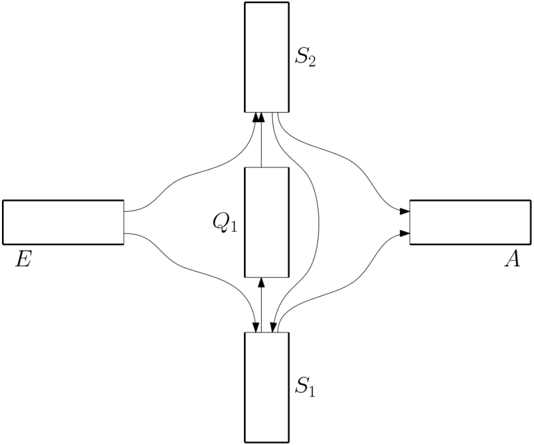
Sortieren in Netzwerken aus Stacks und Queues

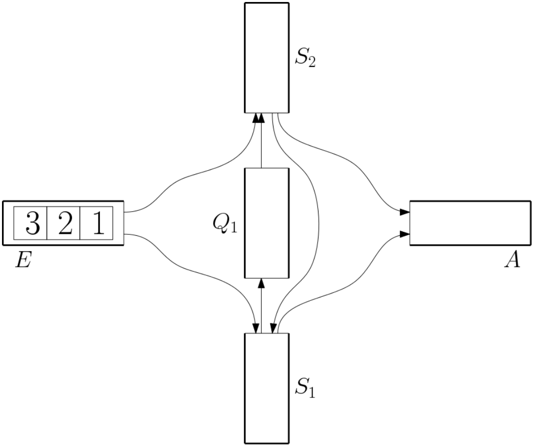
Sandro M. Roch

13.08.2019

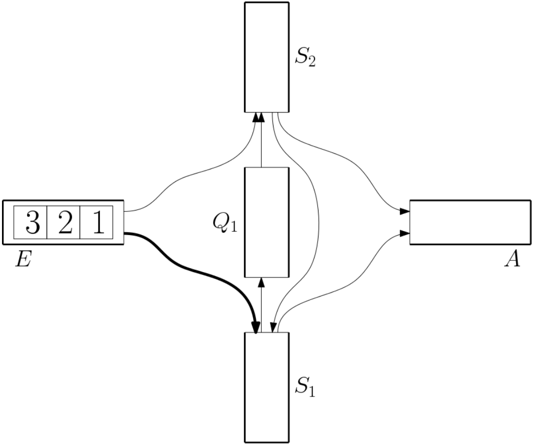
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



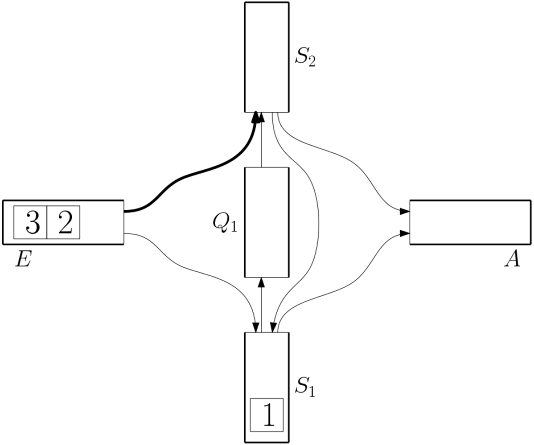
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



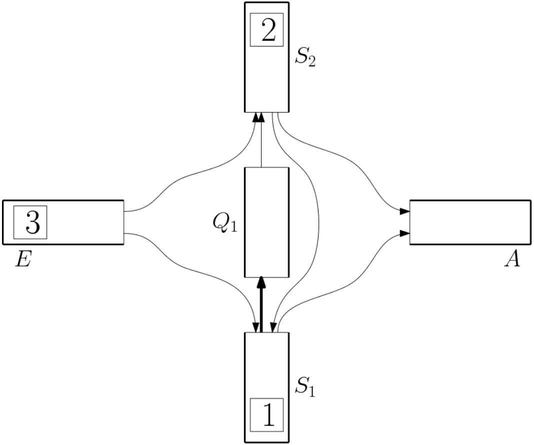
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



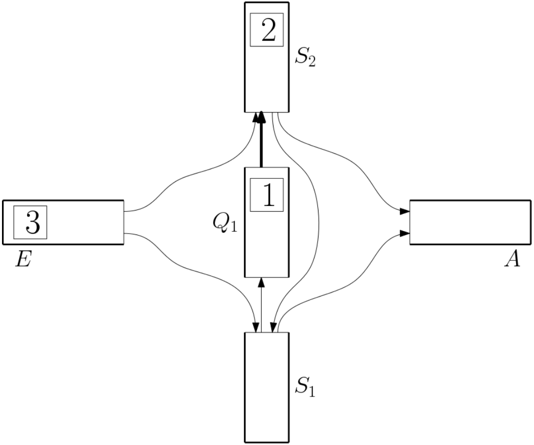
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



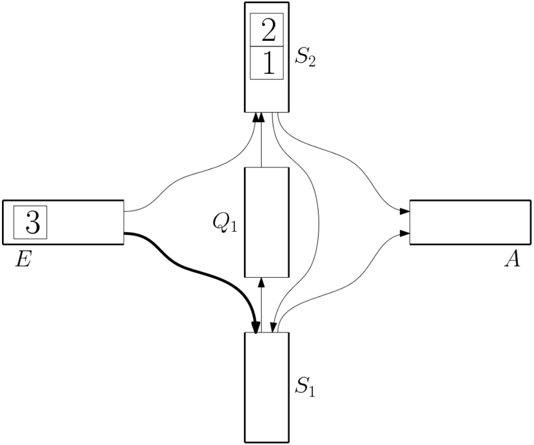
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



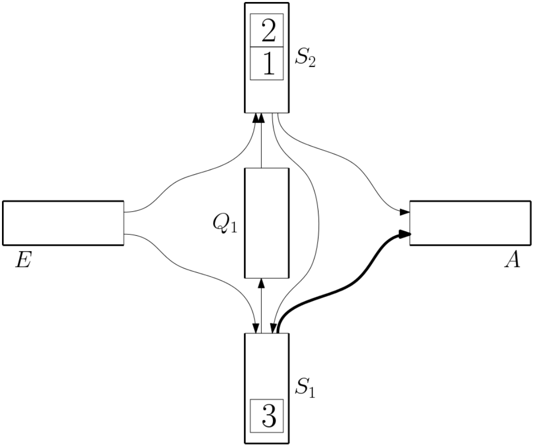
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



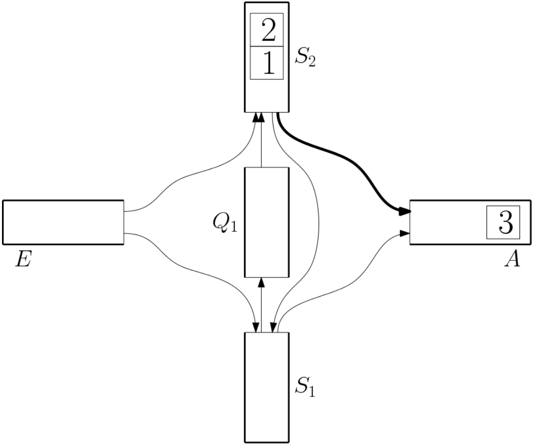
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



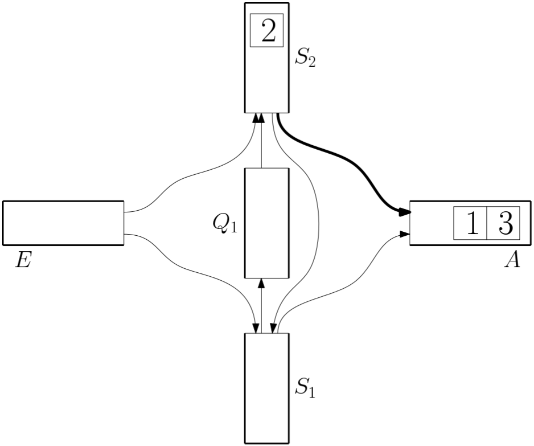
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



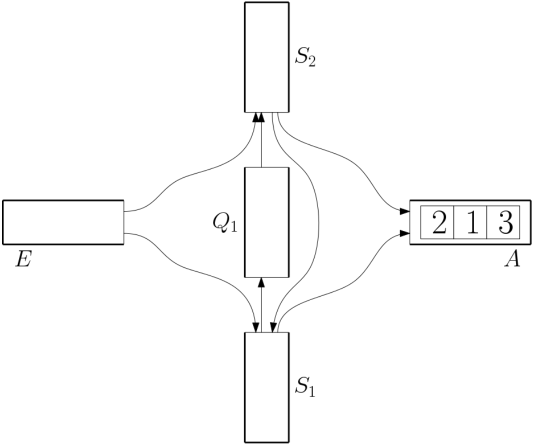
Weichennetzwerke: Ein Beispiel



Weichennetzwerke: Ein Beispiel



Weichennetzwerke: Ein Beispiel



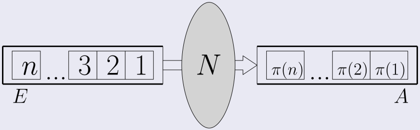
Motivation

Sortierbare und Erzeugbare Permutationen

Definition

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π *erzeugbar* in N: Es gibt Operationsfolge, die n Elemente in Reihenfolge $1, ..., n$ einliest und in Reihenfolge $\pi(1), ..., \pi(n)$ ausgibt.

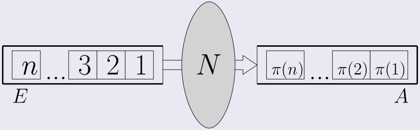


Sortierbare und Erzeugbare Permutationen

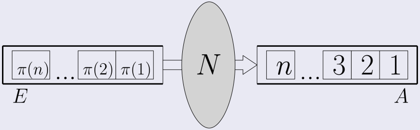
Definition

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π *erzeugbar* in N: Es gibt Operationsfolge, die n Elemente in Reihenfolge $1, \ldots, n$ einliest und in Reihenfolge $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ ausgibt.



2. π *sortierbar* in N: Es gibt Operationsfolge, die n Elemente in Reihenfolge $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ einliest und in Reihenfolge $1, \ldots, n$ ausgibt.



Lemma

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π erzeugbar in $N \iff \pi^{-1}$ sortierbar in N.
2. π sortierbar in $N \iff \pi^{-1}$ erzeugbar in N.

Lemma

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π erzeugbar in $N \iff \pi^{-1}$ sortierbar in N.
2. π sortierbar in $N \iff \pi^{-1}$ erzeugbar in N.

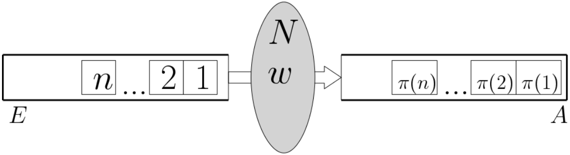
Beweis: Zu 1): Sei π erzeugbar durch Operationsfolge w.

Lemma

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π erzeugbar in $N \iff \pi^{-1}$ sortierbar in N.
2. π sortierbar in $N \iff \pi^{-1}$ erzeugbar in N.

Beweis: Zu 1): Sei π erzeugbar durch Operationsfolge w.

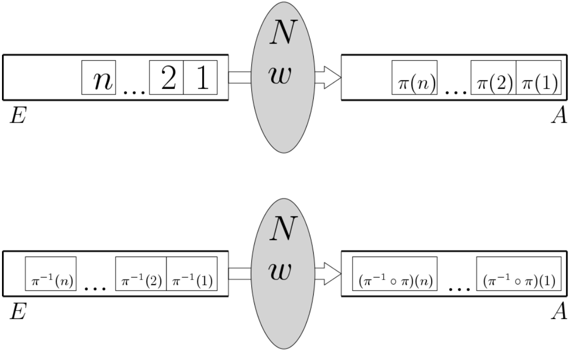


Lemma

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π erzeugbar in $N \iff \pi^{-1}$ sortierbar in N.
2. π sortierbar in $N \iff \pi^{-1}$ erzeugbar in N.

Beweis: Zu 1): Sei π erzeugbar durch Operationsfolge w.

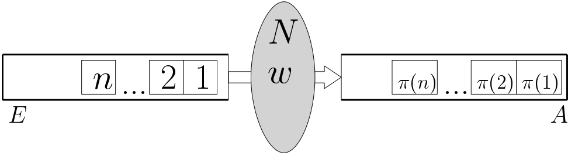


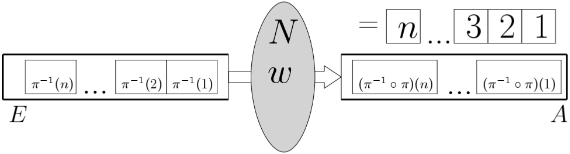
Lemma

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π erzeugbar in $N \iff \pi^{-1}$ sortierbar in N.
2. π sortierbar in $N \iff \pi^{-1}$ erzeugbar in N.

Beweis: Zu 1): Sei π erzeugbar durch Operationsfolge w.



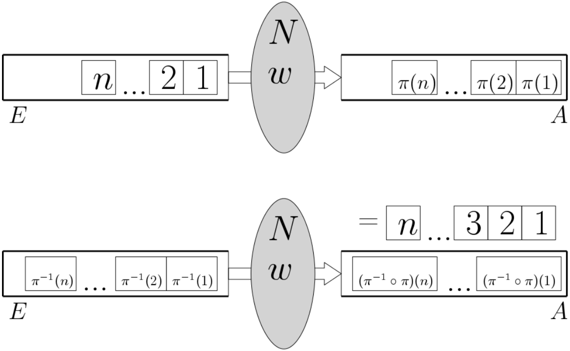


Lemma

Permutation $\pi \in S_n$, Weichennetzwerk N.

1. π erzeugbar in $N \iff \pi^{-1}$ sortierbar in N.
2. π sortierbar in $N \iff \pi^{-1}$ erzeugbar in N.

Beweis: Zu 1): Sei π erzeugbar durch Operationsfolge w.



$\Rightarrow \pi^{-1}$ sortierbar in N. Rückrichtung ähnlich. □

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Definition

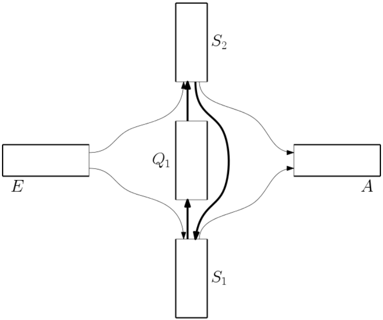
Weichennetzwerk N heißt *zyklisch*, falls N einen gerichteten, nicht *isolierten* Kreis enthält, andernfalls heißt N *azyklisch*.

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Definition

Weichennetzwerk N heißt *zyklisch*, falls N einen gerichteten, nicht *isolierten* Kreis enthält, andernfalls heißt N *azyklisch*.

Beispiel: Zyklisches Weichennetzwerk:



Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Theorem (Tarjan, 1972)

In Weichennetzwerk N sind alle Permutationen $\pi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ erzeugbar genau dann, wenn N zyklisch ist. Andernfalls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\pi \text{ erzeugbar in } N] = 0 \qquad \text{für } \pi \in S_n \text{ uniform zufällig}$$

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Theorem (Tarjan, 1972)

In Weichennetzwerk N sind alle Permutationen $\pi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ erzeugbar genau dann, wenn N zyklisch ist. Andernfalls gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[\pi \text{ erzeugbar in } N] = 0 \qquad \text{für } \pi \in S_n \text{ uniform zufällig}$$

- Nach vorigem Lemma kann „erzeugbar“ auch durch „sortierbar“ ersetzt werden.

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Theorem (Tarjan, 1972)

In Weichennetzwerk N sind alle Permutationen $\pi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ erzeugbar genau dann, wenn N zyklisch ist. Andernfalls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\pi \text{ erzeugbar in } N] = 0 \qquad \text{für } \pi \in S_n \text{ uniform zufällig}$$

- Nach vorigem Lemma kann „erzeugbar" auch durch „sortierbar" ersetzt werden.
- Fragestellungen für **azyklische** Weichennetzwerke:
  - Welche Permutationen $\pi \in S_n$ sind sortierbar / erzeugbar?
  - Wie viele gibt es?

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Theorem (Tarjan, 1972)

In Weichennetzwerk N sind alle Permutationen $\pi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ erzeugbar genau dann, wenn N zyklisch ist. Andernfalls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\pi \text{ erzeugbar in } N] = 0 \qquad \text{für } \pi \in S_n \text{ uniform zufällig}$$

- Nach vorigem Lemma kann „erzeugbar“ auch durch „sortierbar“ ersetzt werden.
- Fragestellungen für **azyklische** Weichennetzwerke:
  - Welche Permutationen $\pi \in S_n$ sind sortierbar / erzeugbar?
  - Wie viele gibt es?
- Fragestellungen für **zyklische** Weichennetzwerke:
  - Wie viele Operationen werden im WorstCase zum Sortieren von $\pi \in S_n$ benötigt?
  - Optimale (d.h. kürzeste) Operationsfolgen zum Sortieren von $\pi \in S_n$?

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Beweis:

N zyklisch $\Rightarrow$ Alle Permutationen erzeugbar, klar.

Beweis:

N zyklisch $\Rightarrow$ Alle Permutationen erzeugbar, klar.

Ang. N azyklisch: v Zahl der Knoten, e Zahl der Kanten in N.

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Beweis:

N zyklisch $\Rightarrow$ Alle Permutationen erzeugbar, klar.

Ang. N azyklisch: v Zahl der Knoten, e Zahl der Kanten in N.

$\Rightarrow$ Jede mögliche Operationsfolge hat Länge höchstens $v \cdot n$.

Beweis:

N zyklisch $\Rightarrow$ Alle Permutationen erzeugbar, klar.

Ang. N azyklisch: v Zahl der Knoten, e Zahl der Kanten in N.

$\Rightarrow$ Jede mögliche Operationsfolge hat Länge höchstens $v \cdot n$.

$\Rightarrow$ Höchstens $e^{v \cdot n}$ mögliche Operationsfolgen.

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Beweis:

N zyklisch $\Rightarrow$ Alle Permutationen erzeugbar, klar.

Ang. N azyklisch: v Zahl der Knoten, e Zahl der Kanten in N.

$\Rightarrow$ Jede mögliche Operationsfolge hat Länge höchstens $v \cdot n$.

$\Rightarrow$ Höchstens $e^{v \cdot n}$ mögliche Operationsfolgen.

$\Rightarrow$ Höchstens $e^{v \cdot n}$ erzeugbare Permutationen.

Zyklische und Azyklische Weichennetzwerke

Beweis:

N zyklisch $\Rightarrow$ Alle Permutationen erzeugbar, klar.

Ang. N azyklisch: v Zahl der Knoten, e Zahl der Kanten in N.

$\Rightarrow$ Jede mögliche Operationsfolge hat Länge höchstens $v \cdot n$.

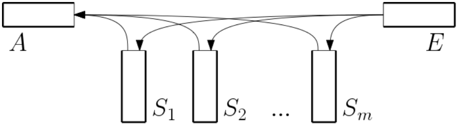
$\Rightarrow$ Höchstens $e^{v \cdot n}$ mögliche Operationsfolgen.

$\Rightarrow$ Höchstens $e^{v \cdot n}$ erzeugbare Permutationen.

$\Rightarrow \mathbb{P}[\pi \text{ erzeugbar in } N] \leq \frac{e^{v \cdot n}}{n!} \to 0 \text{ für } n \to \infty$ $\square$

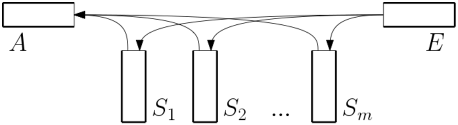
m parallele Stacks

- Netzwerk bestehend aus m parallelen Stacks:



m parallele Stacks

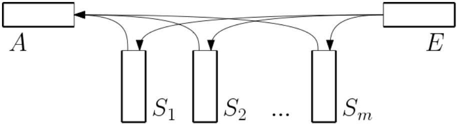
- Netzwerk bestehend aus m parallelen Stacks:



- Anwendung: Zwischenlagerung auf Stapeln, etwa von Containern etc.

m parallele Stacks

- Netzwerk bestehend aus m parallelen Stacks:



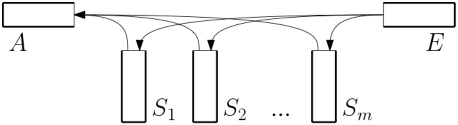
- Anwendung: Zwischenlagerung auf Stapeln, etwa von Containern etc.

Definition

Wird die *Mitternachtseinschränkung* gefordert, so müssen erst alle Elemente von E entfernt werden, bevor Elemente auf A gelegt werden dürfen.

m parallele Stacks

- Netzwerk bestehend aus m parallelen Stacks:



- Anwendung: Zwischenlagerung auf Stapeln, etwa von Containern etc.

Definition

Wird die *Mitternachtseinschränkung* gefordert, so müssen erst alle Elemente von E entfernt werden, bevor Elemente auf A gelegt werden dürfen.

- Mitternachtseinschränkung beeinflusst, welche Permutationen im Netzwerk sortierbar / erzeugbar sind.

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks mit Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks mit Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Elemente i, j mit $i < j$ und $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ können nicht über denselben Stack laufen.

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks mit Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Elemente i, j mit $i < j$ und $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ können nicht über denselben Stack laufen.
- Definiere Konfliktgraph $G_\pi^{\complement} := (V_\pi, E_\pi^{\complement})$ mit

$$V_\pi = \{1, ..., n\}$$
$$E_\pi^{\complement} = \big\{\{i, j\} : 1 \le i < j \le n, \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)\big\}$$

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks mit Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Elemente i, j mit $i < j$ und $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ können nicht über denselben Stack laufen.
- Definiere Konfliktgraph $G_\pi^{\complement} := (V_\pi, E_\pi^{\complement})$ mit

$$V_\pi = \{1, ..., n\}$$
$$E_\pi^{\complement} = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n, \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)\}$$

- m-Färbbarkeit von $G_\pi^{\complement}$ ist notwendig, damit π erzeugt werden kann.

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks mit Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Elemente i, j mit $i < j$ und $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ können nicht über denselben Stack laufen.
- Definiere Konfliktgraph $G_\pi^\complement := (V_\pi, E_\pi^\complement)$ mit

$$V_\pi = \{1, \ldots, n\}$$
$$E_\pi^\complement = \left\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n, \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)\right\}$$

- m-Färbbarkeit von $G_\pi^\complement$ ist notwendig, damit π erzeugt werden kann.

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^{\complement}) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^{\complement}) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^{\complement}$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^\complement$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

- Lege Elemente von E kommend auf Stacks entsprechend ihrer Farbe.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^\complement$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

- Lege Elemente von E kommend auf Stacks entsprechend ihrer Farbe.
- Lege nacheinander $\pi(1), ..., \pi(n)$ auf A.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^{\complement}) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^{\complement}) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^{\complement}$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

- Lege Elemente von E kommend auf Stacks entsprechend ihrer Farbe.
- Lege nacheinander $\pi(1), ..., \pi(n)$ auf A.

Ang. zweiter Schritt scheitert: Auf A liegen schon $\pi(1), ..., \pi(i-1)$, jedoch wird $\pi(i)$ in dessen Stack von $\pi(j)$ überdeckt.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^\complement$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

- Lege Elemente von E kommend auf Stacks entsprechend ihrer Farbe.
- Lege nacheinander $\pi(1), ..., \pi(n)$ auf A.

Ang. zweiter Schritt scheitert: Auf A liegen schon $\pi(1), ..., \pi(i-1)$, jedoch wird $\pi(i)$ in dessen Stack von $\pi(j)$ überdeckt.

Es gilt $i < j$ und $\pi(i) < \pi(j)$

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^\complement$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

- Lege Elemente von E kommend auf Stacks entsprechend ihrer Farbe.
- Lege nacheinander $\pi(1), ..., \pi(n)$ auf A.

Ang. zweiter Schritt scheitert: Auf A liegen schon $\pi(1), ..., \pi(i-1)$, jedoch wird $\pi(i)$ in dessen Stack von $\pi(j)$ überdeckt.

Es gilt $i < j$ und $\pi(i) < \pi(j) \ \Rightarrow \{\pi(i), \pi(j)\} \in E_\pi^\complement$

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

Beweis: Noch zu zeigen: $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$ hinreichend, damit π erzeugbar.

Idee: Wähle m-Färbung von $G_\pi^\complement$, assoziiere m Farben mit m Stacks.

- Lege Elemente von E kommend auf Stacks entsprechend ihrer Farbe.
- Lege nacheinander $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ auf A.

Ang. zweiter Schritt scheitert: Auf A liegen schon $\pi(1), \ldots, \pi(i-1)$, jedoch wird $\pi(i)$ in dessen Stack von $\pi(j)$ überdeckt.

Es gilt $i < j$ und $\pi(i) < \pi(j) \ \Rightarrow \{\pi(i), \pi(j)\} \in E_\pi^\complement$

$\Rightarrow \pi(i), \pi(j)$ verschieden gefärbt, auf verschiedenen Stacks $\lightning$. $\square$

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

- $G_\pi^\complement$ ist Vergleichbarkeitsgraph folgender Partialordnung auf V_π:

$$i \prec j :\iff (i < j) \ \wedge \ (\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j))$$

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

- $G_\pi^\complement$ ist Vergleichbarkeitsgraph folgender Partialordnung auf V_π:

$$i \prec j :\Longleftrightarrow \ (i < j) \ \wedge \ (\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j))$$

- $\omega(G_\pi^\complement)$ ist Länge der längsten aufsteigenden Teilsequenz in π.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

- $G_\pi^\complement$ ist Vergleichbarkeitsgraph folgender Partialordnung auf V_π:

$$i \prec j :\Longleftrightarrow \ (i < j) \ \wedge \ (\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j))$$

- $\omega(G_\pi^\complement)$ ist Länge der längsten aufsteigenden Teilsequenz in π.
- Bekannt: In Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ sind berechenbar:
  - $\chi(G_\pi^\complement) = \omega(G_\pi^\complement)$
  - Minimale Färbung von $G_\pi^\complement$

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks mit Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(G_\pi^\complement) \leq m$.

- $G_\pi^\complement$ ist Vergleichbarkeitsgraph folgender Partialordnung auf V_π:

$$i \prec j :\iff (i < j) \;\wedge\; (\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j))$$

- $\omega(G_\pi^\complement)$ ist Länge der längsten aufsteigenden Teilsequenz in π.
- Bekannt: In Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n)$ sind berechenbar:
  - $\chi(G_\pi^\complement) = \omega(G_\pi^\complement)$
  - Minimale Färbung von $G_\pi^\complement$
- Zahl benötigter Stacks und ent. Operationsfolge zum Erzeugen von Permutation π effizient berechenbar.

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks **ohne** Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks **ohne** Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Falls $i < j < k$ und $\pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$

  $\Rightarrow i, j$ befinden sich gleichzeitig in den Stacks.

  $\Rightarrow i, j$ laufen nicht über denselben Stack.

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks **ohne** Mitternachtseinschränkung. Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Falls $i < j < k$ und $\pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$

  $\Rightarrow i, j$ befinden sich gleichzeitig in den Stacks.

  $\Rightarrow i, j$ laufen nicht über denselben Stack.
- Definiere Konfliktgraph $H_\pi := (V_\pi, E_\pi)$ mit

$$V_\pi = \{1, ..., n\}$$
$$E_\pi = \left\{\{i,j\} : \exists k : 1 \leq i < j < k \leq n : \pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)\right\}$$

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks **ohne** Mitternachtseinschränkung.
  Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Falls $i < j < k$ und $\pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$

  $\Rightarrow i, j$ befinden sich gleichzeitig in den Stacks.

  $\Rightarrow i, j$ laufen nicht über denselben Stack.
- Definiere Konfliktgraph $H_\pi := (V_\pi, E_\pi)$ mit

$$V_\pi = \{1, ..., n\}$$
$$E_\pi = \big\{\{i, j\} : \exists k : 1 \leq i < j < k \leq n : \pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)\big\}$$

- m-Färbbarkeit von H_π ist notwendig, damit π erzeugt werden kann.

m parallele Stacks

- Betrachten m parallele Stacks **ohne** Mitternachtseinschränkung.
  Gegeben: Permutation $\pi \in S_n$. Ist π erzeugbar?
- Falls $i < j < k$ und $\pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$
  $\Rightarrow i, j$ befinden sich gleichzeitig in den Stacks.
  $\Rightarrow i, j$ laufen nicht über denselben Stack.
- Definiere Konfliktgraph $H_\pi := (V_\pi, E_\pi)$ mit

$$V_\pi = \{1, ..., n\}$$
$$E_\pi = \left\{\{i, j\} : \exists k : 1 \leq i < j < k \leq n : \pi^{-1}(k) < \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)\right\}$$

- m-Färbbarkeit von H_π ist notwendig, damit π erzeugt werden kann.

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(H_\pi) \leq m$.

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(H_\pi) \leq m$.

- Obere Schranke: $\chi(H_\pi) \leq \chi(G_\pi^\complement)$ (Mitternachtseinschränkung)

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(H_\pi) \leq m$.

- Obere Schranke: $\chi(H_\pi) \leq \chi(G_\pi^{\complement})$ (Mitternachtseinschränkung)
- Die Graphenklasse $\{H_\pi : \pi \in S_n\}$ entspricht genau den Überlappungsgraphen / Kreisgraphen (Even und Itai, 1971).

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(H_\pi) \leq m$.

- Obere Schranke: $\chi(H_\pi) \leq \chi(G_\pi^\complement)$ (Mitternachtseinschränkung)
- Die Graphenklasse $\{H_\pi : \pi \in S_n\}$ entspricht genau den Überlappungsgraphen / Kreisgraphen (Even und Itai, 1971).
- $\chi(G)$ für Kreisgraphen zu bestimmen, ist NP-schwer (Unger, 1988).

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(H_\pi) \leq m$.

- Obere Schranke: $\chi(H_\pi) \leq \chi(G_\pi^\complement)$ (Mitternachtseinschränkung)
- Die Graphenklasse $\{H_\pi : \pi \in S_n\}$ entspricht genau den Überlappungsgraphen / Kreisgraphen (Even und Itai, 1971).
- $\chi(G)$ für Kreisgraphen zu bestimmen, ist NP-schwer (Unger, 1988).
- Für jeden Kreisgraph $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \leq \omega(G) \cdot \log(|V|)$ (Černý, 2007).

m parallele Stacks

Theorem (Even und Itai, 1971)

Permutation $\pi \in S_n$ kann genau dann in m parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden, wenn $\chi(H_\pi) \leq m$.

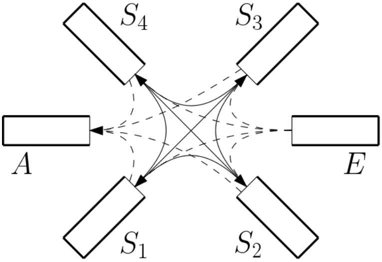
- Obere Schranke: $\chi(H_\pi) \leq \chi(G_\pi^\complement)$ (Mitternachtseinschränkung)
- Die Graphenklasse $\{H_\pi : \pi \in S_n\}$ entspricht genau den Überlappungsgraphen / Kreisgraphen (Even und Itai, 1971).
- $\chi(G)$ für Kreisgraphen zu bestimmen, ist NP-schwer (Unger, 1988).
- Für jeden Kreisgraph $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \leq \omega(G) \cdot \log(|V|)$ (Černý, 2007).
- Daraus kann man folgern:

Theorem

Permutation $\pi \in S_n$, $r \geq 1$. Gibt es keine Elemente $i_1 < i_2 < ... < i_{r+2}$ mit $\pi^{-1}(i_{r+2}) < \pi^{-1}(i_1) < \pi^{-1}(i_1) < ... < \pi^{-1}(i_{r+1})$, so kann π in $r \cdot \log n$ parallelen Stacks ohne Mitternachtseinschränkung erzeugt werden.

m verbundene Stacks

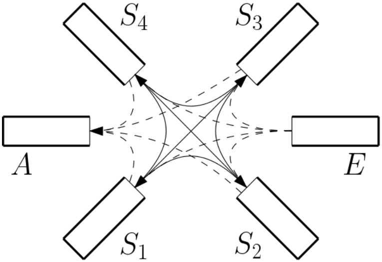
- Netzwerk bestehend aus m parallelen, **verbundenen** Stacks:



Beispiel für $m = 4$

m verbundene Stacks

- Netzwerk bestehend aus *m* parallelen, **verbundenen** Stacks:

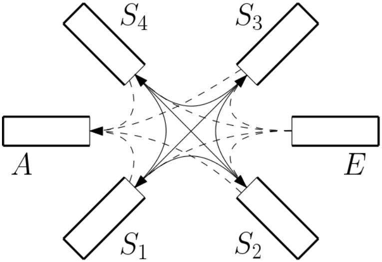


Beispiel für $m = 4$

- Bidirektionale Kanten zwischen Stacks

m verbundene Stacks

- Netzwerk bestehend aus m parallelen, **verbundenen** Stacks:

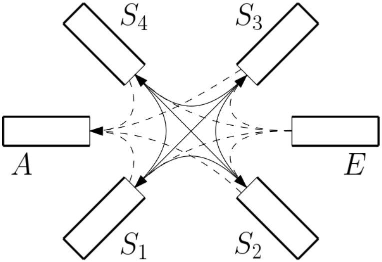


Beispiel für $m = 4$

- Bidirektionale Kanten zwischen Stacks
- Zyklisches Netzwerk: WorstCase-Anzahl Operationen zum Sortieren?

m verbundene Stacks

- Netzwerk bestehend aus m parallelen, **verbundenen** Stacks:



Beispiel für $m = 4$

- Bidirektionale Kanten zwischen Stacks
- Zyklisches Netzwerk: WorstCase-Anzahl Operationen zum Sortieren?
- Für asymptotische Untersuchung betrachte nur Permutationen $\pi \in S_n$ mit $\pi(n) = 1$ (ähnlich zu Mitternachtseinschränkung)

m verbundene Stacks

Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

m verbundene Stacks

Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

- Beweisbestandteile:
  - Teile-und-herrsche-Ansatz für obere Schranke $\mathcal{O}(n \log n)$
  - Abzählargument für untere Schranke $\Omega(n \log n)$

m verbundene Stacks

Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

- Beweisbestandteile:
  - Teile-und-herrsche-Ansatz für obere Schranke $\mathcal{O}(n \log n)$
  - Abzählargument für untere Schranke $\Omega(n \log n)$
- WorstCase im Fall $m = 2$?

m verbundene Stacks

Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

- Beweisbestandteile:
  - Teile-und-herrsche-Ansatz für obere Schranke $\mathcal{O}(n \log n)$
  - Abzählargument für untere Schranke $\Omega(n \log n)$
- WorstCase im Fall $m = 2$?
  - Obere Schranke: $\mathcal{O}(n^2)$

m verbundene Stacks

Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

- Beweisbestandteile:
  - Teile-und-herrsche-Ansatz für obere Schranke $\mathcal{O}(n \log n)$
  - Abzählargument für untere Schranke $\Omega(n \log n)$
- WorstCase im Fall $m = 2$?
  - Obere Schranke: $\mathcal{O}(n^2)$
  - Untere Schranke: $\Omega(n^{2-\epsilon})$für beliebiges $\epsilon > 0$ (Felsner und Pergel, 2008)

m verbundene Stacks

Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

- Beweisbestandteile:
  - Teile-und-herrsche-Ansatz für obere Schranke $\mathcal{O}(n \log n)$
  - Abzählargument für untere Schranke $\Omega(n \log n)$
- WorstCase im Fall $m = 2$?
  - Obere Schranke: $\mathcal{O}(n^2)$
  - Untere Schranke: $\Omega(n^{2-\epsilon})$für beliebiges $\epsilon > 0$ (Felsner und Pergel, 2008)
  - Offene Frage: WorstCase in $o(n^2)$?

m verbundene Stacks

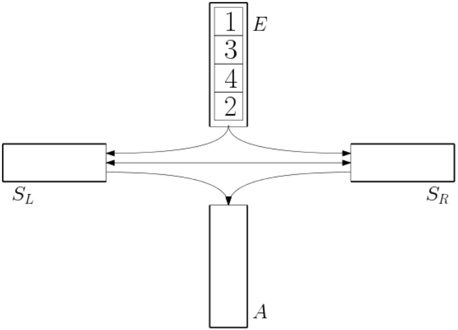
Theorem (Felsner und Pergel, 2008)

Zum Sortieren von $\pi \in S_n$ werden mit $m > 2$ parallel verbundenen Stacks im WorstCase $\Theta(n \log n)$ Operationen benötigt.

- Beweisbestandteile:
  - Teile-und-herrsche-Ansatz für obere Schranke $\mathcal{O}(n \log n)$
  - Abzählargument für untere Schranke $\Omega(n \log n)$
- WorstCase im Fall $m = 2$?
  - Obere Schranke: $\mathcal{O}(n^2)$
  - Untere Schranke: $\Omega(n^{2-\epsilon})$für beliebiges $\epsilon > 0$ (Felsner und Pergel, 2008)
  - Offene Frage: WorstCase in $o(n^2)$?
  - Außerdem: Welche Permutationen sind aufwändig? Wie findet man „gute“ Operationsfolge?

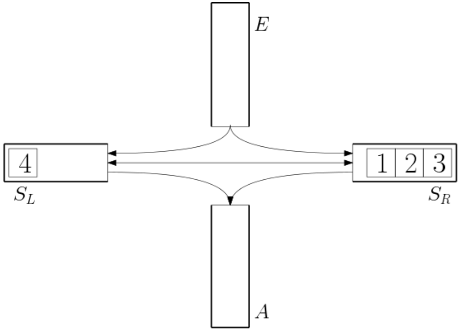
2 verbundene Stacks

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.



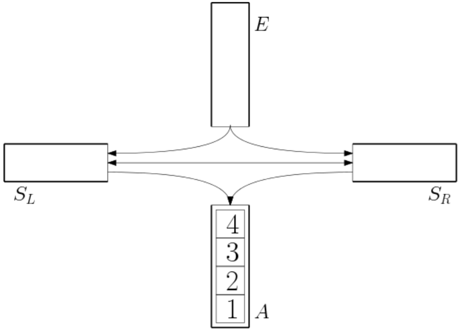
2 verbundene Stacks

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.



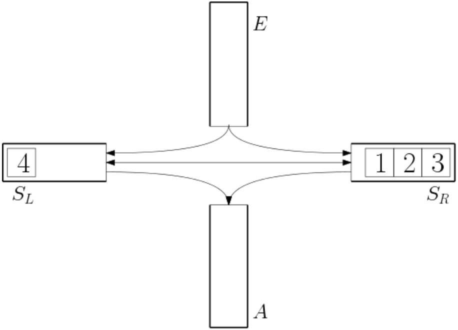
2 verbundene Stacks

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.



2 verbundene Stacks

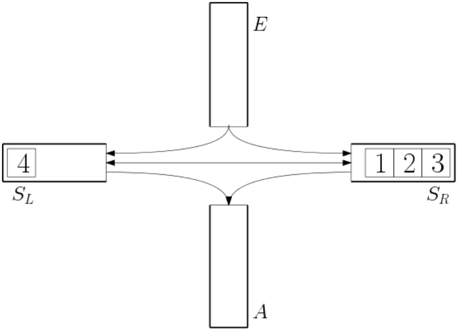
- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.



- *Mitternachtspermutation* $\tau \in S_n$: Reihenfolge, wenn alle Elemente in den Stacks sind. Im Beispiel: $\tau = [4, 1, 2, 3]$.

2 verbundene Stacks

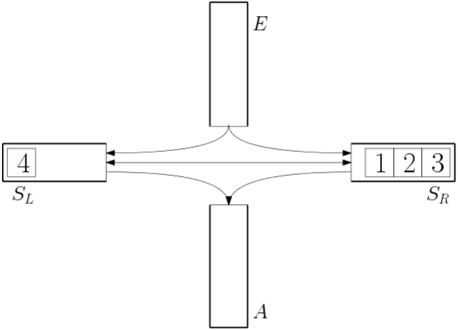
- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.



- *Mitternachtspermutation* $\tau \in S_n$: Reihenfolge, wenn alle Elemente in den Stacks sind. Im Beispiel: $\tau = [4, 1, 2, 3]$.
- Mitternachtspermutation bestimmt Operationsfolge (fast) eindeutig.

2 verbundene Stacks

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.



- *Mitternachtspermutation* $\tau \in S_n$: Reihenfolge, wenn alle Elemente in den Stacks sind. Im Beispiel: $\tau = [4, 1, 2, 3]$.
- Mitternachtspermutation bestimmt Operationsfolge (fast) eindeutig.
- Ziel: Finde bzgl. benötigter Operationen optimale Mitternachtspermutation.

2 verbundene Stacks

Definition

Für $[\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)] \in S_n$ definiere

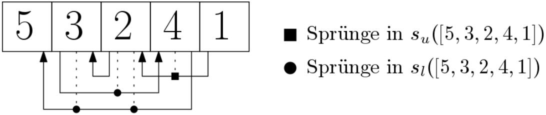
- $s_l(\sigma) :=$ Zahl der von 1 nach 2, 2 nach 3, usw... übersprungener kleinerer Elemente in σ.
- $s_u(\sigma) :=$ Zahl der von 1 nach 2, 2 nach 3, usw... übersprungener größerer Elemente in σ.
- $s(\sigma) := s_l(\sigma) + s_u(\sigma)$

2 verbundene Stacks

Definition

Für $[\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)] \in S_n$ definiere

- $s_l(\sigma) :=$ Zahl der von 1 nach 2, 2 nach 3, usw... übersprungener kleinerer Elemente in σ.
- $s_u(\sigma) :=$ Zahl der von 1 nach 2, 2 nach 3, usw... übersprungener größerer Elemente in σ.
- $s(\sigma) := s_l(\sigma) + s_u(\sigma)$



Beispiel: Beiträge von $s_l(\sigma)$ und $s_u(\sigma)$ mit $\sigma = [5,3,2,4,1]$
$s_l(\sigma) = 3, s_u(\sigma) = 1, s(\sigma) = 4$

2 verbundene Stacks

Lemma

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks über Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ werden genau

$$s_l(\pi^{-1} \circ \tau) + s_u(\tau) + 2n$$

Operationen benötigt.

2 verbundene Stacks

Lemma

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks über Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ werden genau

$$s_l(\pi^{-1} \circ \tau) + s_u(\tau) + 2n$$

Operationen benötigt.

Beweisidee:

- n Operationen zum *Einlesen* der Elemente von E nach S_L und S_R.

2 verbundene Stacks

Lemma

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks über Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ werden genau

$$s_l(\pi^{-1} \circ \tau) + s_u(\tau) + 2n$$

Operationen benötigt.

Beweisidee:

- n Operationen zum *Einlesen* der Elemente von E nach S_L und S_R.
- n Operationen zum *Ausgeben* der Elemente von S_L und S_R nach A.

2 verbundene Stacks

Lemma

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks über Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ werden genau

$$s_l(\pi^{-1} \circ \tau) + s_u(\tau) + 2n$$

Operationen benötigt.

Beweisidee:

- n Operationen zum *Einlesen* der Elemente von E nach S_L und S_R.
- n Operationen zum *Ausgeben* der Elemente von S_L und S_R nach A.
- $s_u(\tau)$ Schiebeoperationen zwischen S_L und S_R beim Ausgeben.

2 verbundene Stacks

Lemma

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks über Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ werden genau

$$s_l(\pi^{-1} \circ \tau) + s_u(\tau) + 2n$$

Operationen benötigt.

Beweisidee:

- n Operationen zum *Einlesen* der Elemente von E nach S_L und S_R.
- n Operationen zum *Ausgeben* der Elemente von S_L und S_R nach A.
- $s_u(\tau)$ Schiebeoperationen zwischen S_L und S_R beim Ausgeben.
- $s_l(\pi^{-1} \circ \tau)$ Schiebeoperationen zwischen S_L und S_R beim Einlesen.

2 verbundene Stacks

Lemma (Clark, 2005)

Für zufälliges $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[s(\sigma)] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

2 verbundene Stacks

Lemma (Clark, 2005)

Für zufälliges $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[s(\sigma)] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

Theorem

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks werden mit uniform zufälliger Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ im Erwartungswert

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3} + 2n$$

Operationen benötigt.

2 verbundene Stacks

Lemma (Clark, 2005)

Für zufälliges $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[s(\sigma)] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

Theorem

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks werden mit uniform zufälliger Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ im Erwartungswert

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3} + 2n$$

Operationen benötigt.

- Interessant: Erwartungswert unabhängig von π.

2 verbundene Stacks

Lemma (Clark, 2005)

Für zufälliges $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[s(\sigma)] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

Theorem

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks werden mit uniform zufälliger Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ im Erwartungswert

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3} + 2n$$

Operationen benötigt.

- Interessant: Erwartungswert unabhängig von π.
- Man findet jedoch leicht MP. τ mit höchstens $\sim \frac{n^2}{4}$ Operationen.

2 verbundene Stacks

Theorem

Sei $\pi \in S_n$, $\pi(n) = 1$. Zum Sortieren von π in zwei verbundenen Stacks werden mit uniform zufälliger Mitternachtspermutation $\tau \in S_n$ im Erwartungswert

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3} + 2n$$

Operationen benötigt.

Beweis: $\tau \in S_n$ uniform zufällig. Erwartete Anzahl Operationen:

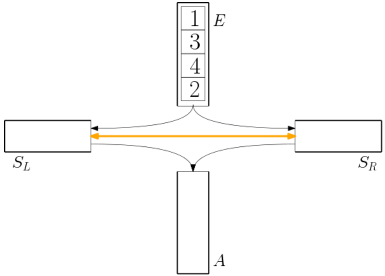
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[s_l(\pi^{-1} \circ \tau) + s_u(\tau) + 2n] &= \mathbb{E}[s_l(\pi^{-1} \circ \tau)] + \mathbb{E}[s_u(\tau)] + 2n \\
&= \mathbb{E}[s_l(\tau)] + \mathbb{E}[s_u(\tau)] + 2n \\
&= \mathbb{E}[s_l(\tau) + s_u(\tau)] + 2n \\
&= \mathbb{E}[s(\tau)] + 2n \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{3} + 2n \qquad \square
\end{aligned}$$

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.

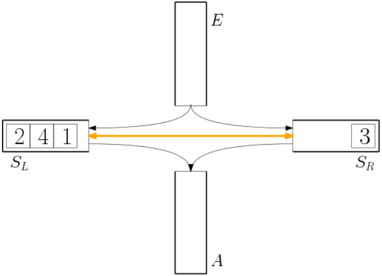
2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.
- **Einschränkung**: Dürfen erst Elemente zwischen S_L und S_R verschieben, nachdem alle Elemente eingelesen wurden.



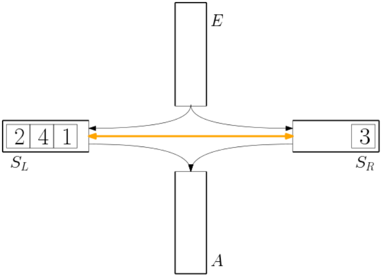
2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.
- **Einschränkung**: Dürfen erst Elemente zwischen S_L und S_R verschieben, nachdem alle Elemente eingelesen wurden.



2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Betrachte $\pi \in S_n, \pi(n) = 1$, sortiere π über 2 verbundene Stacks.
- **Einschränkung**: Dürfen erst Elemente zwischen S_L und S_R verschieben, nachdem alle Elemente eingelesen wurden.



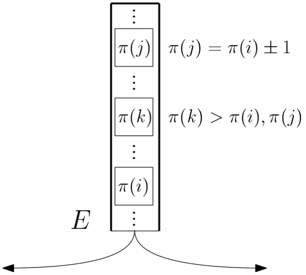
- Entscheide beim Einlesen der n Elemente nur, ob Element auf S_L oder S_R kommt.

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Analysiere $s_u(\tau)$ in Abhängigkeit der Aufteilung auf S_L und S_R beim Einlesen.

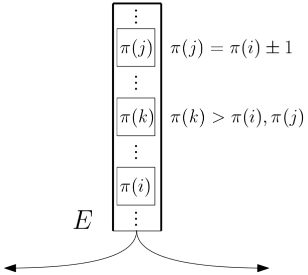
2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Analysiere $s_u(\tau)$ in Abhängigkeit der Aufteilung auf S_L und S_R beim Einlesen.
- Betrachte Elemente $\pi(i), \pi(j), \pi(k)$ mit
  - $i < k < j$
  - $|\pi(i) - \pi(j)| = 1$
  - $\pi(k) > \pi(i), \pi(j)$



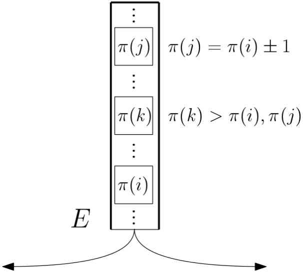
2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- Analysiere $s_u(\tau)$ in Abhängigkeit der Aufteilung auf S_L und S_R beim Einlesen.
- Betrachte Elemente $\pi(i), \pi(j), \pi(k)$ mit
  - $i < k < j$
  - $|\pi(i) - \pi(j)| = 1$
  - $\pi(k) > \pi(i), \pi(j)$



- $\pi(k)$ gerät in τ zwischen $\pi(i)$ und $\pi(j)$ genau dann wenn $\pi(i)$ und $\pi(k)$ beim Einlesen auf selben Stack gelegt werden.

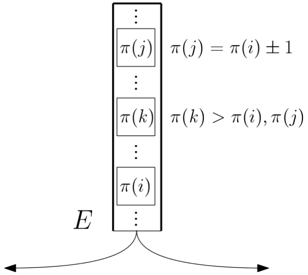
- Analysiere $s_u(\tau)$ in Abhängigkeit der Aufteilung auf S_L und S_R beim Einlesen.
- Betrachte Elemente $\pi(i), \pi(j), \pi(k)$ mit
  - $i < k < j$
  - $|\pi(i) - \pi(j)| = 1$
  - $\pi(k) > \pi(i), \pi(j)$



- $\pi(k)$ gerät in τ zwischen $\pi(i)$ und $\pi(j)$ genau dann wenn $\pi(i)$ und $\pi(k)$ beim Einlesen auf selben Stack gelegt werden.
- In diesem Fall: Beitrag zu $s_u(\tau)$.

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

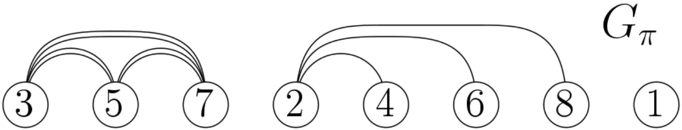
- Analysiere $s_u(\tau)$ in Abhängigkeit der Aufteilung auf S_L und S_R beim Einlesen.
- Betrachte Elemente $\pi(i), \pi(j), \pi(k)$ mit
  - $i < k < j$
  - $|\pi(i) - \pi(j)| = 1$
  - $\pi(k) > \pi(i), \pi(j)$



- $\pi(k)$ gerät in τ zwischen $\pi(i)$ und $\pi(j)$ genau dann wenn $\pi(i)$ und $\pi(k)$ beim Einlesen auf selben Stack gelegt werden.
- In diesem Fall: Beitrag zu $s_u(\tau)$.
- Minimieren dieser Beiträge: MaxCut-Problem auf Graphen $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ mit $V_\pi = \{\pi(1), ..., \pi(n)\}$ und Paaren $\{\pi(i), \pi(k)\}$ wie oben als Kanten E_π (Mehrfach für verschiedene zug. $\pi(j)$).

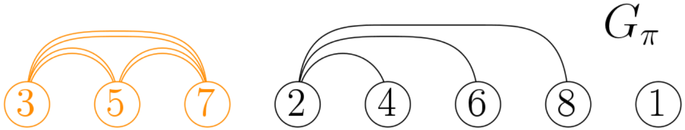
2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- **Beispiel:** $\pi = [3, 5, 7, 2, 4, 6, 8, 1]$



2 verbundene Stacks mit Einschränkung

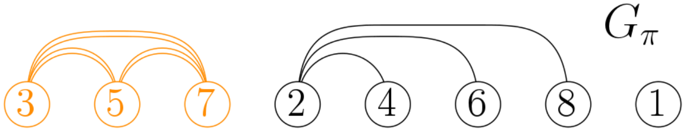
- **Beispiel:** $\pi = [3, 5, 7, 2, 4, 6, 8, 1]$



- Knoten 3,5,7 bilden Clique.

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

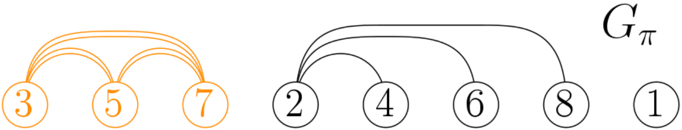
- **Beispiel:** $\pi = [3, 5, 7, 2, 4, 6, 8, 1]$



- Knoten 3,5,7 bilden Clique.
- Verallgemeinerbar: Permutation $\pi \in S_{2n}$ s.d. G_π Clique der Größe $n - 1$ enthält.

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

- **Beispiel:** $\pi = [3, 5, 7, 2, 4, 6, 8, 1]$



- Knoten 3,5,7 bilden Clique.
- Verallgemeinerbar: Permutation $\pi \in S_{2n}$ s.d. G_π Clique der Größe $n-1$ enthält.
- $s_u(\pi) \in \Omega(n^2)$, d.h. quadratisch viele Operationen.

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

Theorem

- Sei N ein Weichennetzwerk bestehend aus 2 verbundenen parallelen Stacks für das man zusätzlich fordert, höchstens $c \cdot n$ S_L-S_R-Schiebeoperationen auszuführen, **bevor** alle Elemente eingelesen sind, wobei $c < \frac{1}{2}$. Dann werden im WorstCase zum Sortieren $\Theta(n^2)$ Operationen benötigt.

2 verbundene Stacks mit Einschränkung

Theorem

- Sei N ein Weichennetzwerk bestehend aus 2 verbundenen parallelen Stacks für das man zusätzlich fordert, höchstens $c \cdot n$ S_L-S_R-Schiebeoperationen auszuführen, **bevor** alle Elemente eingelesen sind, wobei $c < \frac{1}{2}$. Dann werden im WorstCase zum Sortieren $\Theta(n^2)$ Operationen benötigt.
- Selbiges gilt, wenn man stattdessen zusätzlich fordert, höchstens $c \cdot n$ S_L-S_R-Schiebeoperationen auszuführen, **nachdem** alle Elemente eingelesen sind, wobei $c < \frac{1}{2}$.

Quellen

Im Vortrag verwendete Quellen:

- Robert Tarjan, *Sorting using networks of queues and stacks*, JACM 19 (1972)
- Shimon Even und Alon Itai, *Queues, stacks and graphs*, Theory of Machines and Computation, 1971, pp. 71-86
- Walter Unger, *On the k-colouring of circle-graphs*, LNCS, vol. 294, 1988, pp. 61-72
- Jacub Černý, *Colouring circle graphs*, ENDM, vol. 29, 2007, pp. 457-461
- Stefan Felsner und Martin Pergel, *The complexity of sorting in networks of stacks and queues*, LNCS, vol. 5193, 2008, pp. 417-429

Bachelorarbeit enthält weitere im Vortrag nicht genannte Quellen.
Bildquellen: Siehe nächste Folie.

Bildquellen

- Rangierbahnhof: Tobias Rad [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)]
- Containerterminal: Wikipedia: User Alchemist-hp [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)]