

Optimale Regularisierungs-Kerne für die Inversion der sphärischen Radon-Transformation

Michael Quellmalz

Technische Universität Chemnitz

April 2014

Definition (sphärische Radontransformation)

Für eine Funktion $f \in C(\mathbb{S}^2)$ ist die sphärische Radon-Transformation definiert durch

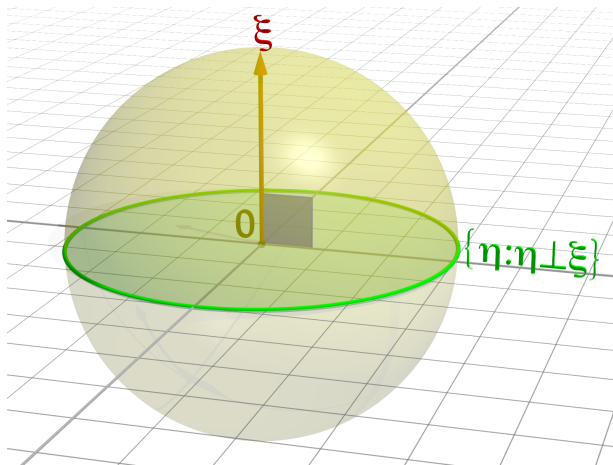
$$Rf(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\xi^\perp} f(\eta) \, d\eta, \quad \xi \in \mathbb{S}^2.$$

Das Integral erfolgt bezüglich der Bogenlänge auf dem Großkreis

$$\xi^\perp := \left\{ \eta \in \mathbb{S}^2 : \xi \cdot \eta = 0 \right\},$$

der senkrecht zu $\xi \in \mathbb{S}^2$ ist.

Die sphärische Radon-Transformation



$$Rf(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\xi^\perp} f(\eta) \, d\eta, \quad \xi \in \mathbb{S}^2$$

Kugelflächenfunktionen

- Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ lässt sich als Fourierreihe bezüglich der Kugelflächenfunktionen $Y_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = -n, \dots, n$ Fourierreihe schreiben:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_{n,k} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(n, k) := \int_{\mathbb{S}^2} f(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} d\xi$$

Funk-Hecke-Formel

Sei $\psi \in L^1[-1, 1]$ und P_n das n -te Legendre-Polynom. Dann gilt

$$\psi * Y_n(\xi) := \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\xi \cdot \eta) Y_{n,k}(\eta) d\eta = \hat{\psi}(n) Y_{n,k}(\xi)$$

$$\text{mit} \quad \hat{\psi}(n) = 2\pi \int_{-1}^1 \psi(t) P_n(t) dt$$

Kugelflächenfunktionen

- Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ lässt sich als Fourierreihe bezüglich der Kugelflächenfunktionen $Y_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k = -n, \dots, n$ Fourierreihe schreiben:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_{n,k} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(n, k) := \int_{\mathbb{S}^2} f(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} \, d\xi$$

Funk-Hecke-Formel

Sei $\psi \in L^1[-1, 1]$ und P_n das n -te Legendre-Polynom. Dann gilt

$$\psi * Y_n(\xi) := \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\xi \cdot \eta) Y_{n,k}(\eta) \, d\eta = \hat{\psi}(n) Y_{n,k}(\xi)$$

$$\text{mit} \quad \hat{\psi}(n) = 2\pi \int_{-1}^1 \psi(t) P_n(t) \, dt$$

Singulärwertzerlegung der Radon-Transformation

- Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ gilt die Darstellung

$$Rf = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_{n,k}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{(n-1)!!}{n!!} & : n \text{ gerade} \\ 0 & : n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

- Mit der Stirling-Formel zeigt man für gerade n

$$|\lambda_n| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Singulärwertzerlegung der Radon-Transformation

- Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ gilt die Darstellung

$$Rf = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_{n,k}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{(n-1)!!}{n!!} & : n \text{ gerade} \\ 0 & : n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

- Mit der Stirling-Formel zeigt man für gerade n

$$|\lambda_n| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

- Für $s \geq 0$ definieren wir den *Sobolev-Raum*

$$H_e^s(\mathbb{S}^2) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}^2) : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} |\hat{f}(n, k)|^2}_{=: \|f\|_{H^s}^2} < \infty \right\}$$

- Der Sobolev-Raum gerader Funktionen ist

$$H_e^s(\mathbb{S}^2) := \left\{ f \in H^s(\mathbb{S}^2) : f(\xi) = f(-\xi) \text{ fast überall} \right\}$$

- Die Radontransformation

$$R : L_e^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

ist bijektiv, stetig und offen.

- Für $s \geq 0$ definieren wir den *Sobolev-Raum*

$$H_e^s(\mathbb{S}^2) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}^2) : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} |\hat{f}(n, k)|^2}_{=: \|f\|_{H^s}^2} < \infty \right\}$$

- Der Sobolev-Raum gerader Funktionen ist

$$H_e^s(\mathbb{S}^2) := \left\{ f \in H^s(\mathbb{S}^2) : f(\xi) = f(-\xi) \text{ fast überall} \right\}$$

- Die Radontransformation

$$R : L_e^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

ist bijektiv, stetig und offen.

- Für $s \geq 0$ definieren wir den *Sobolev-Raum*

$$H_e^s(\mathbb{S}^2) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}^2) : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2s} |\hat{f}(n, k)|^2}_{=: \|f\|_{H^s}^2} < \infty \right\}$$

- Der Sobolev-Raum gerader Funktionen ist

$$H_e^s(\mathbb{S}^2) := \left\{ f \in H^s(\mathbb{S}^2) : f(\xi) = f(-\xi) \text{ fast überall} \right\}$$

- Die Radontransformation

$$R : L_e^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_e^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$$

ist bijektiv, stetig und offen.

Die Inversion der sphärischen Radon-Transformation

- Gegeben: eine Funktion $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Einfacher Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g : $\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} d\xi$
- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f : $\hat{f}(n, k) = \frac{1}{\lambda_n} \hat{g}(n, k)$
- 3 Berechne die Funktion $f = \sum_{n,k} \hat{f}(n, k) Y_{n,k}$

Problem

Dieser Algorithmus reagiert sehr empfindlich auf kleine Störungen in den Daten g .

⇒ Deshalb: Regularisierung

Die Inversion der sphärischen Radon-Transformation

- Gegeben: eine Funktion $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Einfacher Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g : $\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} d\xi$
- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f : $\hat{f}(n, k) = \frac{1}{\lambda_n} \hat{g}(n, k)$
- 3 Berechne die Funktion $f = \sum_{n,k} \hat{f}(n, k) Y_{n,k}$

Problem

Dieser Algorithmus reagiert sehr empfindlich auf kleine Störungen in den Daten g .

⇒ Deshalb: Regularisierung

Die Inversion der sphärischen Radon-Transformation

- Gegeben: eine Funktion $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Einfacher Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g : $\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} d\xi$
- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f : $\hat{f}(n, k) = \frac{1}{\lambda_n} \hat{g}(n, k)$
- 3 Berechne die Funktion $f = \sum_{n,k} \hat{f}(n, k) Y_{n,k}$

Problem

Dieser Algorithmus reagiert sehr empfindlich auf kleine Störungen in den Daten g .

⇒ Deshalb: Regularisierung

Die Inversion der sphärischen Radon-Transformation

- Gegeben: eine Funktion $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Einfacher Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g : $\hat{g}(n, k) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} d\xi$
- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f : $\hat{f}(n, k) = \frac{1}{\lambda_n} \hat{g}(n, k)$
- 3 Berechne die Funktion $f = \sum_{n,k} \hat{f}(n, k) Y_{n,k}$

Problem

Dieser Algorithmus reagiert sehr empfindlich auf kleine Störungen in den Daten g .

⇒ Deshalb: Regularisierung

Mollifier-Ansatz

- Gegeben: $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Mollifier-Ansatz

Wir berechnen für den Regularisierungskern $\psi \in L^1[-1, 1]$ die regularisierte Lösung

$$\psi * f(\eta) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\eta \cdot \xi) f(\xi) \, d\xi, \quad \eta \in \mathbb{S}^2$$

- Der Rekonstruktionskern $\Psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion mit $R\Psi = \psi$.
- Für $\eta \in \mathbb{S}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \psi * f(\eta) &= \langle f, \psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle f, R\Psi(\eta \cdot \circ) \rangle \\ &= \langle Rf, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle g, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \Psi * g(\eta). \end{aligned}$$

Mollifier-Ansatz

- Gegeben: $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Mollifier-Ansatz

Wir berechnen für den Regularisierungskern $\psi \in L^1[-1, 1]$ die regularisierte Lösung

$$\psi * f(\eta) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\eta \cdot \xi) f(\xi) \, d\xi, \quad \eta \in \mathbb{S}^2$$

- Der Rekonstruktionskern $\Psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion mit $R\Psi = \psi$.
- Für $\eta \in \mathbb{S}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \psi * f(\eta) &= \langle f, \psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle f, R\Psi(\eta \cdot \circ) \rangle \\ &= \langle Rf, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle g, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \Psi * g(\eta). \end{aligned}$$

Mollifier-Ansatz

- Gegeben: $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Mollifier-Ansatz

Wir berechnen für den Regularisierungskern $\psi \in L^1[-1, 1]$ die regularisierte Lösung

$$\psi * f(\eta) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\eta \cdot \xi) f(\xi) d\xi, \quad \eta \in \mathbb{S}^2$$

- Der Rekonstruktionskern $\Psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion mit $R\Psi = \psi$.
- Für $\eta \in \mathbb{S}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \psi * f(\eta) &= \langle f, \psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle f, R\Psi(\eta \cdot \circ) \rangle \\ &= \langle Rf, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle g, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \Psi * g(\eta). \end{aligned}$$

Mollifier-Ansatz

- Gegeben: $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$

Mollifier-Ansatz

Wir berechnen für den Regularisierungskern $\psi \in L^1[-1, 1]$ die regularisierte Lösung

$$\psi * f(\eta) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi(\eta \cdot \xi) f(\xi) \, d\xi, \quad \eta \in \mathbb{S}^2$$

- Der Rekonstruktionskern $\Psi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion mit $R\Psi = \psi$.
- Für $\eta \in \mathbb{S}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \psi * f(\eta) &= \langle f, \psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle f, R\Psi(\eta \cdot \circ) \rangle \\ &= \langle Rf, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \langle g, \Psi(\eta \cdot \circ) \rangle = \Psi * g(\eta). \end{aligned}$$

Das diskrete Problem

- Gegeben: $g(\xi)$, $\xi \in \Xi$ von $g \in C(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf(\xi) = g(\xi)$
- Integral durch Quadraturformel auf Ξ ersetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) = \Psi * g(\eta) &= \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), d\xi \\ &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), \quad \eta \in \mathbb{S}^2.\end{aligned}$$

- Fourierreihe des Rekonstruktionskernes Ψ einsetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) =: f_\psi(\eta)\end{aligned}$$

Das diskrete Problem

- Gegeben: $g(\xi)$, $\xi \in \Xi$ von $g \in C(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf(\xi) = g(\xi)$
- Integral durch Quadraturformel auf Ξ ersetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) = \Psi * g(\eta) &= \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), d\xi \\ &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), \quad \eta \in \mathbb{S}^2.\end{aligned}$$

- Fourierreihe des Rekonstruktionskernes Ψ einsetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) =: f_\psi(\eta)\end{aligned}$$

Das diskrete Problem

- Gegeben: $g(\xi)$, $\xi \in \Xi$ von $g \in C(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf(\xi) = g(\xi)$
- Integral durch Quadraturformel auf Ξ ersetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) = \Psi * g(\eta) &= \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), d\xi \\ &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), \quad \eta \in \mathbb{S}^2.\end{aligned}$$

- Fourierreihe des Rekonstruktionskernes Ψ einsetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) =: f_\psi(\eta)\end{aligned}$$

Das diskrete Problem

- Gegeben: $g(\xi)$, $\xi \in \Xi$ von $g \in C(\mathbb{S}^2)$
- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf(\xi) = g(\xi)$
- Integral durch Quadraturformel auf Ξ ersetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) = \Psi * g(\eta) &= \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), d\xi \\ &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \Psi(\eta \cdot \xi), \quad \eta \in \mathbb{S}^2.\end{aligned}$$

- Fourierreihe des Rekonstruktionskernes Ψ einsetzen:

$$\begin{aligned}\psi * f(\eta) &\approx \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\Psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi}^M g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k}(\eta) =: f_\psi(\eta)\end{aligned}$$

- Definieren diskretisiertes Skalarprodukt für Punkte $\Xi \subset \mathbb{S}^2$

$$\langle f, g \rangle_{\Xi} = \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} f(\xi) \overline{g(\xi)}$$

- Hyperinterpolation* $L_{\Xi} : C(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2)$ (= Raum der Polynome vom Grad $\leq N$)

$$L_{\Xi} g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \langle g, Y_{n,k} \rangle_{\Xi} Y_{n,k}$$

- Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{\psi} &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k} \\ &= \Psi * L_{\Xi} g = \psi * R^{-1} L_{\Xi} g \end{aligned}$$

- Definieren diskretisiertes Skalarprodukt für Punkte $\Xi \subset \mathbb{S}^2$

$$\langle f, g \rangle_{\Xi} = \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} f(\xi) \overline{g(\xi)}$$

- *Hyperinterpolation* $L_{\Xi} : C(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2)$ (= Raum der Polynome vom Grad $\leq N$)

$$L_{\Xi} g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \langle g, Y_{n,k} \rangle_{\Xi} Y_{n,k}$$

- Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{\psi} &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k} \\ &= \Psi * L_{\Xi} g = \psi * R^{-1} L_{\Xi} g \end{aligned}$$

- Definieren diskretisiertes Skalarprodukt für Punkte $\Xi \subset \mathbb{S}^2$

$$\langle f, g \rangle_{\Xi} = \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} f(\xi) \overline{g(\xi)}$$

- *Hyperinterpolation* $L_{\Xi} : C(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2)$ (= Raum der Polynome vom Grad $\leq N$)

$$L_{\Xi} g = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \langle g, Y_{n,k} \rangle_{\Xi} Y_{n,k}$$

- Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{\psi} &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \hat{\psi}_n \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} g(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)} Y_{n,k} \\ &= \Psi * L_{\Xi} g = \psi * R^{-1} L_{\Xi} g \end{aligned}$$

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_{\Xi} g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_{\Xi} g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_\Xi g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_\Xi g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_\Xi g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_\Xi g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

- Haben nur gestörte Daten zur Verfügung:

$$g^\varepsilon(\xi) := g(\xi) + \varepsilon(\xi), \quad \xi \in \Xi$$

mit $\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \Xi$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2

- Gesucht: $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ mit $Rf = g$
- Berechnen

$$f_\psi^\varepsilon := \Psi * L_\Xi g^\varepsilon$$

Fragen

- Wie nah kommt f_ψ^ε der wahren Lösung f ?
- Wie wählt man den Kern ψ möglichst optimal?
- Konvergiert für wachsendes M die berechnete Funktion f_ψ^ε gegen f ?

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fourier-Koeffizienten

- $f_{\psi}^{\varepsilon} = \Psi * L_{\Xi} g^{\varepsilon}$ ist eine Zufallsvariable

Satz

Sei Ξ ein sphärisches $2N$ -Design, d.h.

$$\int_{\mathbb{S}^2} p(\xi) \, d\xi = \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} p(\xi) \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2N}.$$

Dann sind die Fourierkoeffizienten von $L_{\Xi} g^{\varepsilon}$ wieder i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $L_{\Xi} g$ und Varianz $\frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|}$.

- Der Erwartungswert der regularisierten Lösung f_{ψ}^{ε} lässt sich dann darstellen als

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f_{\psi}^{\varepsilon} &= f_{\psi} \\ \mathbb{E} \Psi * L_{\Xi} g^{\varepsilon} &= \Psi * L_{\Xi} g \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fourier-Koeffizienten

- $f_{\psi}^{\varepsilon} = \Psi * L_{\Xi} g^{\varepsilon}$ ist eine Zufallsvariable

Satz

Sei Ξ ein sphärisches $2N$ -Design, d.h.

$$\int_{\mathbb{S}^2} p(\xi) \, d\xi = \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} p(\xi) \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2N}.$$

Dann sind die Fourierkoeffizienten von $L_{\Xi} g^{\varepsilon}$ wieder i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $L_{\Xi} g$ und Varianz $\frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|}$.

- Der Erwartungswert der regularisierten Lösung f_{ψ}^{ε} lässt sich dann darstellen als

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f_{\psi}^{\varepsilon} &= f_{\psi} \\ \mathbb{E} \Psi * L_{\Xi} g^{\varepsilon} &= \Psi * L_{\Xi} g \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fourier-Koeffizienten

- $f_{\psi}^{\varepsilon} = \Psi * L_{\Xi}g^{\varepsilon}$ ist eine Zufallsvariable

Satz

Sei Ξ ein sphärisches $2N$ -Design, d.h.

$$\int_{\mathbb{S}^2} p(\xi) \, d\xi = \frac{4\pi}{|\Xi|} \sum_{\xi \in \Xi} p(\xi) \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2N}.$$

Dann sind die Fourierkoeffizienten von $L_{\Xi}g^{\varepsilon}$ wieder i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $L_{\Xi}g$ und Varianz $\frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|}$.

- Der Erwartungswert der regularisierten Lösung f_{ψ}^{ε} lässt sich dann darstellen als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f_{\psi}^{\varepsilon} &= f_{\psi} \\ \mathbb{E}\Psi * L_{\Xi}g^{\varepsilon} &= \Psi * L_{\Xi}g \end{aligned}$$

Satz

- $\psi \in L_e^1[-1, 1]$, $\sigma > 0$, $N \in \mathbb{N}$
- Ξ sphärisches $2N$ -Design
- $g^\varepsilon(\xi) \dots$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2

Für den erwarteten Fehler $\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$ gilt die Zerlegung

$$\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2 = \underbrace{\|f - f_\psi\|^2}_{\text{Bias-Term}} + \underbrace{\mathbb{E} \left\| f_\psi - f_\psi^\varepsilon \right\|^2}_{\text{Varianz-Term}}.$$

- Der erwarteten L^2 -Fehler ist $\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$.
- Betrachten für $s, S > 0$ die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$
- Wollen den Worst-Case-Fehler minimieren:

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$$

- Dazu: Minimax-Fehler

$$\inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2.$$

- Ziel: Suchen ψ , für das das obige Minimum angenommen wird

- Der erwarteten L^2 -Fehler ist $\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$.
- Betrachten für $s, S > 0$ die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$
- Wollen den Worst-Case-Fehler minimieren:

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$$

- Dazu: Minimax-Fehler

$$\inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2.$$

- Ziel: Suchen ψ , für das das obige Minimum angenommen wird

- Der erwarteten L^2 -Fehler ist $\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$.
- Betrachten für $s, S > 0$ die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$
- Wollen den Worst-Case-Fehler minimieren:

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$$

- Dazu: Minimax-Fehler

$$\inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2.$$

- Ziel: Suchen ψ , für das das obige Minimum angenommen wird

- Der erwarteten L^2 -Fehler ist $\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$.
- Betrachten für $s, S > 0$ die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$
- Wollen den Worst-Case-Fehler minimieren:

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$$

- Dazu: Minimax-Fehler

$$\inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2.$$

- Ziel: Suchen ψ , für das das obige Minimum angenommen wird

- Der erwarteten L^2 -Fehler ist $\mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$.
- Betrachten für $s, S > 0$ die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$
- Wollen den Worst-Case-Fehler minimieren:

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2$$

- Dazu: Minimax-Fehler

$$\inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2.$$

- Ziel: Suchen ψ , für das das obige Minimum angenommen wird

Satz

- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

⇒ Der Varianz-Term hat die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\| f_\psi^\varepsilon - f_\psi \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \Psi * L_\Xi (g^\varepsilon - g) \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 \mathbb{E} \left| \widehat{L_\Xi g^\varepsilon}(n, k) - \widehat{L_\Xi g}(n, k) \right|^2 \\ &= \frac{4\pi\sigma^2}{M} \sum_{n=0}^N (2n+1) \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 =: \frac{4\pi\sigma^2}{M} \|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

Satz

- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

⇒ Der Varianz-Term hat die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\| f_\psi^\varepsilon - f_\psi \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \Psi * L_\Xi (g^\varepsilon - g) \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 \mathbb{E} \left| \widehat{L_\Xi g^\varepsilon}(n, k) - \widehat{L_\Xi g}(n, k) \right|^2 \\ &= \frac{4\pi\sigma^2}{M} \sum_{n=0}^N (2n+1) \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 =: \frac{4\pi\sigma^2}{M} \|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

Satz

- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

⇒ Der Varianz-Term hat die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\| f_\psi^\varepsilon - f_\psi \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \Psi * L_\Xi (g^\varepsilon - g) \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 \mathbb{E} \left| \widehat{L_\Xi g^\varepsilon}(n, k) - \widehat{L_\Xi g}(n, k) \right|^2 \\ &= \frac{4\pi\sigma^2}{M} \sum_{n=0}^N (2n+1) \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 =: \frac{4\pi\sigma^2}{M} \|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

Satz

- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

⇒ Der Varianz-Term hat die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\| f_\psi^\varepsilon - f_\psi \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \Psi * L_\Xi (g^\varepsilon - g) \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 \mathbb{E} \left| \widehat{L_\Xi g^\varepsilon}(n, k) - \widehat{L_\Xi g}(n, k) \right|^2 \\ &= \frac{4\pi\sigma^2}{M} \sum_{n=0}^N (2n+1) \left| \hat{\Psi}(n) \right|^2 =: \frac{4\pi\sigma^2}{M} \|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

Satz

- $s > 1$, $S > 0$, $f \in H_e^s(\mathbb{S}^2)$ mit $\|f\|_{H^s} \leq S$, $N \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$
- $\psi \in L_e^1[-1, 1]$ mit $\hat{\psi}_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

Dann existiert eine positive Konstante c unabhängig von N , sodass für den Bias-Term gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_\psi\| &\leq \|f - \psi * f\| + \left\| \psi * R^{-1}(g - L_\Xi g) \right\| \\ &\leq \sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} S + c \left(N + \frac{1}{2}\right)^{1-s} S \end{aligned}$$

Satz

- $s > 1$, $S > 0$, $f \in H_e^s(\mathbb{S}^2)$ mit $\|f\|_{H^s} \leq S$, $N \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$
- $\psi \in L_e^1[-1, 1]$ mit $\hat{\psi}_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

Dann existiert eine positive Konstante c unabhängig von N , sodass für den Bias-Term gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_\psi\| &\leq \|f - \psi * f\| + \left\| \psi * R^{-1}(g - L_\Xi g) \right\| \\ &\leq \sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} S + c \left(N + \frac{1}{2}\right)^{1-s} S \end{aligned}$$

Satz

- $s > 1$, $S > 0$, $f \in H_e^s(\mathbb{S}^2)$ mit $\|f\|_{H^s} \leq S$, $N \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$
- $\psi \in L_e^1[-1, 1]$ mit $\hat{\psi}_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ und Varianz σ^2
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

Dann existiert eine positive Konstante c unabhängig von N , sodass für den Bias-Term gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_\psi\| &\leq \|f - \psi * f\| + \left\| \psi * R^{-1}(g - L_\Xi g) \right\| \\ &\leq \sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} S + c \left(N + \frac{1}{2}\right)^{1-s} S \end{aligned}$$

- Zusammengefasst gilt

$$\mathbb{E} \left\| f - f_{\psi}^{\varepsilon} \right\|^2 \leq \left(\sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} S + c \left(N + \frac{1}{2}\right)^{1-s} S \right)^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{M} \|\psi\|^2$$

Definition

Für $L \in \mathbb{R}$, $L \geq 0$ definieren wir den Kern $\psi_L \in \mathcal{P}_{[L]}(\mathbb{S}^2)$ durch

$$\psi_L := \sum_{n=0}^L \sum_{k=-n}^n \left(1 - \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{L + \frac{1}{2}} \right)^s \right) Y_{n,k}.$$

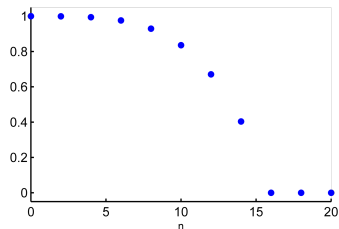
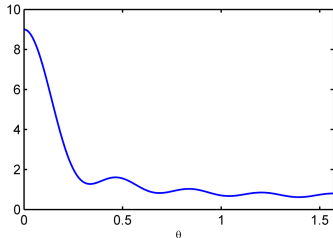


Abbildung: Kernfunktion $\psi_L(\cos \theta)$ mit $s = 4$, $L = 16$ und dessen Fourierkoeffizienten $\hat{\psi}_L(n)$

Lemma

- $\psi \in L_e^1[-1, 1]$ ein beliebiger Regularisierungskern
- $s > 1, S > 0, f \in H_e^s(\mathbb{S}^2)$ mit $\|f\|_{H^s} \leq S$
- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ Varianz $\sigma^2 > 0$
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

Dann existiert ein $L^* \geq 0$ mit

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \geq \sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \left(\frac{1 - \hat{\psi}_{L^*}(n)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} \cdot S \right)^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi_{L^*}\|^2$$

- Fehlerabschätzung nach oben

$$\mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \leq \left(\sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} S + c \left(N + \frac{1}{2}\right)^{1-s} S \right)^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi\|^2$$

Lemma

- $\psi \in L_e^1[-1, 1]$ ein beliebiger Regularisierungskern
- $s > 1, S > 0, f \in H_e^s(\mathbb{S}^2)$ mit $\|f\|_{H^s} \leq S$
- $g^\varepsilon(\xi)$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert $Rf(\xi)$ Varianz $\sigma^2 > 0$
- Ξ sphärisches $2N$ -Design

Dann existiert ein $L^* \geq 0$ mit

$$\sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \geq \sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \left(\frac{1 - \hat{\psi}_{L^*}(n)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} \cdot S \right)^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi_{L^*}\|^2$$

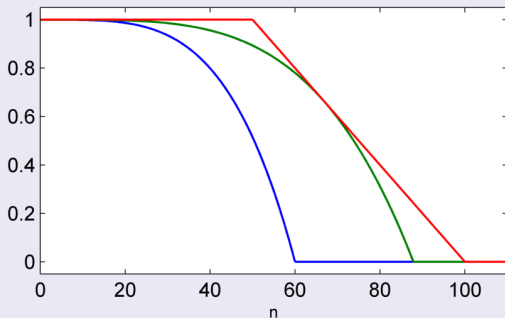
- Fehlerabschätzung nach oben

$$\mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \leq \left(\sup_{n \in 2\mathbb{N}_0} \frac{|1 - \hat{\psi}(n)|}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^s} S + c \left(N + \frac{1}{2}\right)^{1-s} S \right)^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi\|^2$$

- Sei $\psi \in L_e^1[-1, 1]$ mit $\hat{\psi}(n) = 0$ für $n > N$. Wir setzen

$$L^* := \max \left\{ L \geq 0 : \hat{\psi}_L(n) \leq |\hat{\psi}(n)| \forall n \in 2\mathbb{N}_0 \right\}$$

- Wählen $n_0 \in 2\mathbb{N}_0$ sodass $\hat{\psi}_{L^*}(n_0) = |\hat{\psi}(n_0)|$ gilt.



$\hat{\psi}(n)$ für bel. Kern (rot), und von $\hat{\psi}_{L^*}(n)$ (grün), sowie $\hat{\psi}_{60}(n)$ (blau)

- Wir definieren die Funktion

$$f_0 = \frac{S}{\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^S} Y_{n_0,0} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2) \quad \Rightarrow \|f_0\|_{H^S} = S$$

- Haben zunächst

$$\sup_{\|f\|_{H^S} < S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \geq \mathbb{E} \|f_0 - (f_0)_\psi^\varepsilon\|^2 = \|f_0 - (f_0)_\psi\|^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi\|^2$$

- Für den Bias-Term bezüglich f_0 gilt

$$\|f_0 - (f_0)_\psi\|^2 = \|f_0 - \psi * f_0\|^2 \|f_0 - \psi_{L^*} * f_0\|^2$$

- $\hat{\psi}_{L^*}(n) \leq |\hat{\psi}(n)| \quad \forall n \in 2\mathbb{N}_0 \Rightarrow \|\Psi_{L^*}\| \leq \|\Psi\|.$



- Wir definieren die Funktion

$$f_0 = \frac{S}{\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^S} Y_{n_0,0} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2) \quad \Rightarrow \|f_0\|_{H^S} = S$$

- Haben zunächst

$$\sup_{\|f\|_{H^S} < S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \geq \mathbb{E} \|f_0 - (f_0)_\psi^\varepsilon\|^2 = \|f_0 - (f_0)_\psi\|^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi\|^2$$

- Für den Bias-Term bezüglich f_0 gilt

$$\|f_0 - (f_0)_\psi\|^2 = \|f_0 - \psi * f_0\|^2 \|f_0 - \psi_{L^*} * f_0\|^2$$

- $\hat{\psi}_{L^*}(n) \leq |\hat{\psi}(n)| \quad \forall n \in 2\mathbb{N}_0 \Rightarrow \|\Psi_{L^*}\| \leq \|\Psi\|.$



- Wir definieren die Funktion

$$f_0 = \frac{S}{\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^S} Y_{n_0,0} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2) \quad \Rightarrow \|f_0\|_{H^S} = S$$

- Haben zunächst

$$\sup_{\|f\|_{H^S} < S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 \geq \mathbb{E} \|f_0 - (f_0)_\psi^\varepsilon\|^2 = \|f_0 - (f_0)_\psi\|^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi\|^2$$

- Für den Bias-Term bezüglich f_0 gilt

$$\|f_0 - (f_0)_\psi\|^2 = \|f_0 - \psi * f_0\|^2 \|f_0 - \psi_{L^*} * f_0\|^2$$

- $\hat{\psi}_{L^*}(n) \leq |\hat{\psi}(n)| \quad \forall n \in 2\mathbb{N}_0 \Rightarrow \|\Psi_{L^*}\| \leq \|\Psi\|.$



- Wir definieren die Funktion

$$f_0 = \frac{S}{\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)^s} Y_{n_0,0} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{S}^2) \quad \Rightarrow \quad \|f_0\|_{H^s} = S$$

- Haben zunächst

$$\sup_{\|f\|_{H^s} < S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2 \geq \mathbb{E} \left\| f_0 - (f_0)_\psi^\varepsilon \right\|^2 = \left\| f_0 - (f_0)_\psi \right\|^2 + \frac{4\pi\sigma^2}{|\Xi|} \|\Psi\|^2$$

- Für den Bias-Term bezüglich f_0 gilt

$$\left\| f_0 - (f_0)_\psi \right\|^2 = \|f_0 - \psi * f_0\|^2 \|f_0 - \psi_{L^*} * f_0\|^2$$

- $\hat{\psi}_{L^*}(n) \leq \left| \hat{\psi}(n) \right| \quad \forall n \in 2\mathbb{N}_0 \Rightarrow \|\Psi_{L^*}\| \leq \|\Psi\|.$



Theorem

- Seien $s > \frac{3}{2}$, $S > 0$, $N \in \mathbb{N}$ sowie $\sigma > 0$.
- $\Xi \dots$ sphärisches $2N$ -Design mit $|\Xi| \sim N^2$ Quadraturknoten

Dann ist die Kernfunktion ψ^{L^*} mit dem Regularisierungsparameter

$$L^* = \left(\frac{\left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) s}{2\pi^2 \sigma^2} S^2 |\Xi| \right)^{\frac{1}{2s+3}}$$

asymptotisch optimal für f_ψ^ε für die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$ für $N \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 N^{\frac{s}{2s+3}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_{\psi^{L^*}}^\varepsilon\|^2 N^{\frac{2s}{2s+3}}$$

Theorem

- Seien $s > \frac{3}{2}$, $S > 0$, $N \in \mathbb{N}$ sowie $\sigma > 0$.
- Ξ ... sphärisches $2N$ -Design mit $|\Xi| \sim N^2$ Quadraturknoten

Dann ist die Kernfunktion ψ^{L^*} mit dem Regularisierungsparameter

$$L^* = \left(\frac{\left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) s}{2\pi^2 \sigma^2} S^2 |\Xi| \right)^{\frac{1}{2s+3}}$$

asymptotisch optimal für f_ψ^ε für die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$ für $N \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_\psi^\varepsilon\|^2 N^{\frac{s}{2s+3}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_{\psi^{L^*}}^\varepsilon\|^2 N^{\frac{2s}{2s+3}}$$

Fehler mit optimalen Kern

Für den erwarteten Fehler der regularisierten Lösung $f_\psi^\varepsilon = \psi * R^{-1}L_\Xi g$ gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2 \cdot |\Xi|^{\frac{2s}{2s+3}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_{\psi^{L^*}}^\varepsilon \right\|^2 \cdot |\Xi|^{\frac{2s}{2s+3}} \\ &= \frac{4\pi^2 \sigma^2}{3 \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right)} \left(\frac{s \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) S^2}{2\pi^2 d_s \sigma^2} \right)^{\frac{3}{2s+3}} \\ & \quad + S^2 \left(\frac{s \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) S^2}{2\pi^2 d_s \sigma^2} \right)^{\frac{-2s}{2s+3}} \end{aligned}$$

- Konvergenzrate: $N^{\frac{-s}{2s+3}}$ bzw. $|\Xi|^{\frac{-2s}{2s+3}}$
- für $s \rightarrow \frac{3}{2}$: $\frac{-2s}{2s+3} = \frac{1}{2}$; für $s \rightarrow \infty$: $\frac{-2s}{2s+3} = 1$

Fehler mit optimalen Kern

Für den erwarteten Fehler der regularisierten Lösung $f_\psi^\varepsilon = \psi * R^{-1}L_\Xi g$ gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2 \cdot |\Xi|^{\frac{2s}{2s+3}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_{\psi^{L^*}}^\varepsilon \right\|^2 \cdot |\Xi|^{\frac{2s}{2s+3}} \\ &= \frac{4\pi^2 \sigma^2}{3 \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right)} \left(\frac{s \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) S^2}{2\pi^2 d_s \sigma^2} \right)^{\frac{3}{2s+3}} \\ & \quad + S^2 \left(\frac{s \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) S^2}{2\pi^2 d_s \sigma^2} \right)^{\frac{-2s}{2s+3}} \end{aligned}$$

- Konvergenzrate: $N^{\frac{-s}{2s+3}}$ bzw. $|\Xi|^{\frac{-2s}{2s+3}}$
- für $s \rightarrow \frac{3}{2}$: $\frac{-2s}{2s+3} = \frac{1}{2}$; für $s \rightarrow \infty$: $\frac{-2s}{2s+3} = 1$

Fehler mit optimalen Kern

Für den erwarteten Fehler der regularisierten Lösung $f_\psi^\varepsilon = \psi * R^{-1}L_\Xi g$ gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_\psi^\varepsilon \right\|^2 \cdot |\Xi|^{\frac{2s}{2s+3}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \left\| f - f_{\psi^{L^*}}^\varepsilon \right\|^2 \cdot |\Xi|^{\frac{2s}{2s+3}} \\ &= \frac{4\pi^2 \sigma^2}{3 \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right)} \left(\frac{s \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) S^2}{2\pi^2 d_s \sigma^2} \right)^{\frac{3}{2s+3}} \\ & \quad + S^2 \left(\frac{s \left(\frac{3}{s} + 1\right) \left(\frac{3}{s} + 2\right) S^2}{2\pi^2 d_s \sigma^2} \right)^{\frac{-2s}{2s+3}} \end{aligned}$$

- Konvergenzrate: $N^{\frac{-s}{2s+3}}$ bzw. $|\Xi|^{\frac{-2s}{2s+3}}$
- für $s \rightarrow \frac{3}{2}$: $\frac{-2s}{2s+3} = \frac{1}{2}$; für $s \rightarrow \infty$: $\frac{-2s}{2s+3} = 1$

Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g via NFSFT (schnelle sphärische Fouriertransformation):

$$\hat{g}_{n,k} = \sum_{\xi \in \Xi} g^\varepsilon(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)}$$

- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f :

$$\hat{f}_{n,k} = \frac{\hat{\psi}_n}{\lambda_n} \hat{g}_{n,k}, \quad n = 0, \dots, N, \quad k = -n, \dots, n$$

- 3 Berechne die Funktion f anhand von deren Fourierkoeffizienten via NFSFT:

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-n}^n \hat{f}_{n,k} Y_{n,k}(\eta)$$

Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g via NFSFT (schnelle sphärische Fouriertransformation):

$$\hat{g}_{n,k} = \sum_{\xi \in \Xi} g^\varepsilon(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)}$$

- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f :

$$\hat{f}_{n,k} = \frac{\hat{\psi}_n}{\lambda_n} \hat{g}_{n,k}, \quad n = 0, \dots, N, \quad k = -n, \dots, n$$

- 3 Berechne die Funktion f anhand von deren Fourierkoeffizienten via NFSFT:

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-n}^n \hat{f}_{n,k} Y_{n,k}(\eta)$$

Algorithmus

- 1 Berechne Fourierkoeffizienten von g via NFSFT (schnelle sphärische Fouriertransformation):

$$\hat{g}_{n,k} = \sum_{\xi \in \Xi} g^\varepsilon(\xi) \overline{Y_{n,k}(\xi)}$$

- 2 Berechne Fourierkoeffizienten von f :

$$\hat{f}_{n,k} = \frac{\hat{\psi}_n}{\lambda_n} \hat{g}_{n,k}, \quad n = 0, \dots, N, \quad k = -n, \dots, n$$

- 3 Berechne die Funktion f anhand von deren Fourierkoeffizienten via NFSFT:

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-n}^n \hat{f}_{n,k} Y_{n,k}(\eta)$$

- Zur Erinnerung: Radon-Transformation

$$Rf(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \cdot \eta = 0} f(\eta) \, d\eta, \quad \xi \in \mathbb{S}^2$$

Definition

Die *sphärische Kosinus-Transformation* einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ ist gegeben durch

$$Cf(\xi) := \int_{\mathbb{S}^2} |\xi \cdot \eta| f(\eta) \, d\eta, \quad \xi \in \mathbb{S}^2.$$

- Zur Erinnerung: Radon-Transformation

$$Rf(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \cdot \eta = 0} f(\eta) \, d\eta, \quad \xi \in \mathbb{S}^2$$

Definition

Die *sphärische Kosinus-Transformation* einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ ist gegeben durch

$$Cf(\xi) := \int_{\mathbb{S}^2} |\xi \cdot \eta| f(\eta) \, d\eta, \quad \xi \in \mathbb{S}^2.$$

Asymptotisch optimale Kerne für die sphärische Kosinus-Transformation

- Seien $s > \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 > 1.12$, $N \in \mathbb{N}$ und $S > 0$ sowie $\sigma > 0$.
- Ξ sphärisches $2N$ -Design mit $|\Xi| \sim N^2$ Quadraturknoten

Für die inverse Kosinus-Transformation ist dann die Kernfunktion ψ_{L^*} mit dem Regularisierungsparameter

$$L^* = \left(\frac{s}{14\pi d \sigma^2} S^2 |\Xi| \right)^{\frac{1}{2s+7}} \quad \text{mit } d = \frac{\pi}{28 \left(\frac{7}{s} + 1 \right) \left(\frac{7}{s} + 2 \right)}$$

asymptotisch optimal für f_{ψ}^{ε} für die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$ für $N \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_{\psi}^{\varepsilon}\|^2 N^{\frac{s}{2s+7}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_{\psi_{L^*}}^{\varepsilon}\|^2 N^{\frac{s}{2s+7}}$$

Asymptotisch optimale Kerne für die sphärische Kosinus-Transformation





- Seien $s > \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 > 1.12$, $N \in \mathbb{N}$ und $S > 0$ sowie $\sigma > 0$.
- Ξ sphärisches $2N$ -Design mit $|\Xi| \sim N^2$ Quadraturknoten

Für die inverse Kosinus-Transformation ist dann die Kernfunktion ψ_{L^*} mit dem Regularisierungsparameter

$$L^* = \left(\frac{s}{14\pi d \sigma^2} S^2 |\Xi| \right)^{\frac{1}{2s+7}} \quad \text{mit } d = \frac{\pi}{28 \left(\frac{7}{s} + 1 \right) \left(\frac{7}{s} + 2 \right)}$$

asymptotisch optimal für f_{ψ}^{ε} für die Funktionenklasse $\{f \in H_e^s(\mathbb{S}^2) : \|f\|_{H^s} \leq S\}$ für $N \rightarrow \infty$, d.h.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in L_e^1[-1,1]} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_{\psi}^{\varepsilon}\|^2 N^{\frac{s}{2s+7}} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\|f\|_{H^s} \leq S} \mathbb{E} \|f - f_{\psi_{L^*}}^{\varepsilon}\|^2 N^{\frac{s}{2s+7}}$$

-  Andriy Bondarenko, Danylo Radchenko, and Maryna Viazovska.
Optimal asymptotic bounds for spherical designs.
ArXiv e-prints, September 2010.
-  Paul Funk.
Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.
Mathematische Annalen, 74(2):278–300, June 1913.
-  Kerstin Hesse and Ian H Sloan.
Hyperinterpolation on the sphere.
Frontiers in Interpolation and Approximation, page 213, 2006.
-  Alfred Karl Louis, Martin Riplinger, Malte Spiess, and Evgeny Spodarev.
Inversion algorithms for the spherical Radon and cosine transform.
Inverse Problems, 27(3):035015, March 2011.