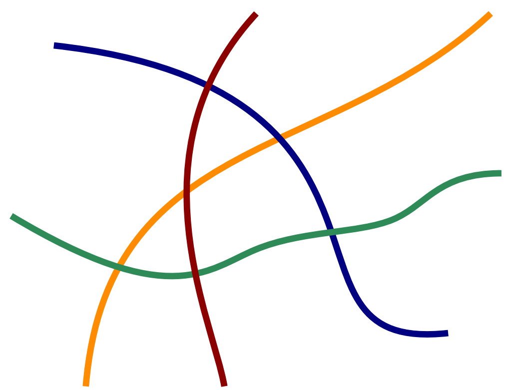
17. Dies Mathematicus 2022

Erzeugung zufälliger Pseudogeradenarrangements



Sandro Roch

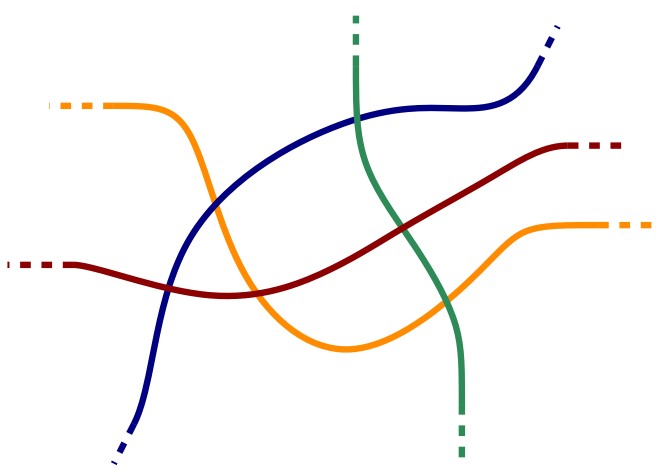
Pseudogeradenarrangements

Def: *Pseudogeradenarrangement*:

- Stetige Kurven $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{t \to \infty} \|f_i(t)\| = \lim_{t \to -\infty} \|f_i(t)\| = \infty$$

- Je zwei kreuzen sich in genau einem Punkt



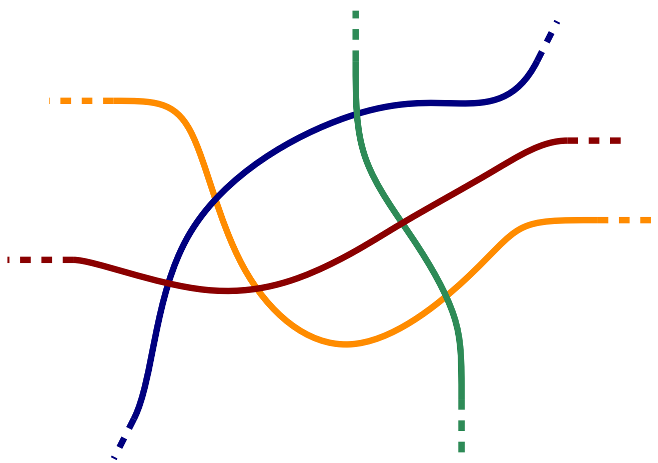
Pseudogeradenarrangements

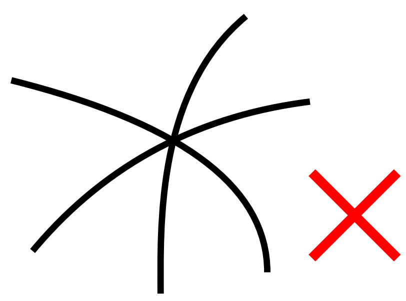
Def: *Pseudogeradenarrangement*:

- Stetige Kurven $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{t \to \infty} \|f_i(t)\| = \lim_{t \to -\infty} \|f_i(t)\| = \infty$$

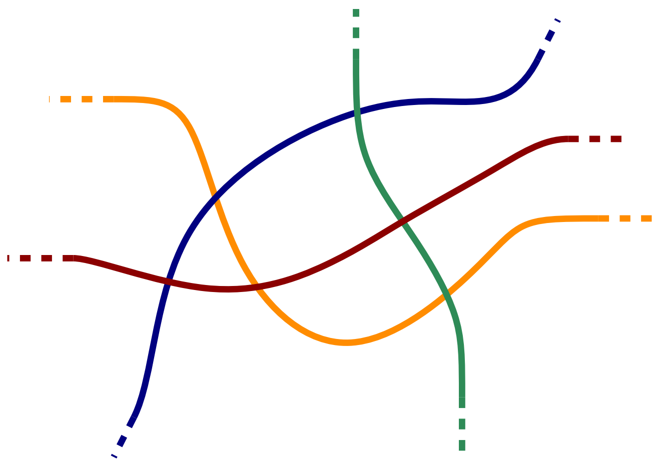
- Je zwei kreuzen sich in genau einem Punkt
- Keine 3 Pseudogeraden, die sich in einem Punkt kreuzen



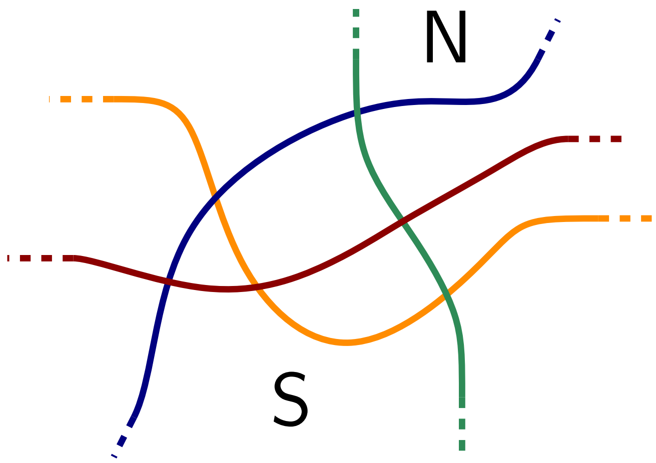


Drahtdiagramme

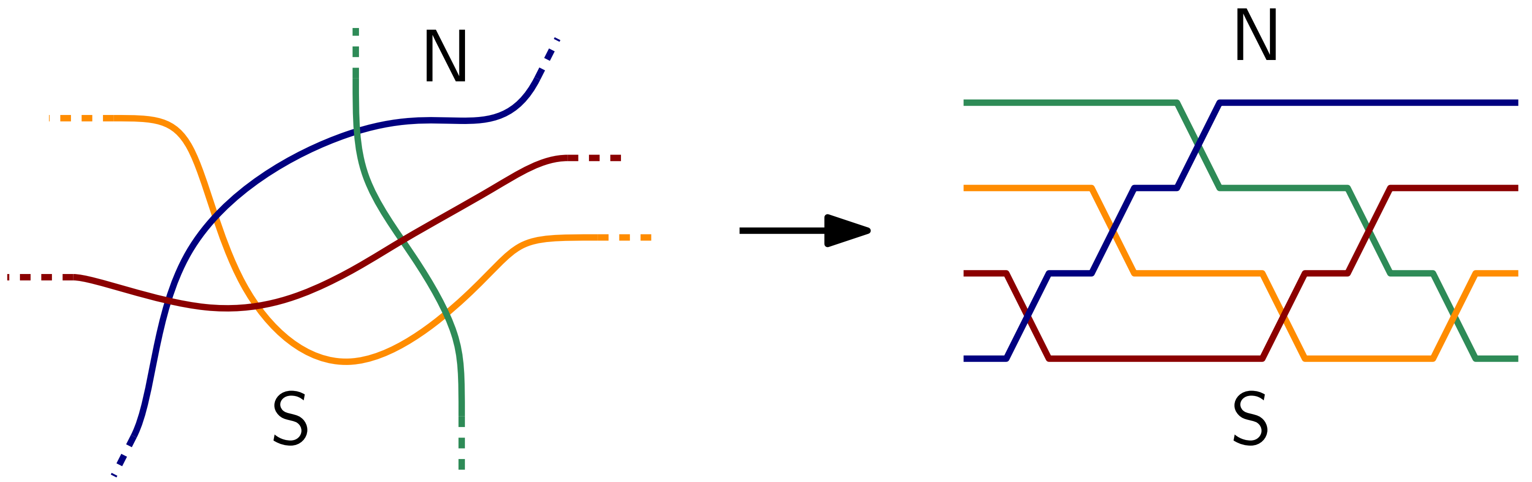
Drahtdiagramme



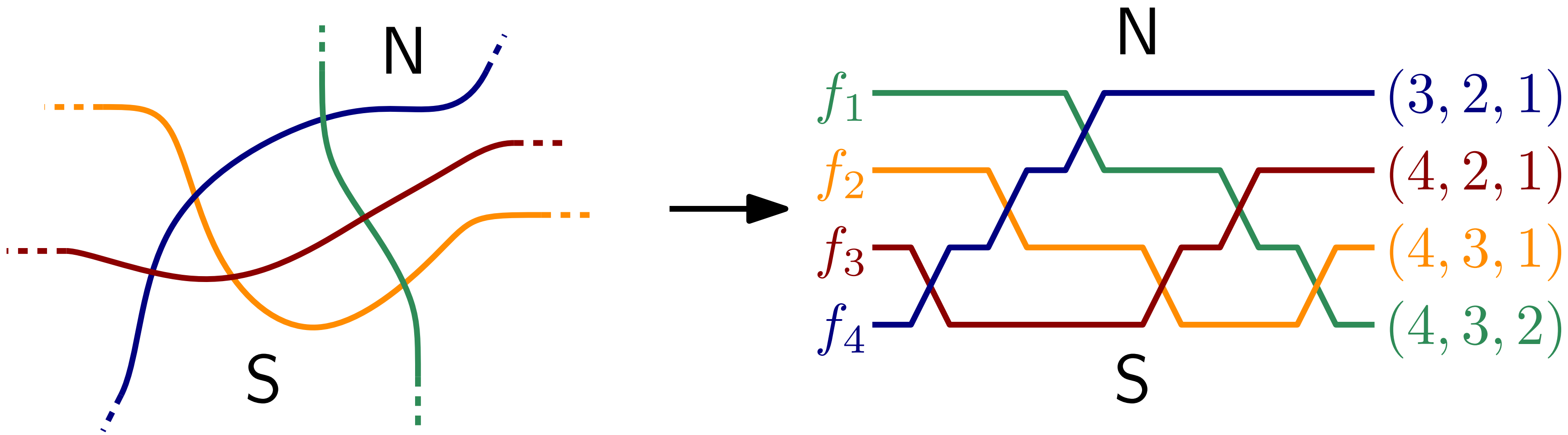
Drahtdiagramme



Drahtdiagramme

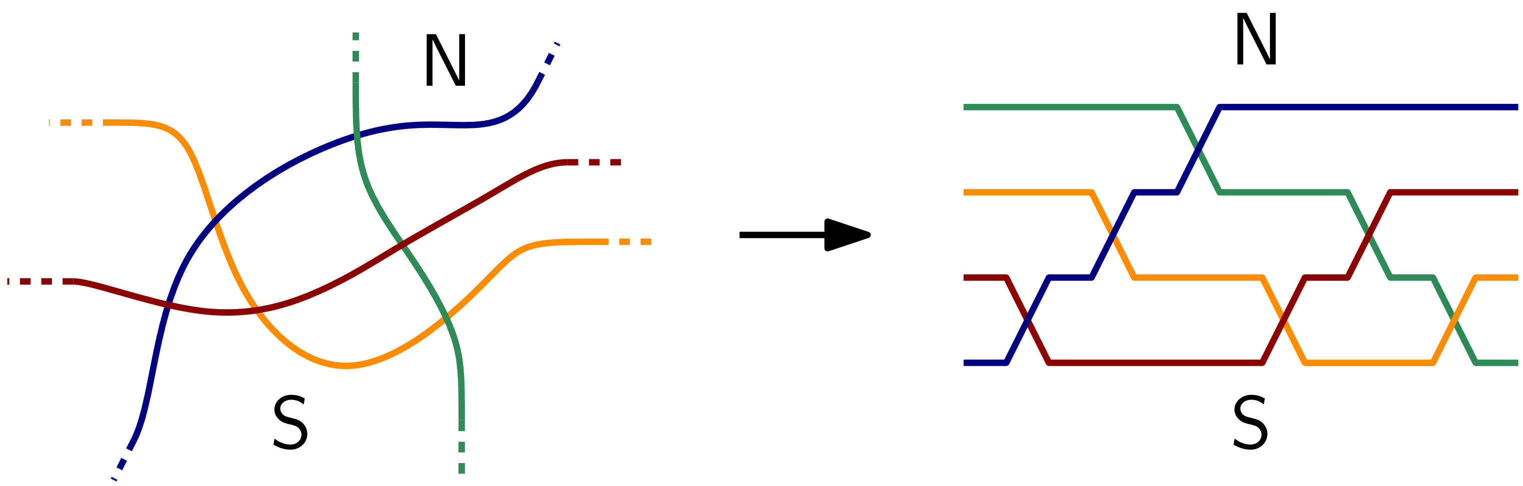


Drahtdiagramme

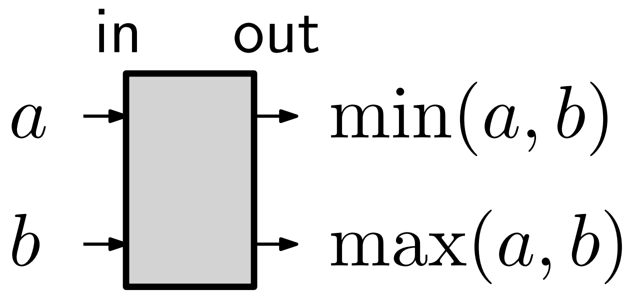


Kodierung durch Permutationen:
Permutation $\pi_i \in S_{n-1}$ kodiert Schnittreihenfolge von f_i.

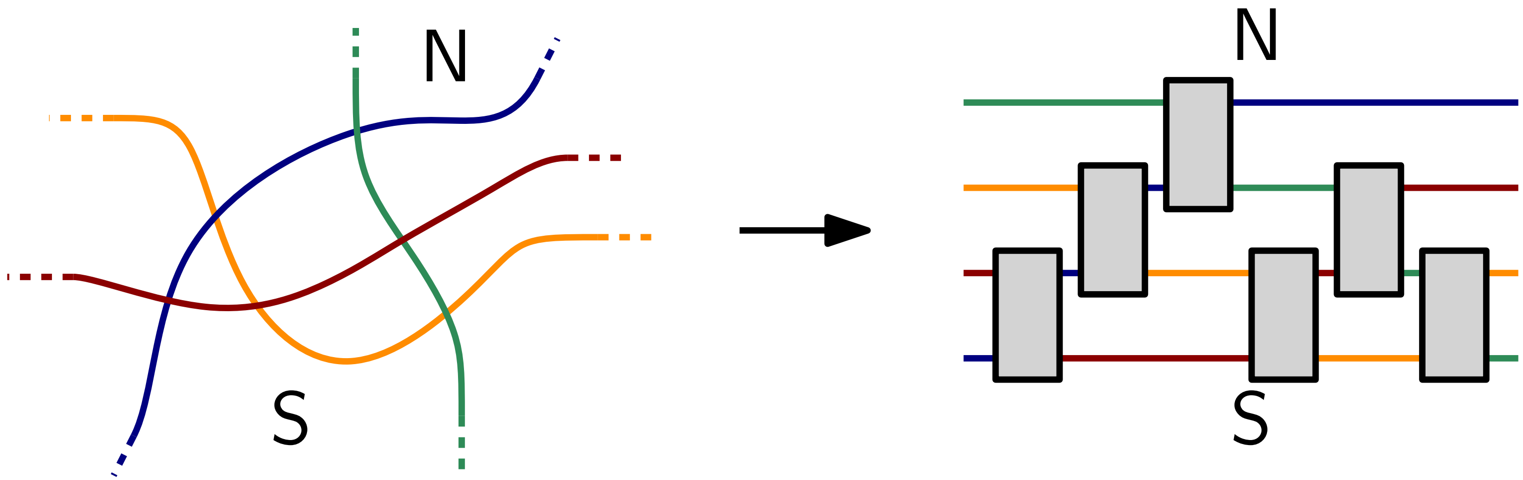
Drahtdiagramme



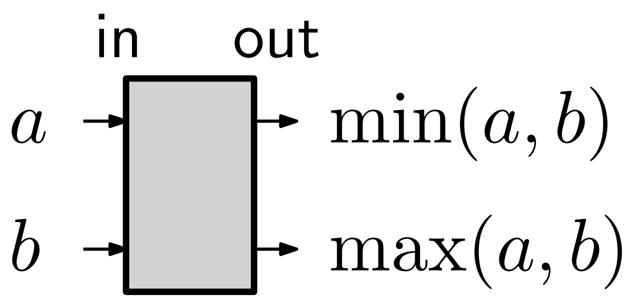
Drahtdiagramme als Sortiernetze:



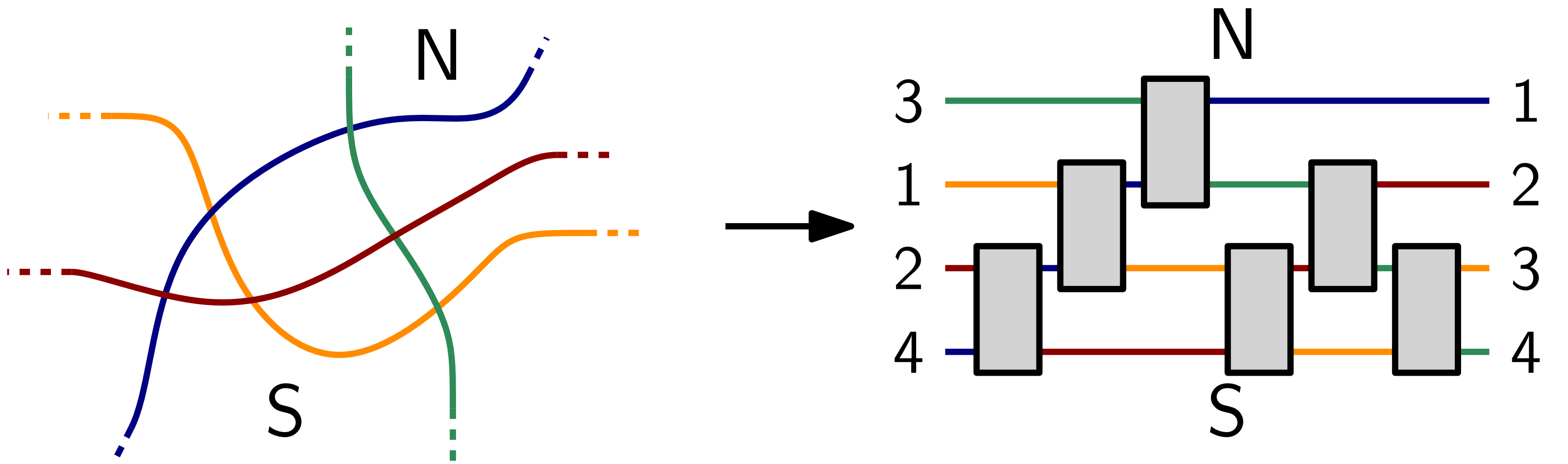
Drahtdiagramme



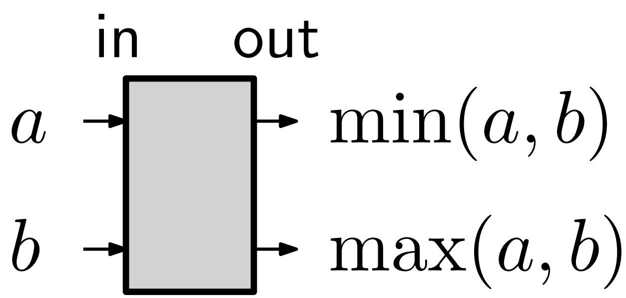
Drahtdiagramme als Sortiernetze:



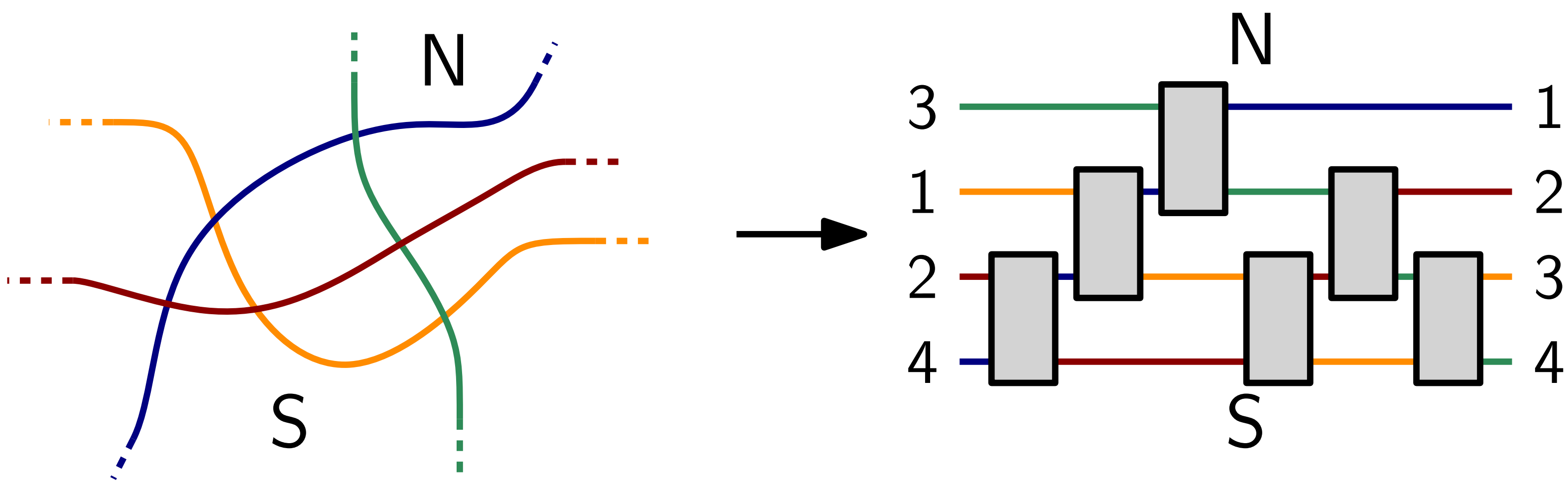
Drahtdiagramme



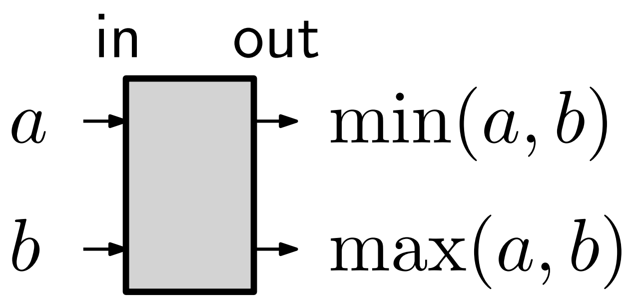
Drahtdiagramme als Sortiernetze:



Drahtdiagramme

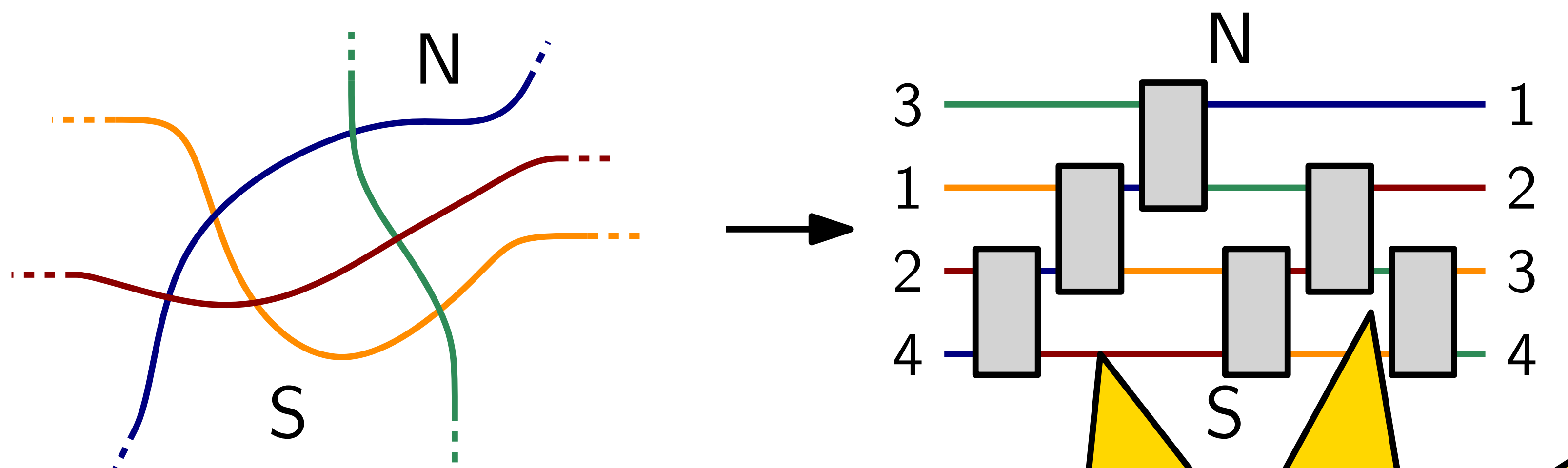


Drahtdiagramme als Sortiernetze:

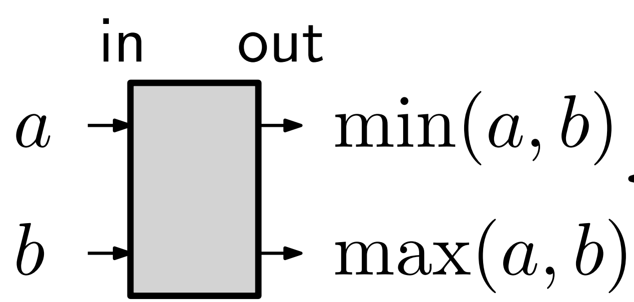


Sortiernetze kodieren minimale Sortieralgorithmen, die auf *Vergleich & Tausch* benachbarter Elemente basieren.

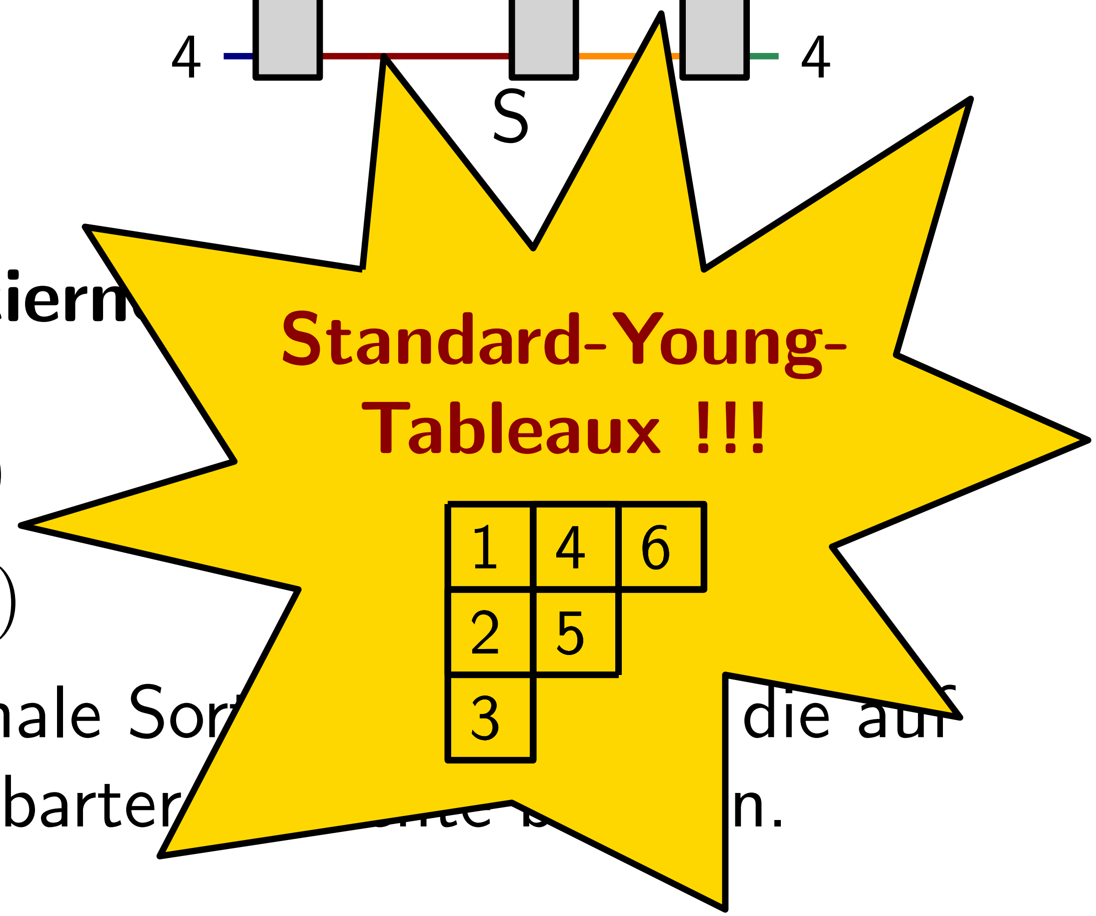
Drahtdiagramme



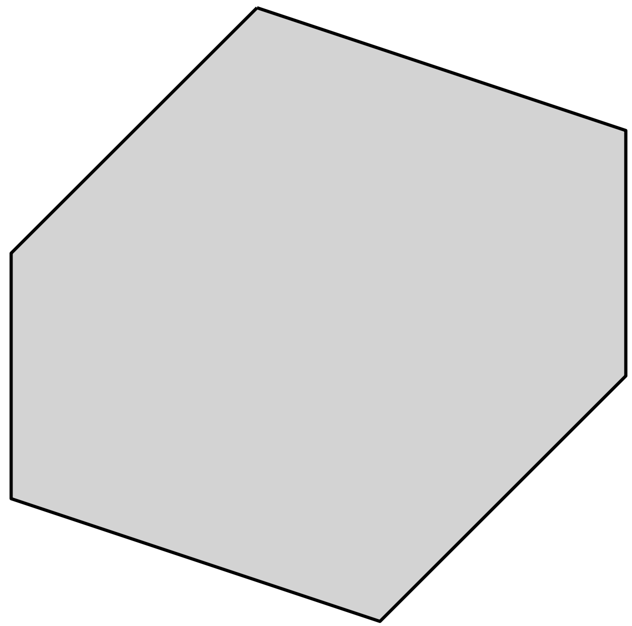
Drahtdiagramme als Sortiern



Sortiernetze kodieren minimale Sor die auf
Vergleich & Tausch benachbarter n.

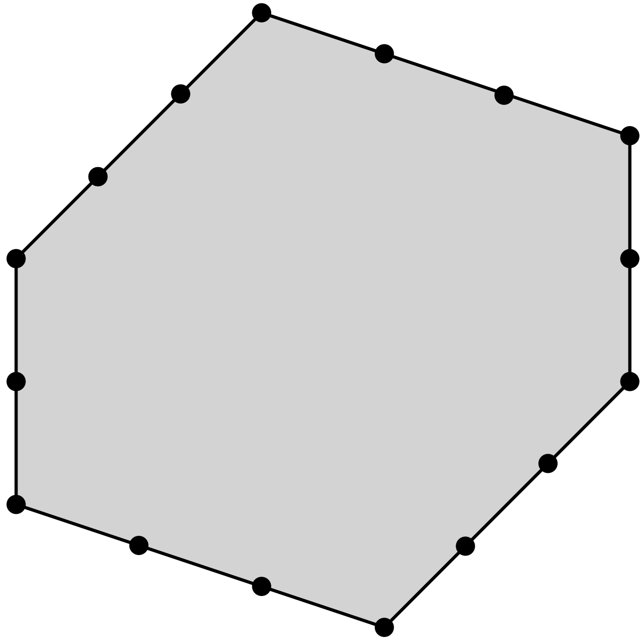


Rhombenpflasterungen



Rhombenpflasterungen

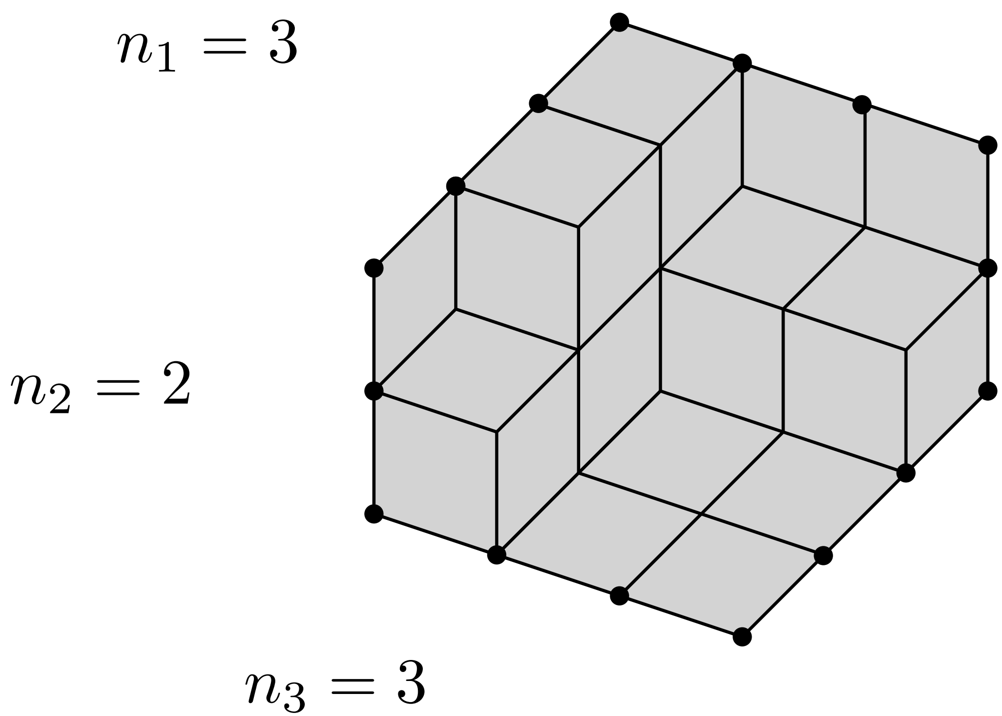
$n_1 = 3$



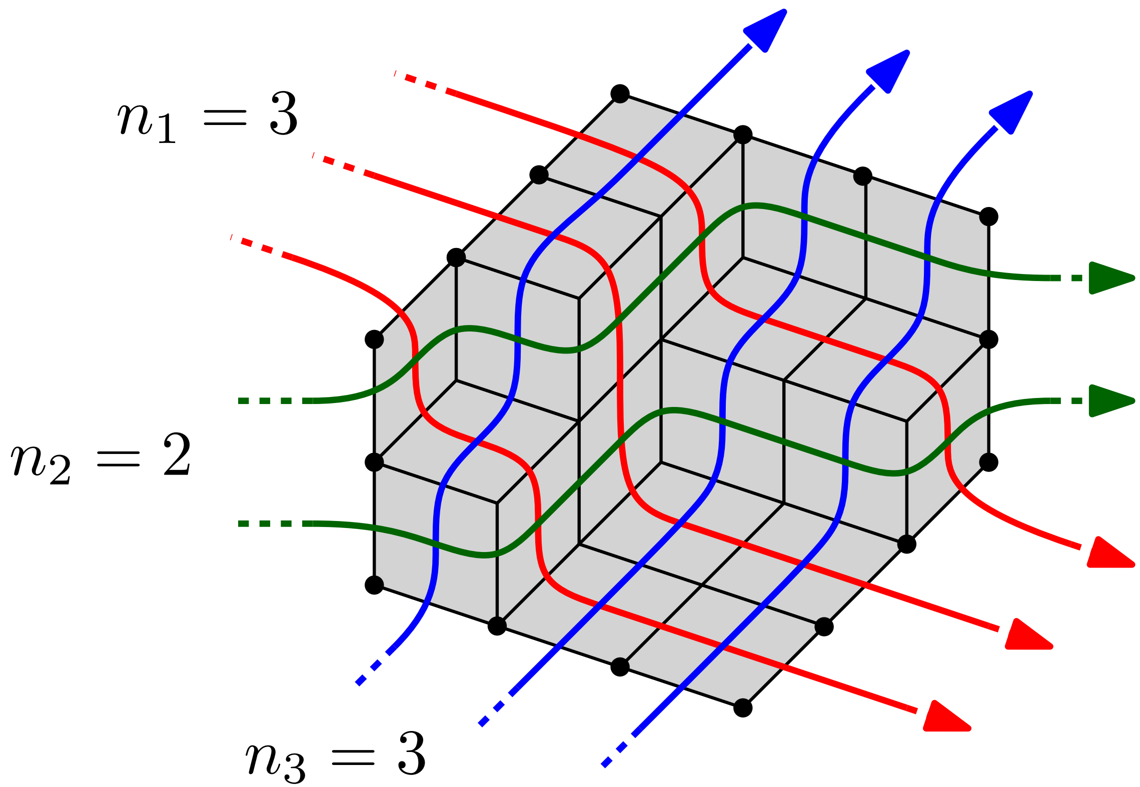
$n_2 = 2$

$n_3 = 3$

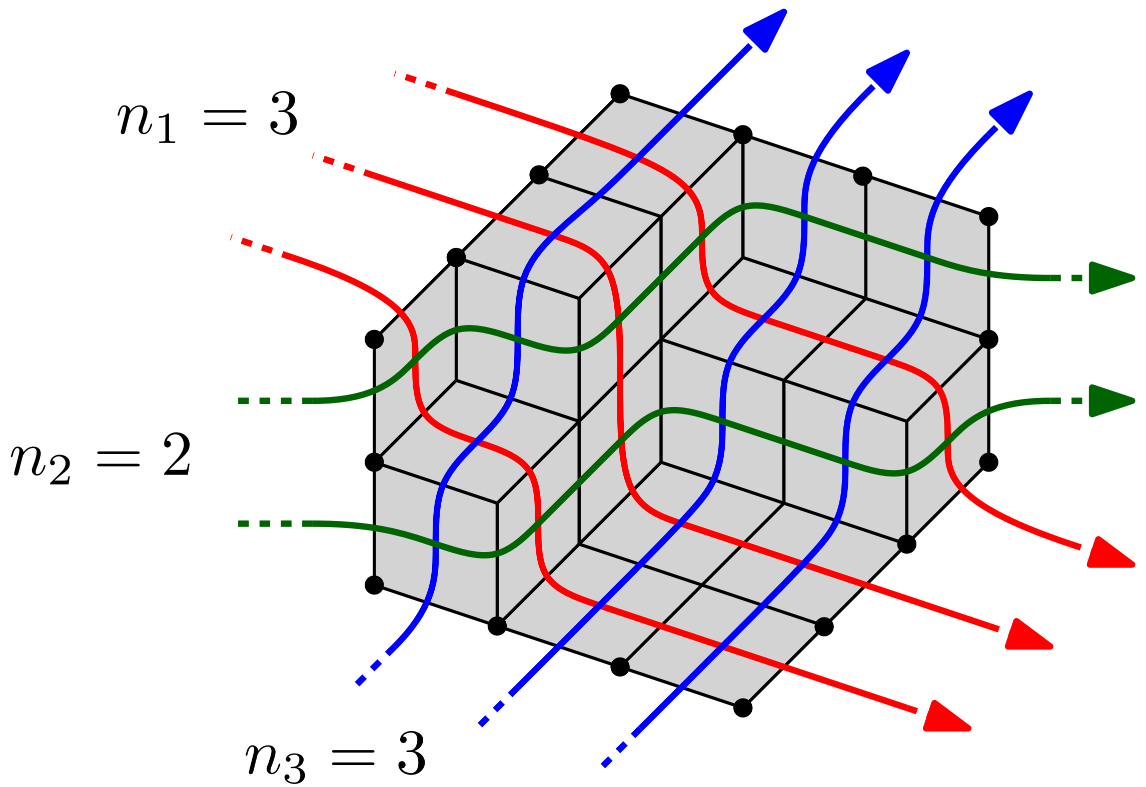
Rhombenpflasterungen



Rhombenpflasterungen



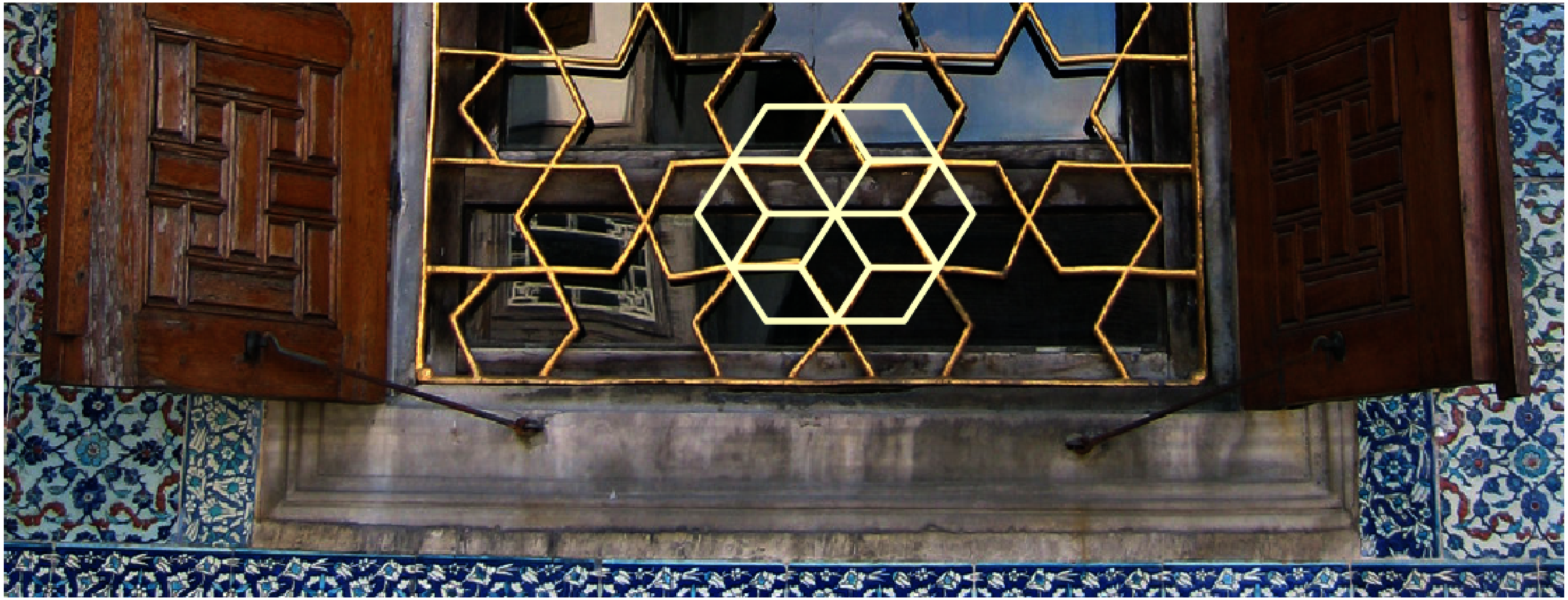
Rhombenpflasterungen



Liefert *Verallgemeinertes Pseudogeradenarrangement*:

- *Parallelklassen* von $n_1, ..., n_r$ Pseudogeraden.
- (Nur) Pseudogeraden verschiedener Parallelklassen kreuzen sich.

Rhombenpflasterungen



Topkapı-Palast, Instanbul, Türkei

Pseudogeradenarrangements

Drahtdiagramme

Signotope

plane partitions

Permutationen

Rhomben-
pflasterungen

Sortiernetze

Höhere Bruhat-
Ordnung

Standard-Young-Tableaus

Systeme monotoner, sich
nicht schneidender Pfade

Orientierte Matroide von Rang 3

Pseudogeradenarrangements

Drahtdiagramme

Signotope

plane partitions

Permutationen

Problem:
Wie erzeugt man zufällige Pseudogeradenarrangements mit uniformer Verteilung effizient?

Rhombenpflasterungen

Sortiernetze

Höhere Bruhat-Ordnung

Standard-Young-Tableaus

Systeme monotoner, sich nicht schneidender Pfade

Orientierte Matroide von Rang 3

Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten

  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

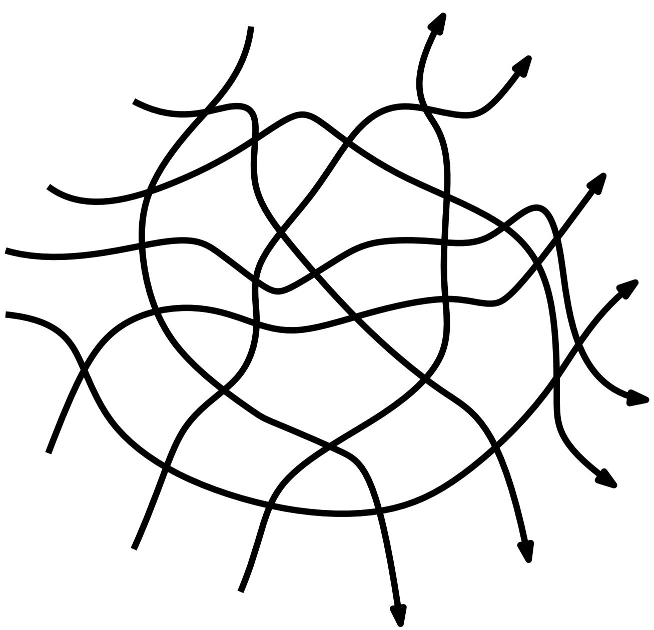
Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten

  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov chain I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade:



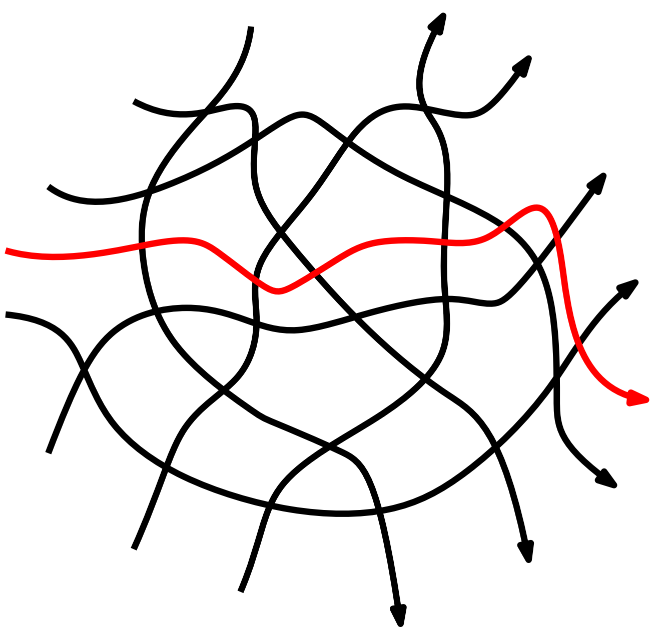
Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten

  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov chain I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade:

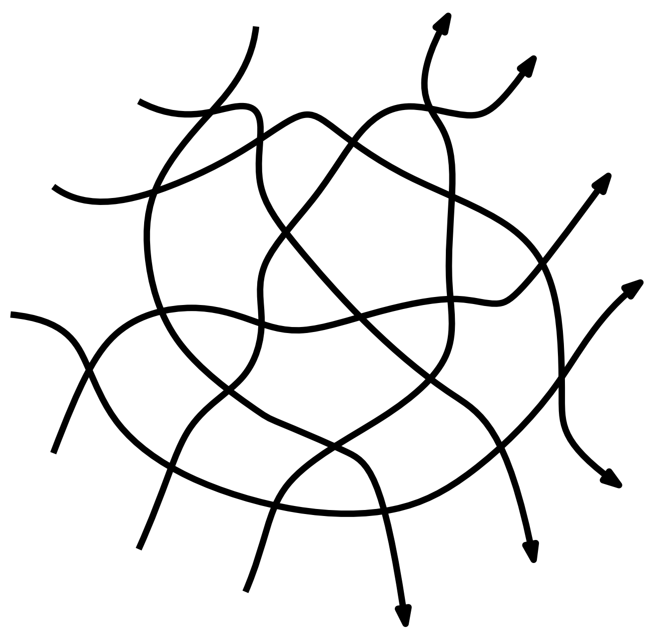


Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov chain I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade:



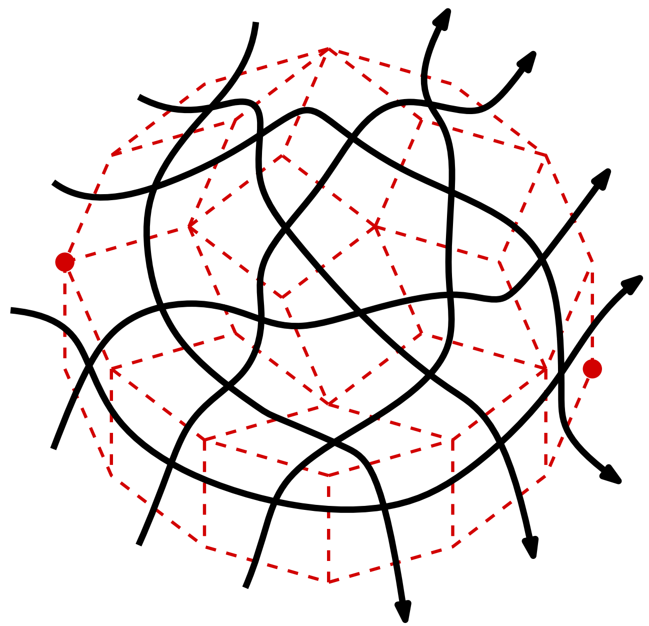
Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten

  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov chain I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade:

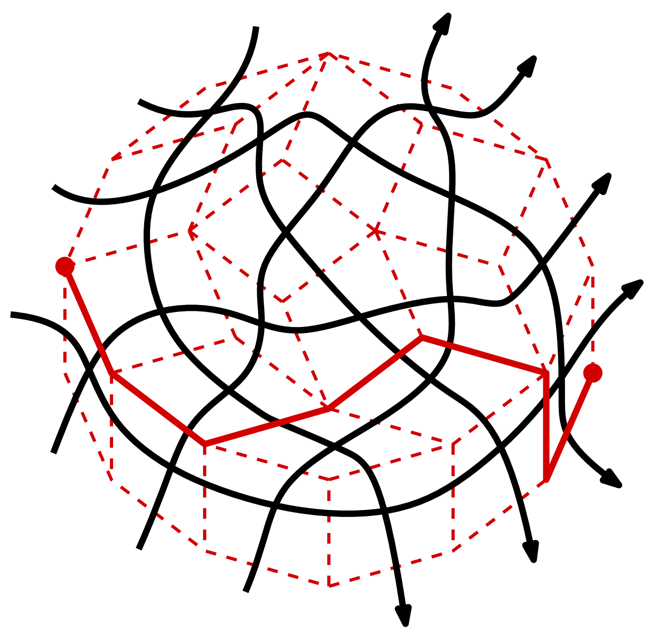


Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov chain I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade:

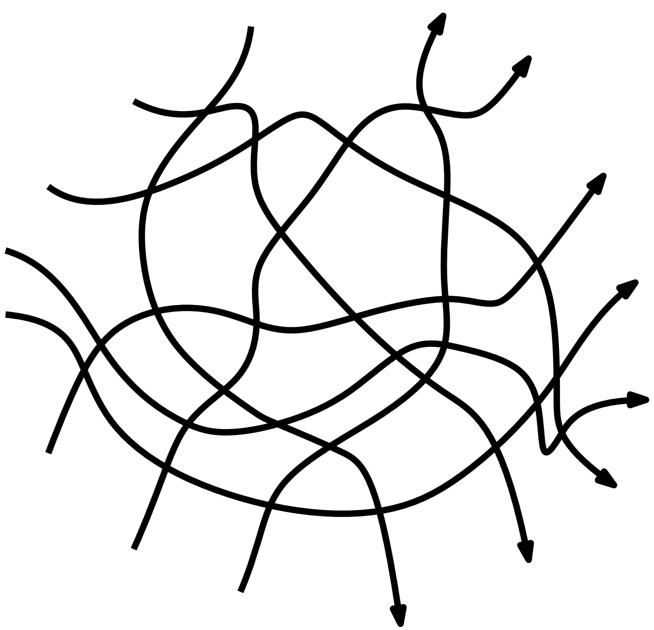


Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov chain I: Zufälliges Neueinfügen von Pseudogerade:

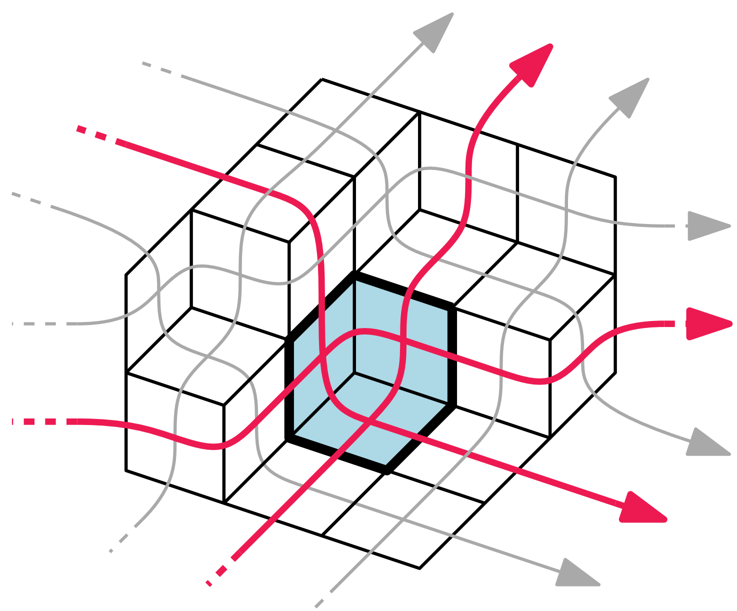


Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten
  $\implies$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov-Kette II: Flip zufälliger Dreiecke:



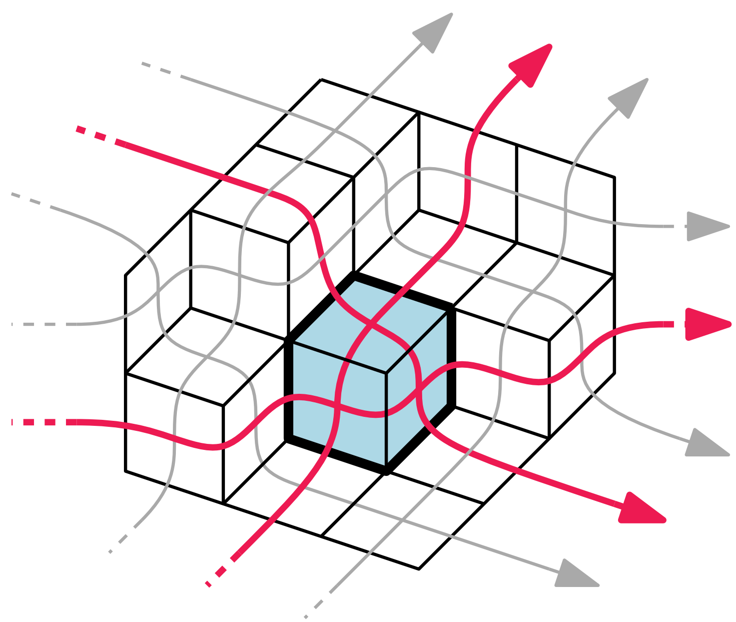
Zufallserzeugung mittels Markov-Ketten

Idee:

- Zufällige Übergänge zwischen Arrangements fester Größe
- Symmetrische Übergangswahrscheinlichkeiten

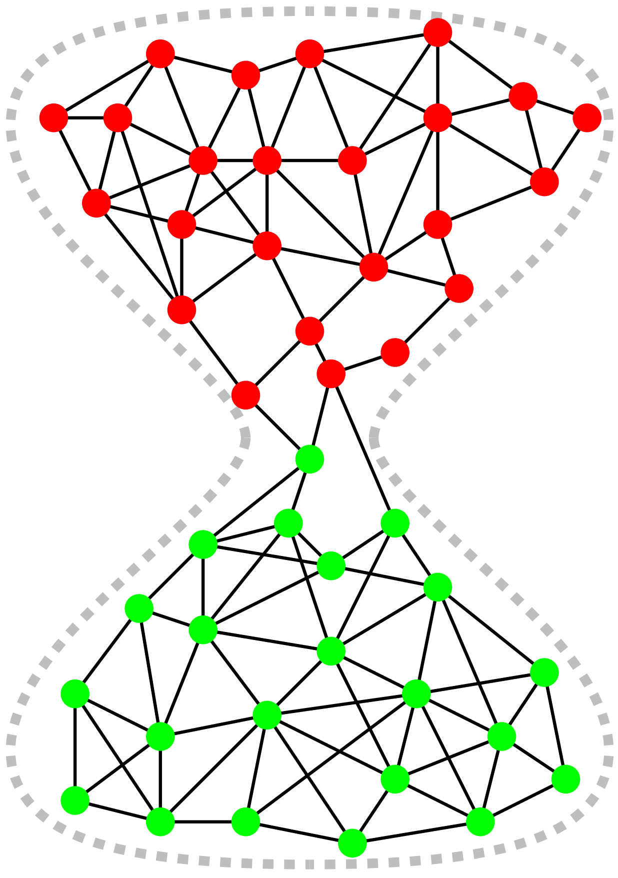
  $\Longrightarrow$ Markov-Kette nähert sich der uniformen Verteilung
- *Schnell-mischend*, falls Konvergenz polynomiell schnell

Markov-Kette II: Flip zufälliger Dreiecke:

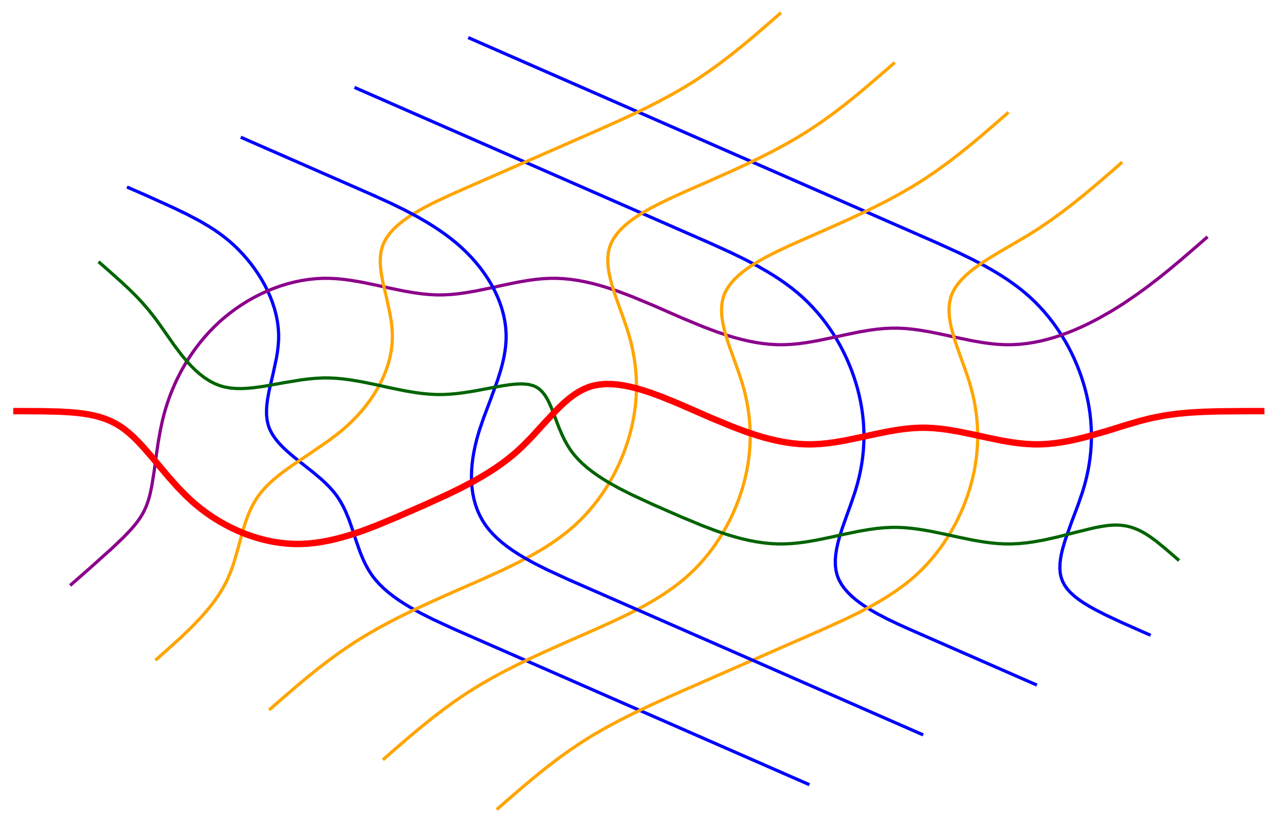


Flaschenhals

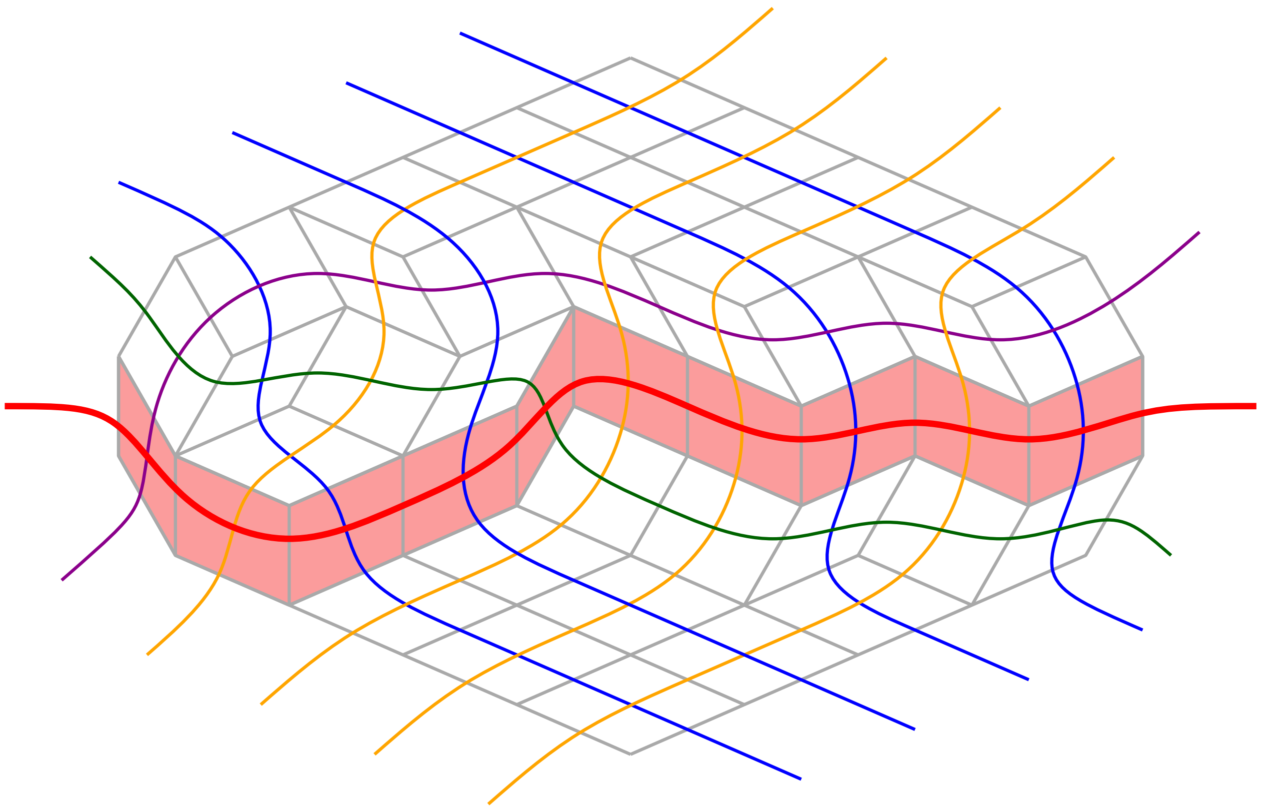
Markov-Kette mit „Flaschenhals“:



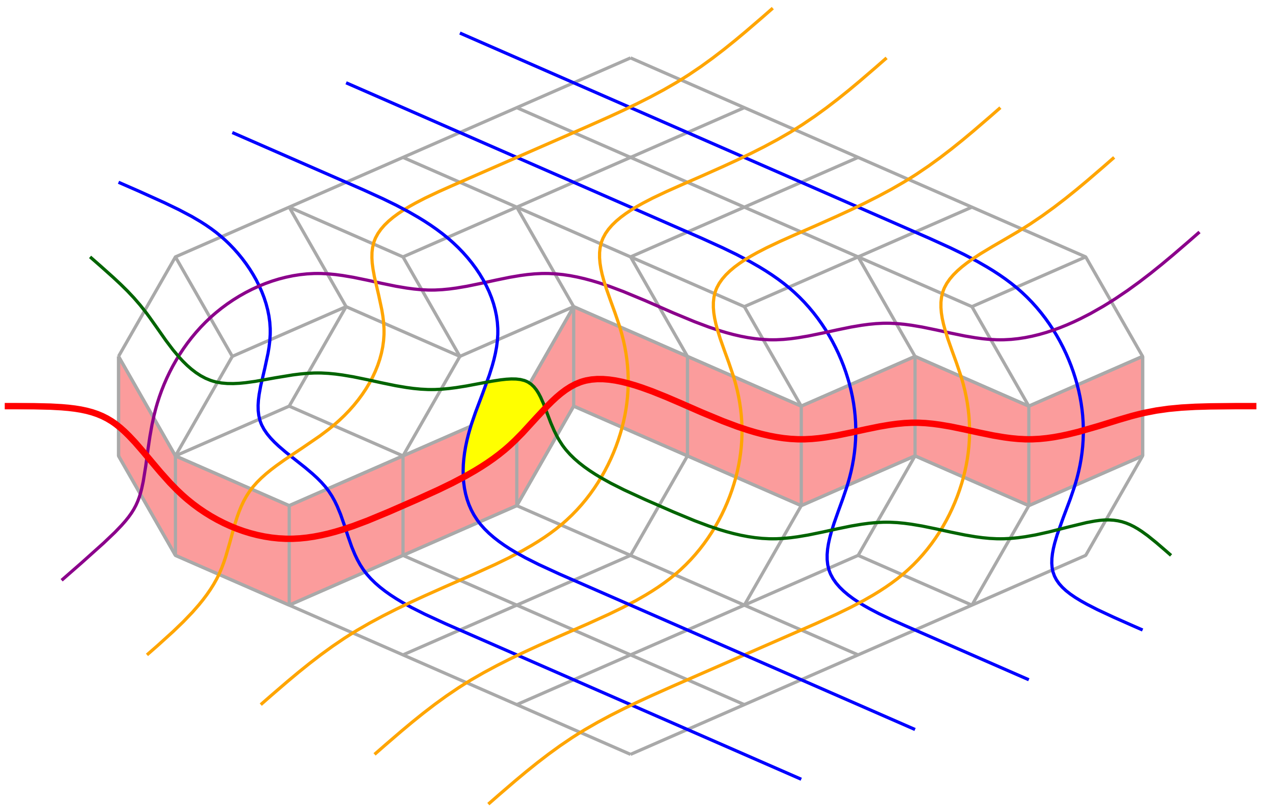
Flip an einzelner Pseudogerade



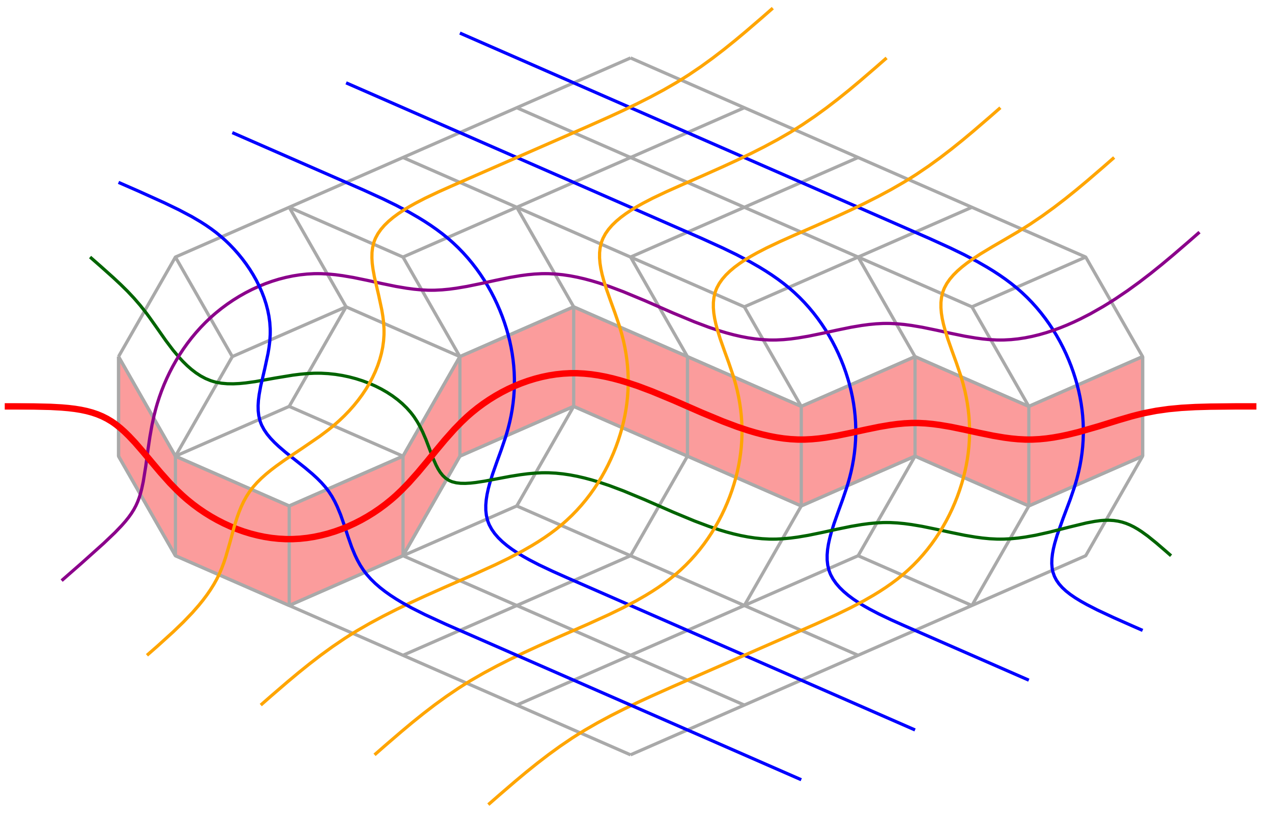
Flip an einzelner Pseudogerade



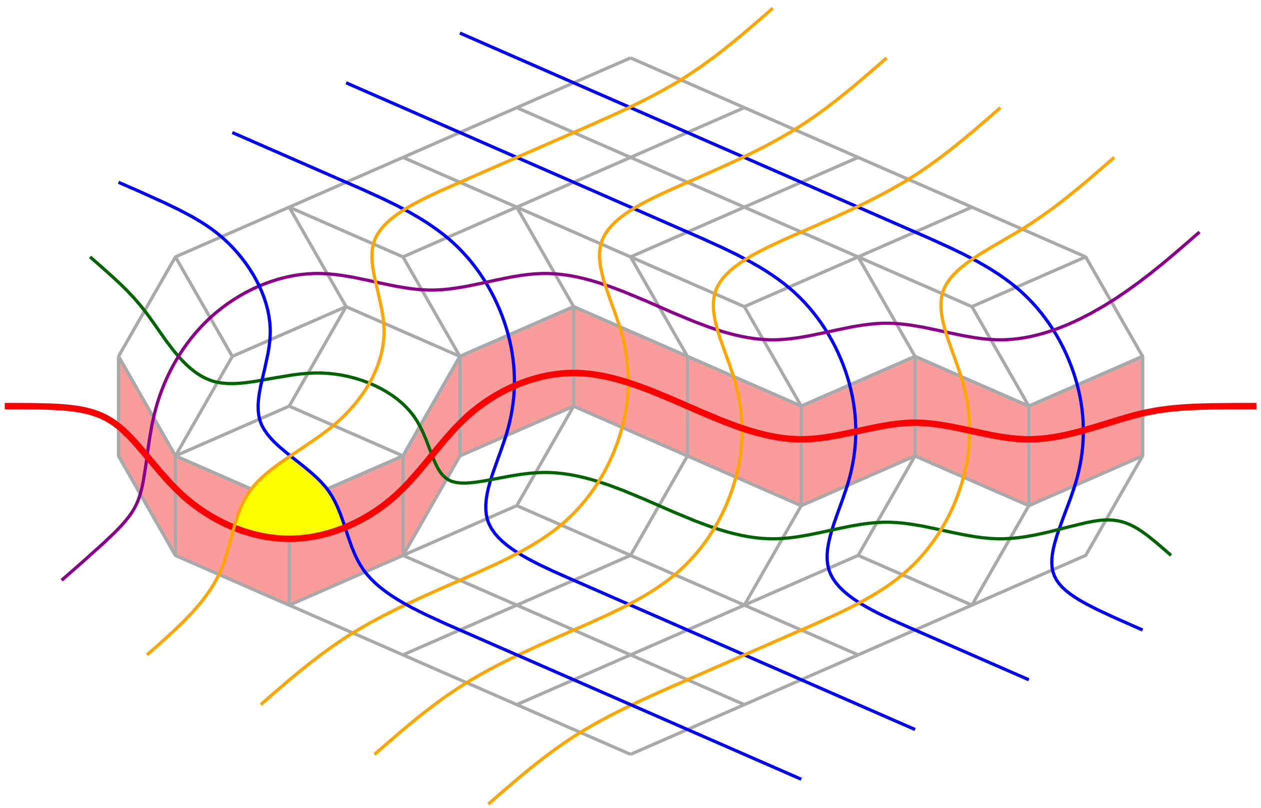
Flip an einzelner Pseudogerade



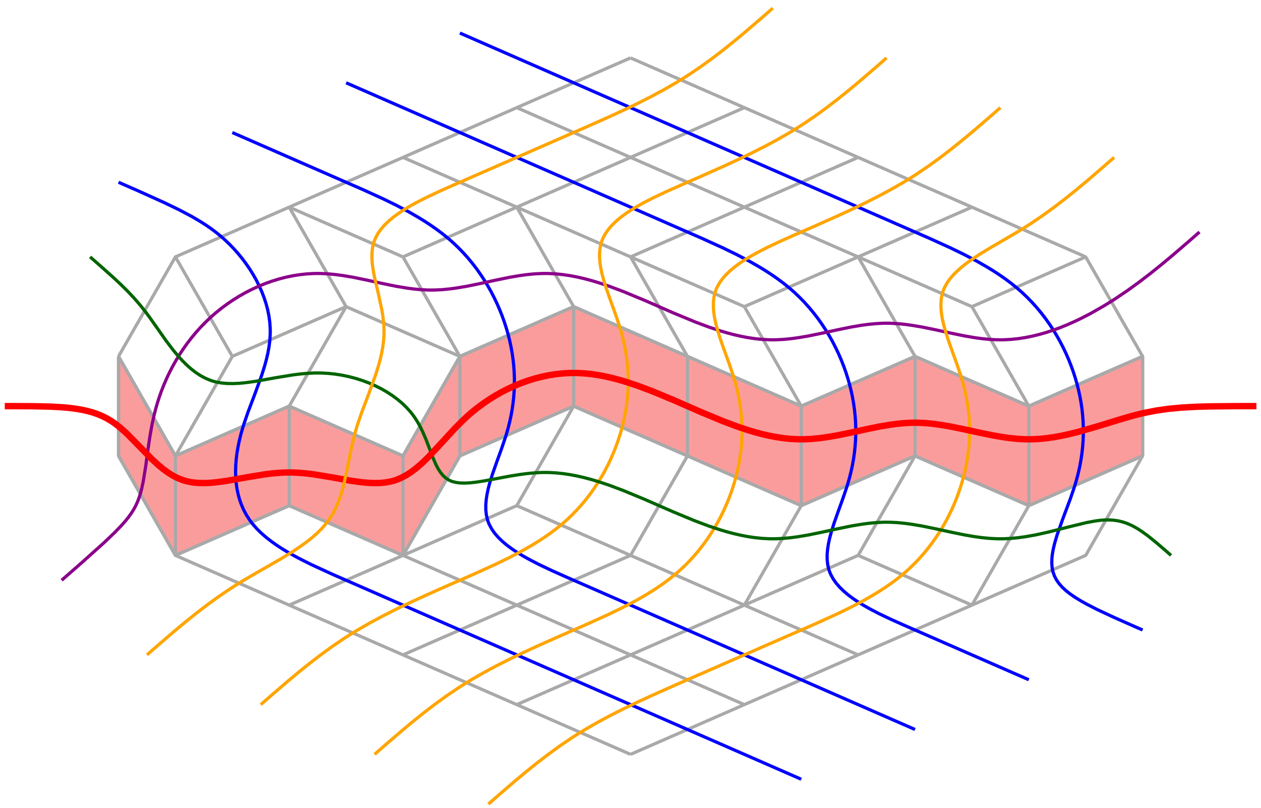
Flip an einzelner Pseudogerade



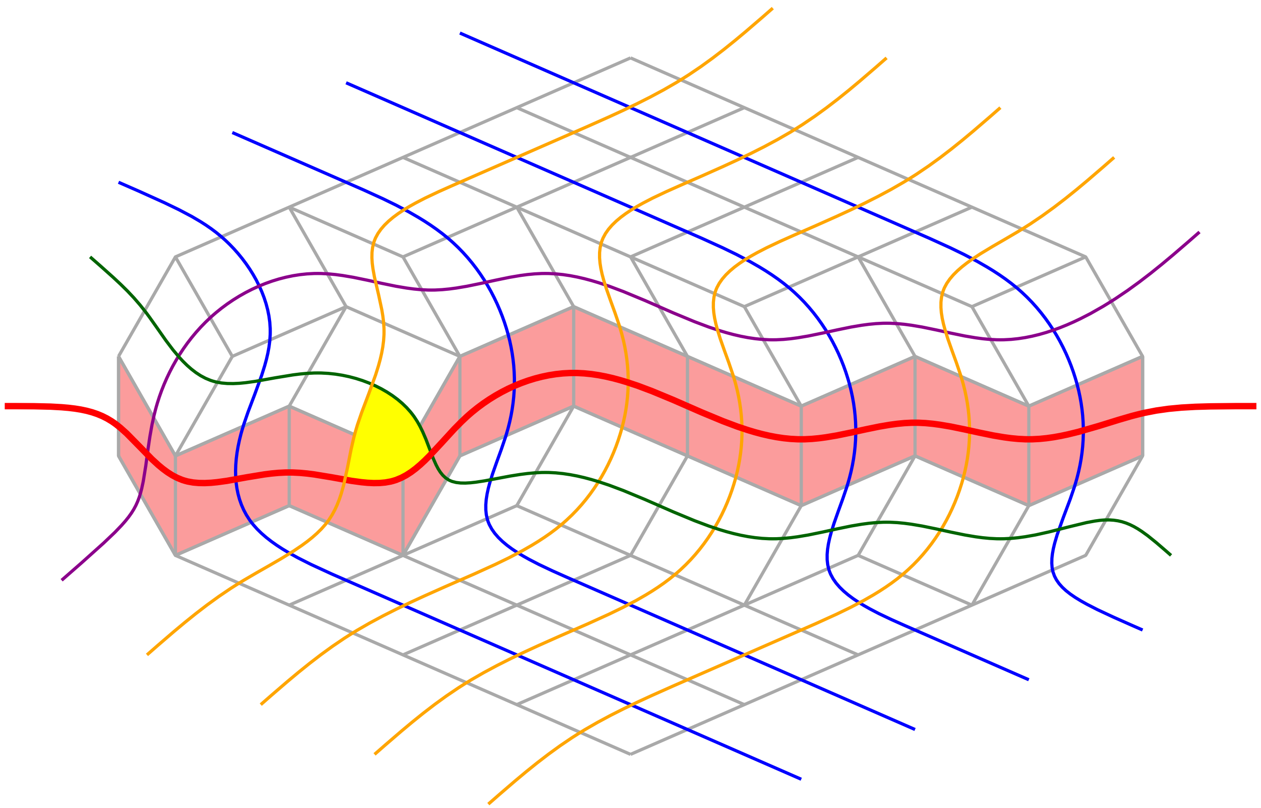
Flip an einzelner Pseudogerade



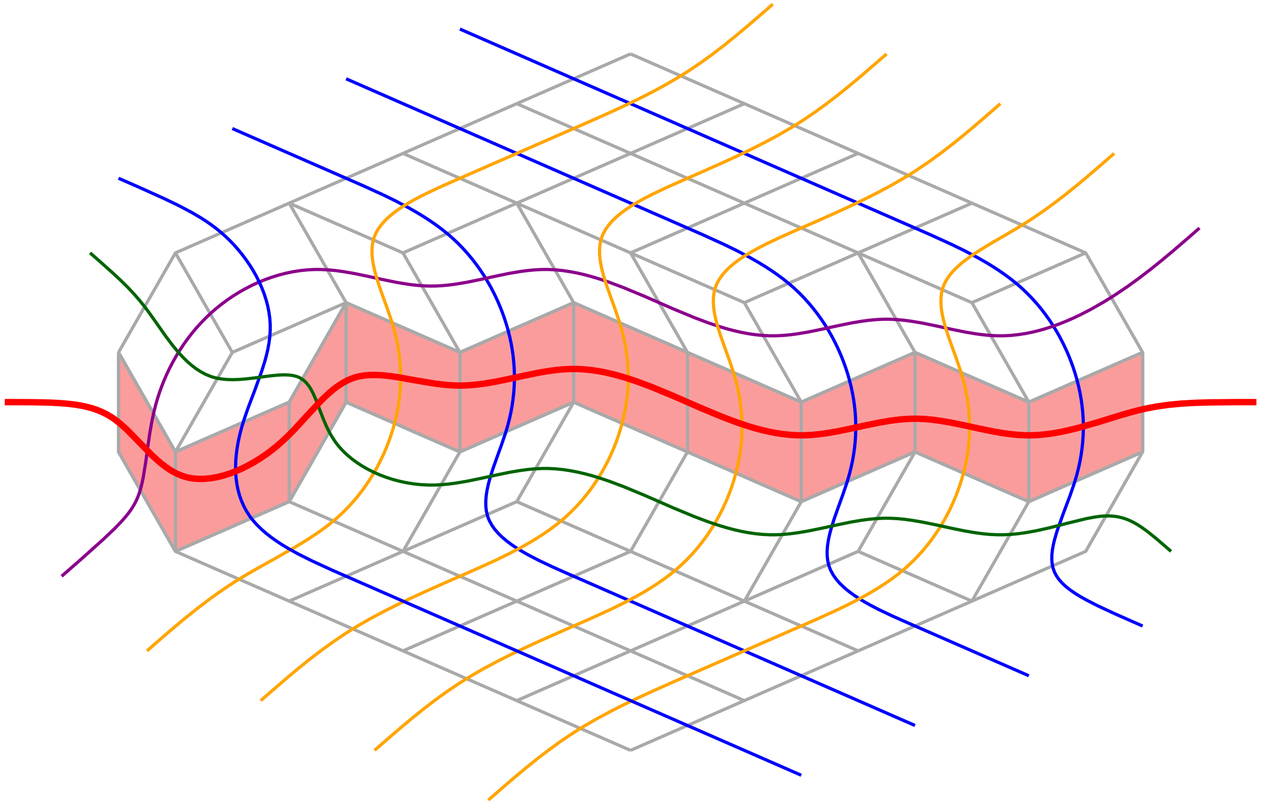
Flip an einzelner Pseudogerade



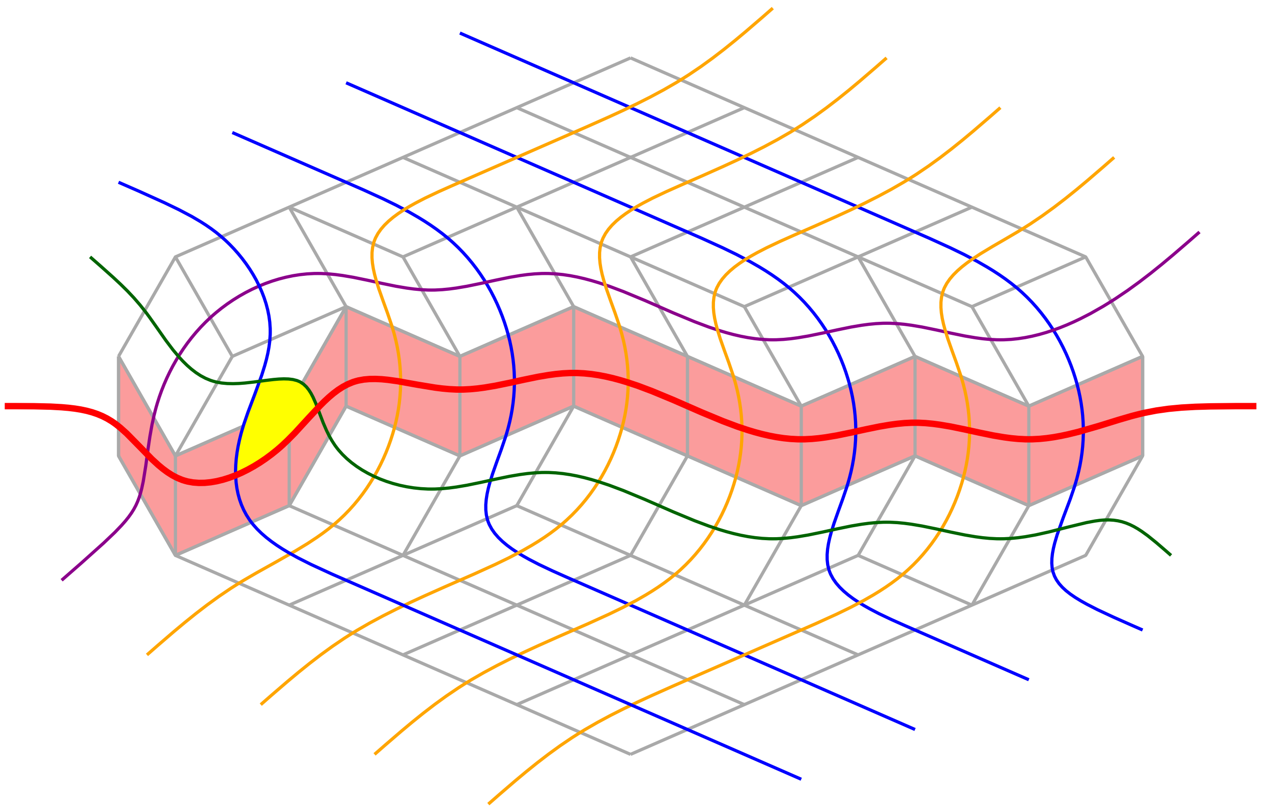
Flip an einzelner Pseudogerade



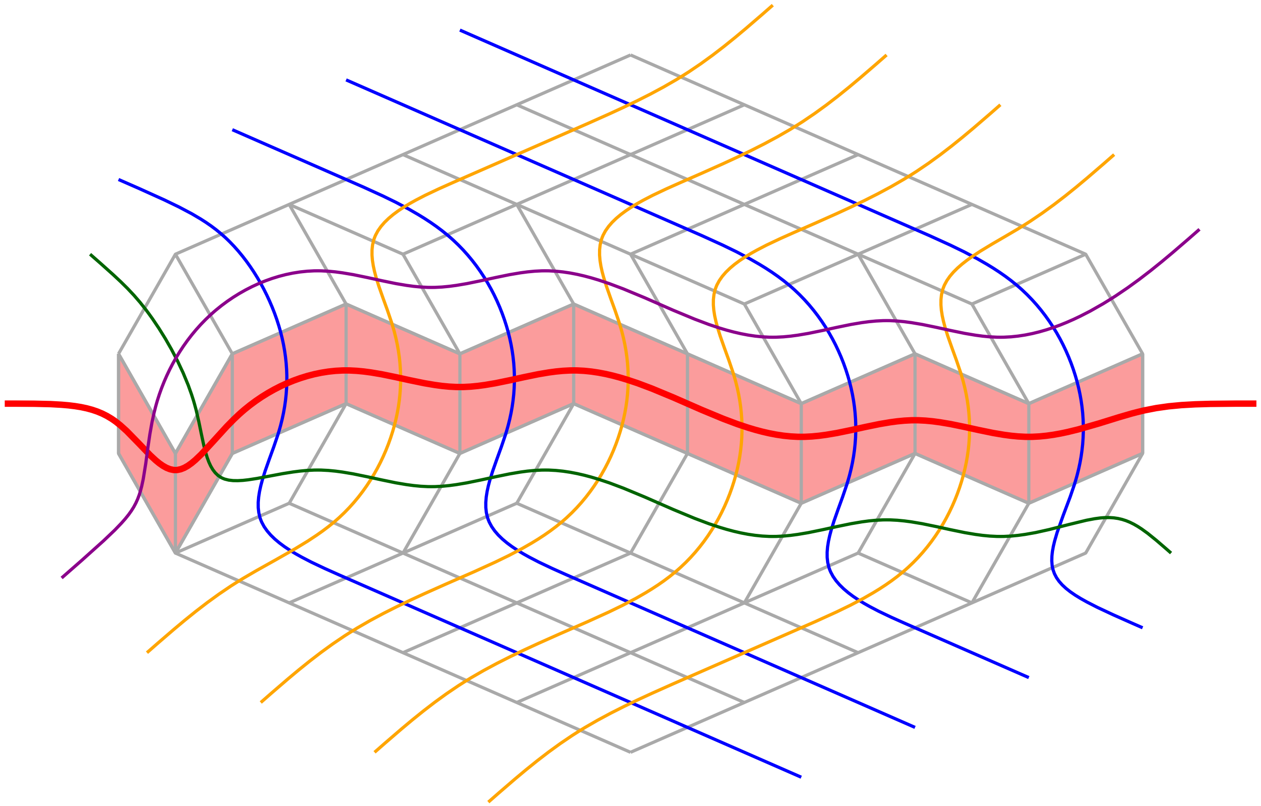
Flip an einzelner Pseudogerade



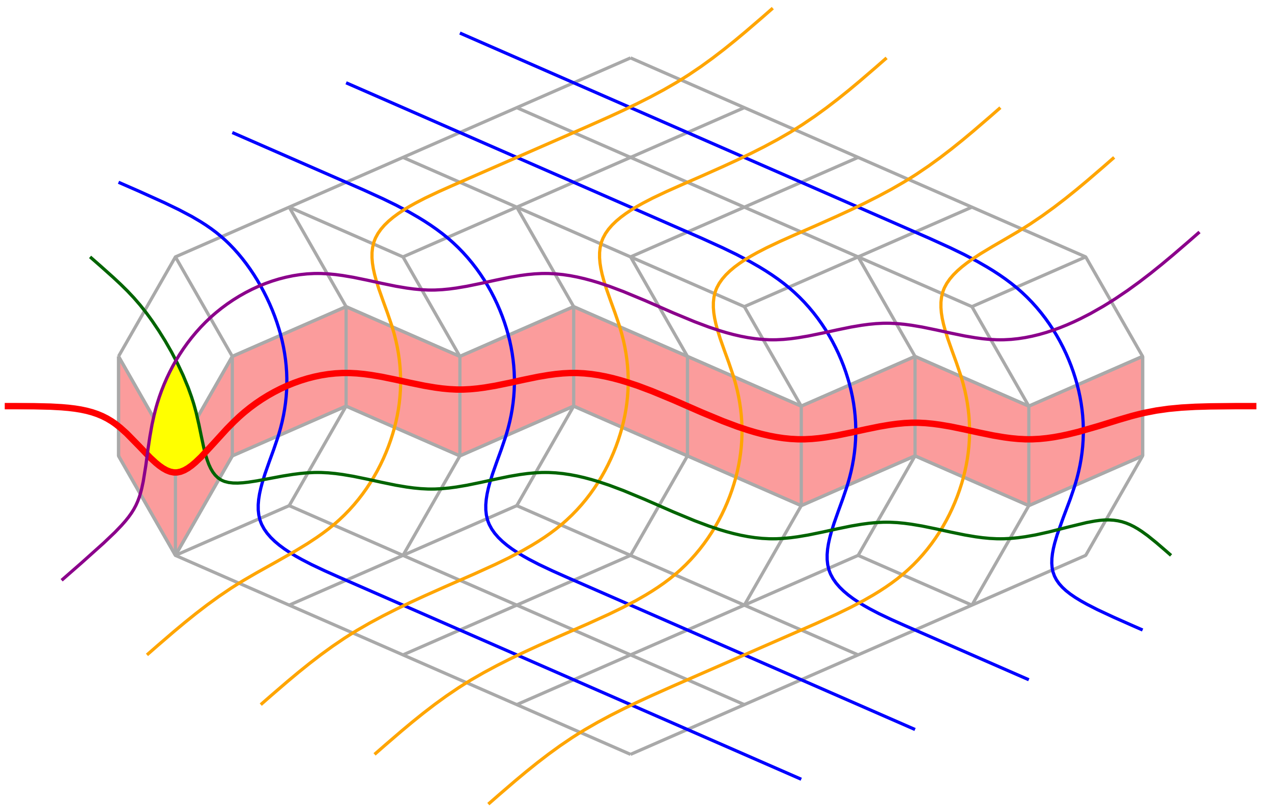
Flip an einzelner Pseudogerade



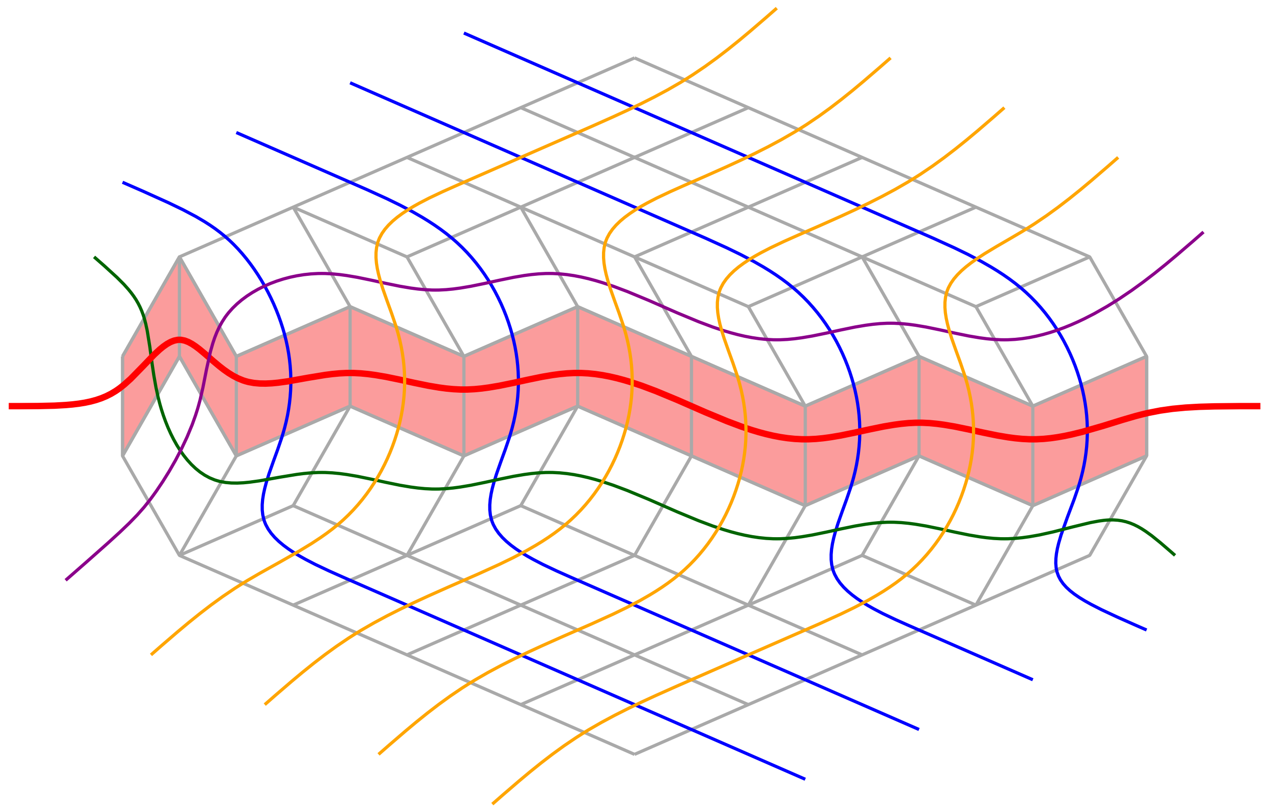
Flip an einzelner Pseudogerade



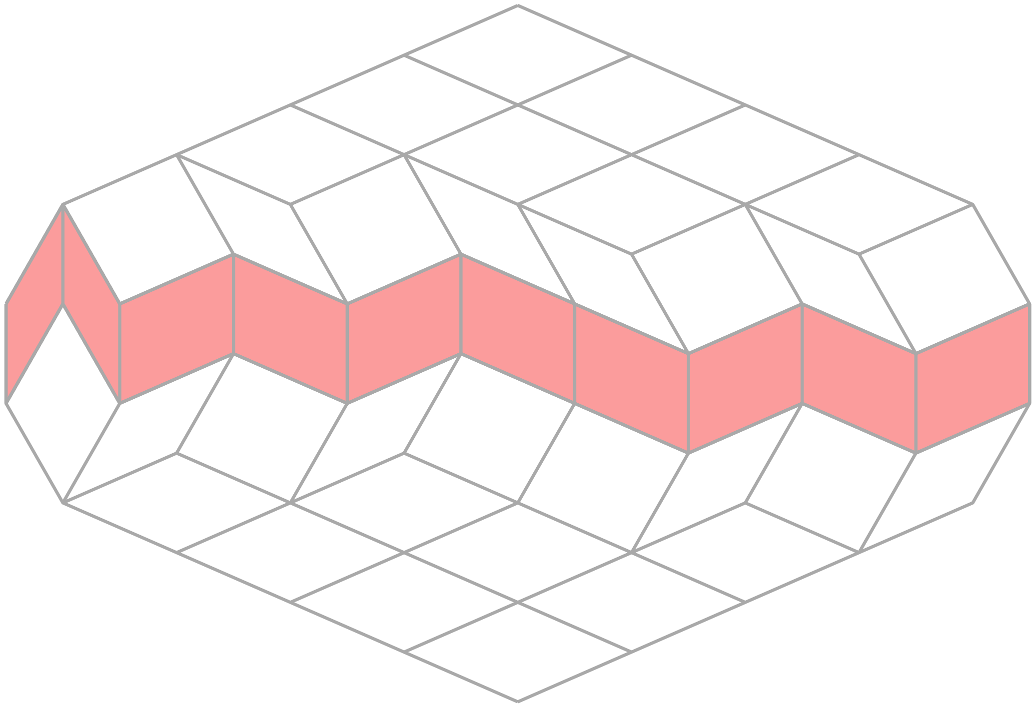
Flip an einzelner Pseudogerade



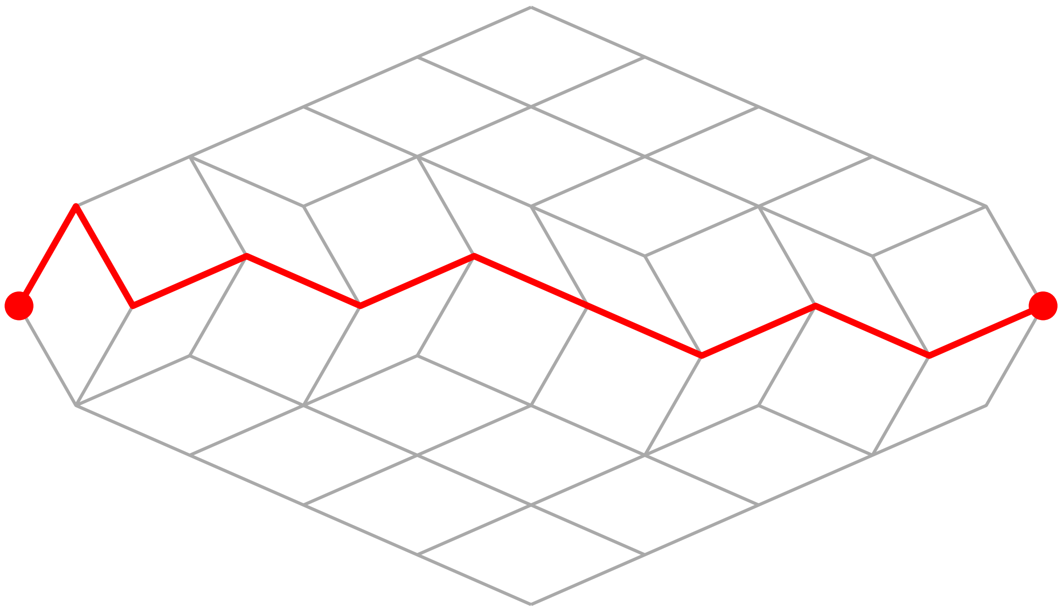
Flip an einzelner Pseudogerade



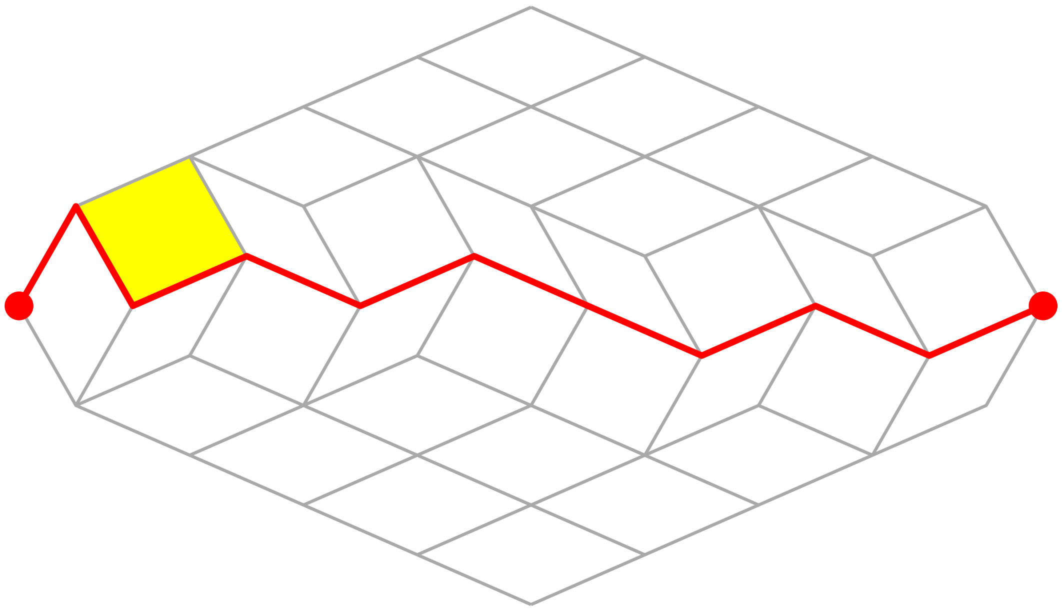
Flip an einzelner Pseudogerade



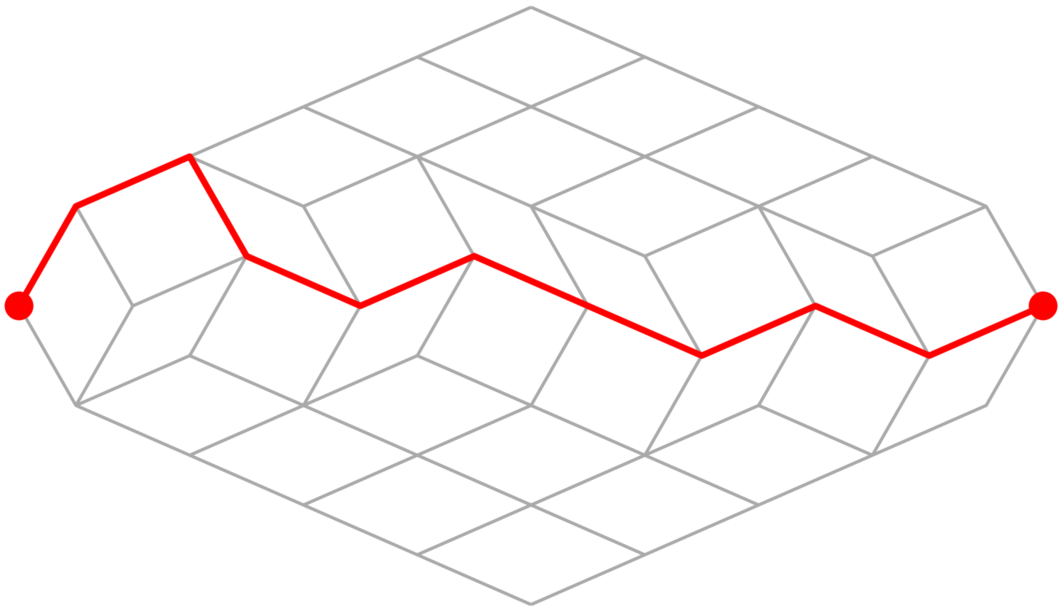
Flip an einzelner Pseudogerade



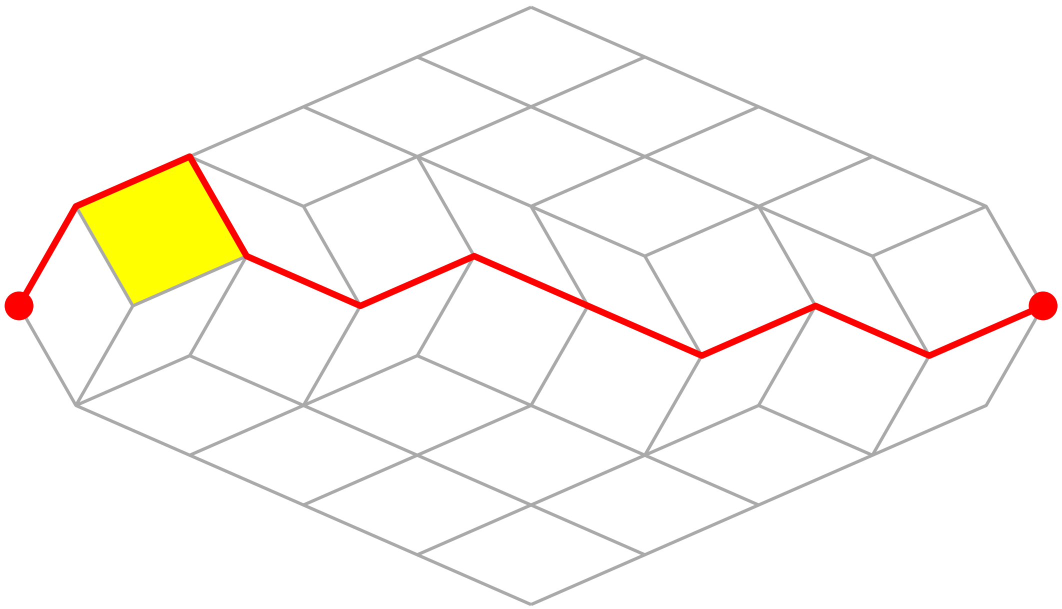
Flip an einzelner Pseudogerade



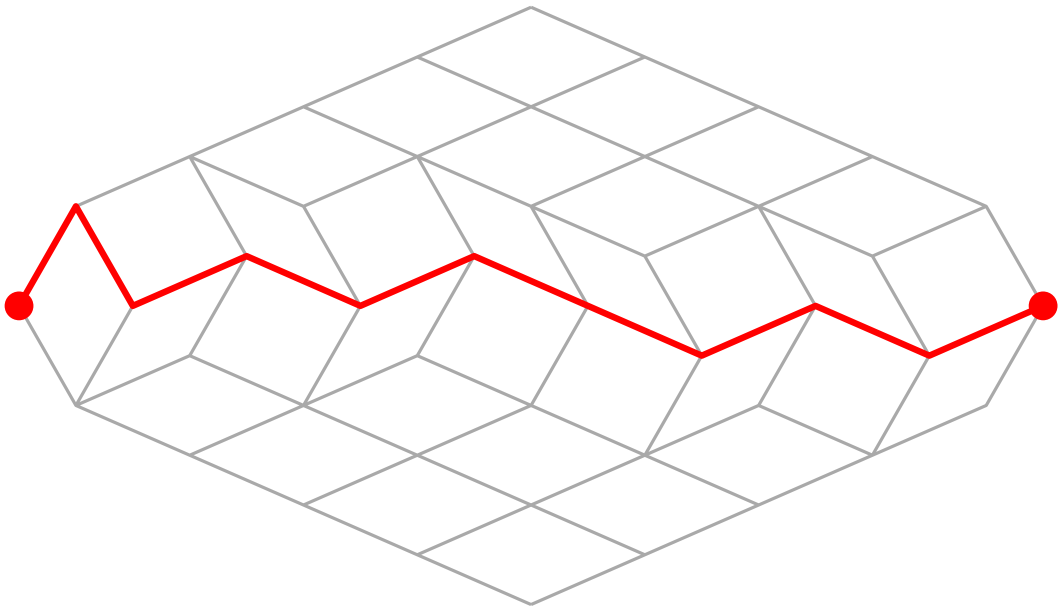
Flip an einzelner Pseudogerade



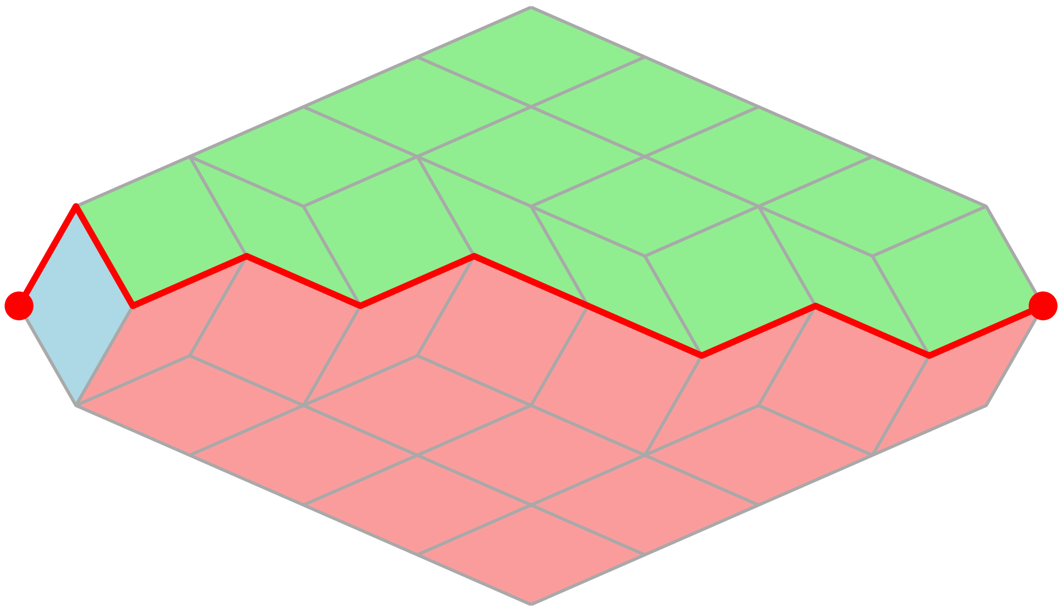
Flip an einzelner Pseudogerade



Flip an einzelner Pseudogerade

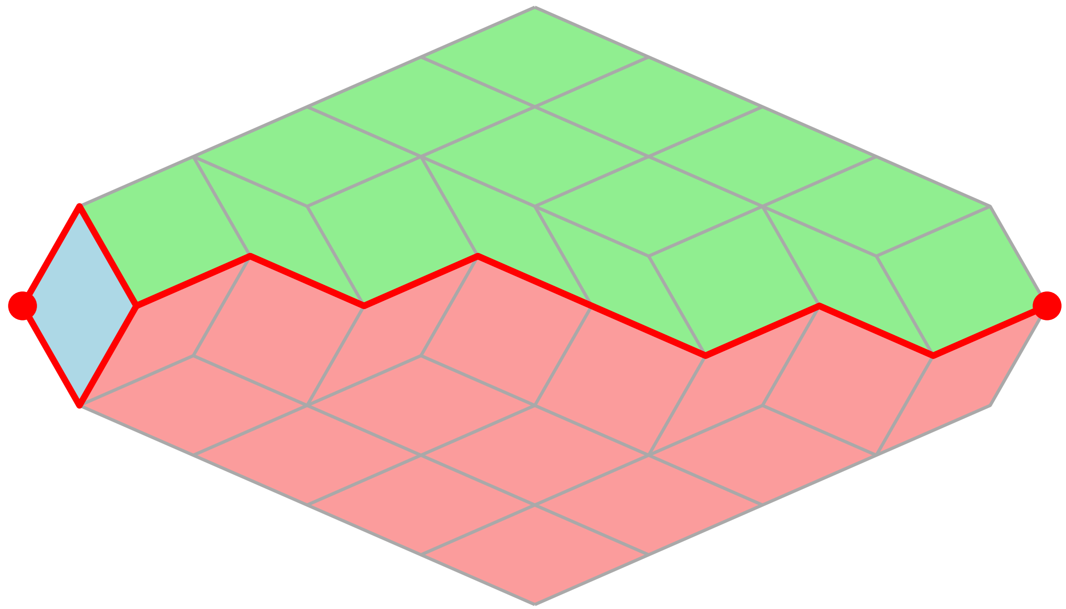


Flip an einzelner Pseudogerade



- Partition der Zustände in zwei Klassen:
  - Pfade **über blauem Rhombus**
  - Pfade **unter blauem Rhombus**

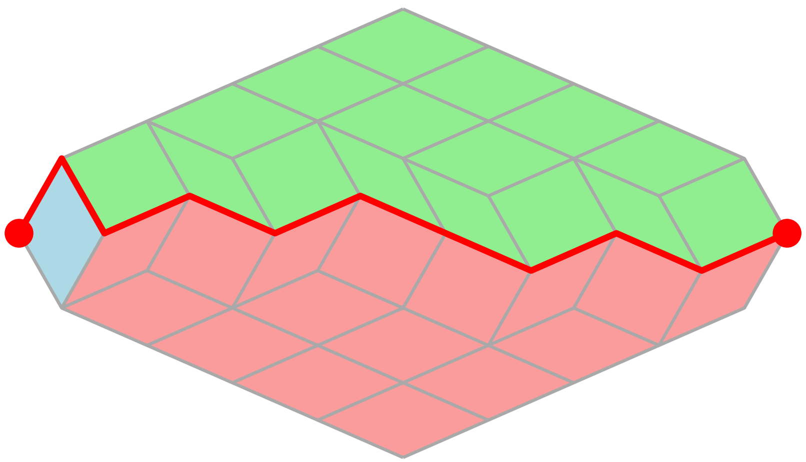
Flip an einzelner Pseudogerade



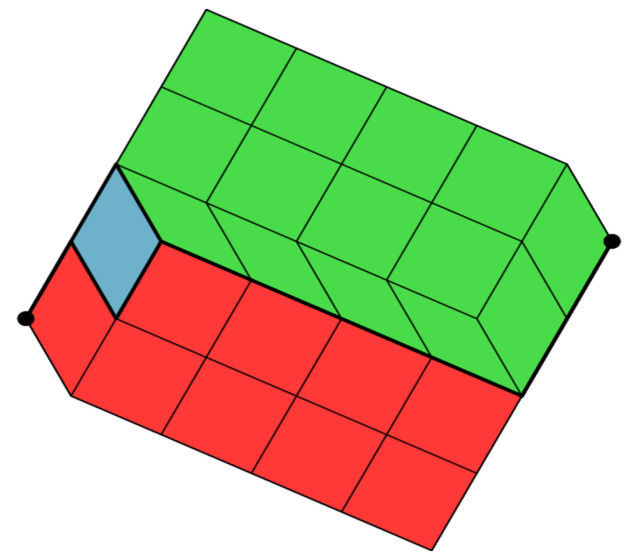
- Partition der Zustände in zwei Klassen:
  - Pfade **über blauem Rhombus**
  - Pfade **unter blauem Rhombus**
- Nur Flip an blauem Rhombus verbindet Klassen!

Flip an einzelner Pseudogerade

$r = 5$ Parallelklassen:
(verallgemeinerbar)



$r = 4$ Parallelklassen:



- Partition der Zustände in zwei Klassen:
  - Pfade **über blauem Rhombus**
  - Pfade **unter blauem Rhombus**
- Nur Flip an blauem Rhombus verbindet Klassen!

Flip an einzelner Pseudogerade

Theorem (R., 2021):
Die Markov-Kette, die in einem Verallgemeinerten Pseudogeradenarrangement zufällig Dreiecke mit Beteiligung einer ausgezeichneten Parallelklasse flipt, ist

- ... **schnell mischend** bei 3 Parallelklassen, und...
- ... i.A. **nicht schnell mischend** bei 4 oder mehr Parallelklassen.

Aussage für 3 Klassen folgt aus
(Luby, Randall & Sinclair, 1995)

Plane partitions und Gitterpfade

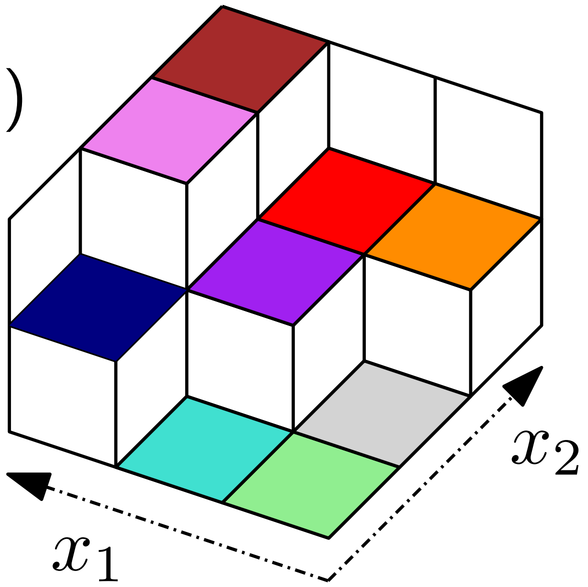
Plane partitions und Gitterpfade

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in {\mathbb{N}_0}^{r \times s}$ heißt *plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsend.

Plane partitions und Gitterpfade

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in {\mathbb{N}_0}^{r \times s}$ heißt *plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsend.

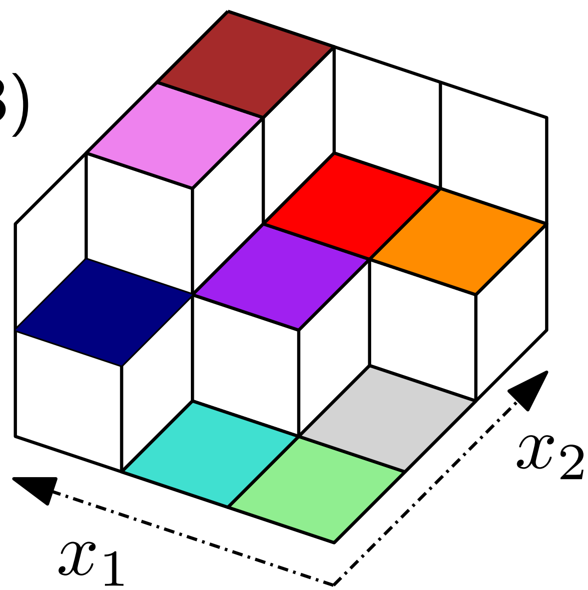
Rhombenpfl.
Größe (3, 2, 3)



Plane partitions und Gitterpfade

Def: Matrix $[h_{i,j}] \in {\mathbb{N}_0}^{r\times s}$ heißt *plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsend.

Rhombenpfl.
Größe (3, 2, 3)



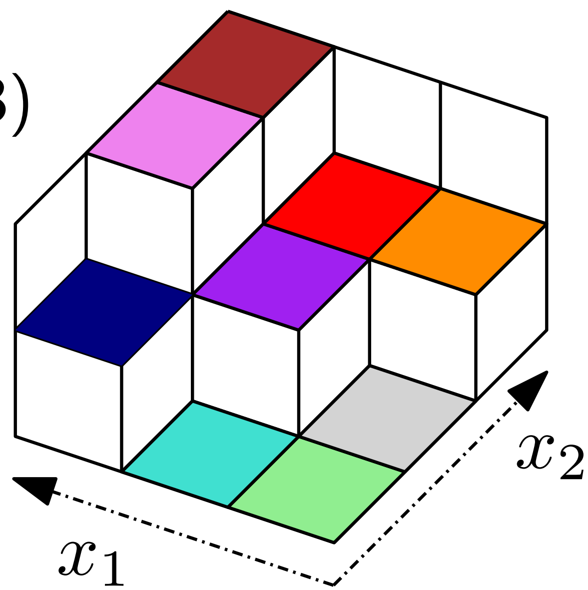
$$\begin{array}{cc} & x_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Plane partition mit Einträgen $h_{i,j} \leq 2$

Plane partitions und Gitterpfade

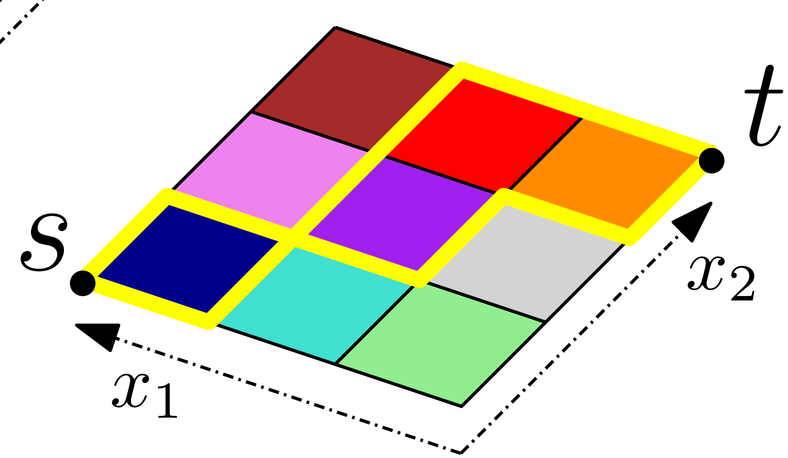
Def: Matrix $[h_{i,j}] \in {\mathbb{N}_0}^{r \times s}$ heißt *plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsend.

Rhombenpfl.
Größe (3, 2, 3)



$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad x_2 \quad} \\ x_1 \downarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Plane partition
mit Einträgen
$h_{i,j} \leq 2$

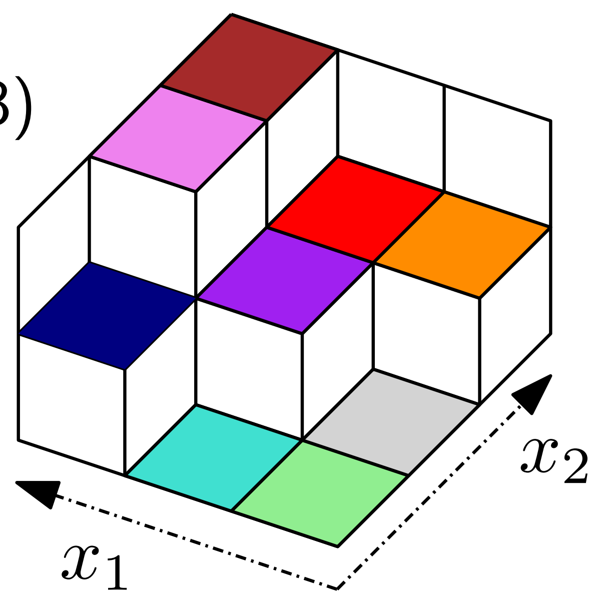


Monotone, nicht
schneidende
Gitterpfade

Plane partitions und Gitterpfade

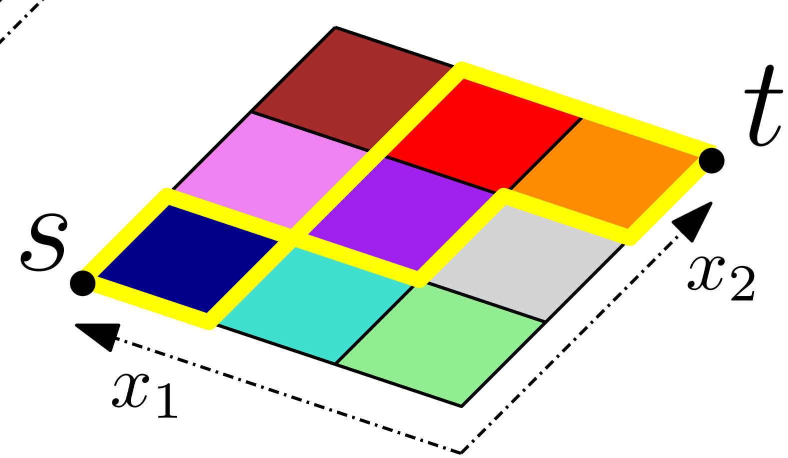
Def: Matrix $[h_{i,j}] \in {\mathbb{N}_0}^{r \times s}$ heißt *plane partition*, falls Zeilen und Spalten monoton wachsend.

Rhombenpfl.
Größe (3, 2, 3)



$$\begin{array}{cc} & x_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Plane partition
mit Einträgen
$h_{i,j} \leq 2$



Monotone, nicht
schneidende
Gitterpfade

min $\sum f_{i,j}(A_{i,j})$
s.t. A p.p., $A_{i,j} \leq h$

Fragen?