*, Ann. Appl. Probab. **14** (2004), Nr. 1, 274 – 325.