



How to “STACK” Mathematische Aufgaben in Moodle/ISIS

Michael Quellmalz | TU Berlin, Institut für Mathematik | Digitale Prüfungen an der TU Berlin: Erfahrungen und Hilfestellungen, 7. Juni 2021



Überblick

- ❶ Erstellung parametrisierter Aufgaben in STACK
Realisierung, Aufgabenformen und Beispiele.
- ❷ Praktischer Teil
Erstellung von Beispielaufgaben, praktische Hinweise
- ❸ Einsatzszenarien in der Lehre
Erfahrungen an der TU Berlin
- ❹ Diskussions- und Fragerunde



Erstellung parametrisierter Aufgaben in STACK

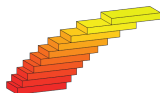


Elektronische Übungsaufgaben

Tools an der TU Berlin:



ISIS INFORMATION SYSTEM
FOR INSTRUCTORS AND STUDENTS



Lernplattform ISIS

Verwaltung / Organisation von Kursen

Bereitstellung von elektronischen Übungsaufgaben.

Moodle

Technische Basis von ISIS (open source software)

STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel)

Plugin von Moodle zur Erstellung von mathematischen Aufgaben.

Maxima

Computeralgebrasystem.



Formelvergleich-Aufgaben

Formelvergleich: Nicht nur Zahlen kommen als Lösungen in Frage, sondern auch beliebige mathematische Ausdrücke.

Beispiel: Eine gesuchte Funktion angeben.

Frage nachbessern | Frage-Tests und eingesetzte Vari

Gegeben seien die folgenden Stützstellen

x_1	x_2	x_3
1	5	9

Wie lautet das zugehörige Lagrange-Polynom zur Stützstelle x_1 ?

$\ell_1(x) =$

Hinweis: Produkte werden als $xy = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ und Quotienten als $\frac{x}{y} = \mathbf{x}/\mathbf{y}$ eingegeben.

Nach der Eingabe können Sie überprüfen, ob diese richtig interpretiert wurde.

PRÜFEN

Frage nachbessern | Frage-Tests und eingesetzte Vari

Gegeben seien die folgenden Stützstellen

x_1	x_2	x_3
3	5	7

Wie lautet das zugehörige Lagrange-Polynom zur Stützstelle x_2 ?

$\ell_2(x) =$

Hinweis: Produkte werden als $xy = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ und Quotienten als $\frac{x}{y} = \mathbf{x}/\mathbf{y}$ eingegeben.

Nach der Eingabe können Sie überprüfen, ob diese richtig interpretiert wurde.

PRÜFEN



Formelvergleich-Aufgaben

Formelvergleich: Nicht nur Zahlen kommen als Lösungen in Frage, sondern auch beliebige mathematische Ausdrücke.

Beispiel: Eine gesuchte Funktion angeben.

Frage nachbessern | Frage-Tests und eingesetzte Variablen

Gegeben seien die folgenden Stützstellen

x_1	x_2	x_3
1	5	9

Wie lautet das zugehörige Lagrange-Polynom zur Stützstelle x_1 ?

$\ell_1(x) =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:

$$\frac{(x-9) \cdot (x-5)}{32}$$

Hinweis: Produkte werden als $xy = \mathbf{x*y}$ und Quotienten als $\frac{x}{y} = \mathbf{x/y}$ eingegeben.
Nach der Eingabe können Sie überprüfen, ob diese richtig interpretiert wurde.



Elektronische Übungsaufgaben

Computeralgebra-System Maxima:

- Zufällige Auswahl von Variablen (ganze Zahl, Gleitkommazahl, Text).
- Weiterverwertung der generierten Variablen.

Gegeben seien die folgenden Stützstellen

$\backslash(x_1\backslash)$	$\backslash(x_2\backslash)$	$\backslash(x_3\backslash)$
$\{@x1@\}$	$\{@x2@\}$	$\{@x3@\}$

Wie lautet das zugehörige Lagrange-Polynom zur Stützstelle $\backslash(x_{\{k\}}\backslash)$?

$\backslash(\ell_{\{k\}}(x)=\backslash)$ [[input:ans1]] [[validation:ans1]]

Hinweis: Produkte werden als $\backslash(xy\backslash) = \mathbf{x*y}$ und Quotienten als $\backslash(\frac{x}{y}\backslash) = \mathbf{x/y}$ eingegeben.
Nach der Eingabe können Sie überprüfen, ob diese richtig interpretiert wurde.



Elektronische Übungsaufgaben

Computeralgebra-System Maxima:

- Zufällige Auswahl von Variablen (ganze Zahl, Gleitkommazahl, Text).
- Weiterverwertung der generierten Variablen.

```
xx: makelist(3*k-rand(3), k, 1, 3);  
k: rand(3)+1;  
y: makelist(charfun(i=k), i, 1, 3);  
zaehler: product(x-xx[i], i, 1, 3)/(x-xx[k]);  
nenner: zaehler, x=xx[k];  
polynom: zaehler / nenner;  
x1:xx[1];  
x2:xx[2];  
x3:xx[3];
```




Automatische Auswertung

- Auswertung des Formelvergleichs individuell anpassbar
- **Nichteindeutigkeit der Lösung**, Eingabe einer Matrix, äquivalente Umformung

Berechnen Sie die orthogonalen Polynome p_n vom Grad n bezüglich der Gewichtsfunktion $\gamma(x) = x + 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$, für die gilt

$$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) \gamma(x) dx = \delta_{m,n}.$$

$p_0(x) =$

$p_2(x) =$

Geben Sie die Lösung exakt ein.

Formeleingabe: Produkt $xy = x*y$, Quotient $\frac{x}{y} = x/y$, $x^2 = x^2$, $\sqrt{x} = \text{sqrt}(x)$

Richtige Antwort, gut gemacht!

Berechnen Sie die orthogonalen Polynome p_n vom Grad n bezüglich der Gewichtsfunktion $\gamma(x) = x + 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$, für die gilt

$$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) \gamma(x) dx = \delta_{m,n}.$$

$p_0(x) =$

$p_2(x) =$

Geben Sie die Lösung exakt ein.

Formeleingabe: Produkt $xy = x*y$, Quotient $\frac{x}{y} = x/y$, $x^2 = x^2$, $\sqrt{x} = \text{sqrt}(x)$

Richtige Antwort, gut gemacht!

Automatische Auswertung

- Auswertung des Formelvergleichs individuell anpassbar
- Nichteindeutigkeit der Lösung, **Eingabe einer Matrix**, äquivalente Umformung

Frage nachbessern | Frage-Tests und eingesetzte Varianten

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die Iterationsmatrix des Jacobiverfahrens?

$\begin{pmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{pmatrix}$

Geben Sie die Lösung exakt ein.

Formeleingabe: Produkt $xy = x*y$, Quotient $\frac{x}{y} = x/y$, $x^2 = x^2$, $\sqrt{x} = \text{sqrt}(x)$

PRÜFEN



Automatische Auswertung

- Auswertung des Formelvergleichs individuell anpassbar
- Nichteindeutigkeit der Lösung, Eingabe einer Matrix, **äquivalente Umformung**

Gegeben seien die folgenden Stützstellen

x_1	x_2	x_3
3	6	9

Wie lautet das zugehörige Lagrange-Polynom zur Stützstelle x_1 ?

$$\ell_1(x) = 1/18 \cdot x^2 - 5/6 \cdot x + 3$$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:

$$\frac{1}{18} \cdot x^2 - \frac{5}{6} \cdot x + 3$$

Hinweis: Produkte werden als $xy = x \cdot y$ und Quotienten als $\frac{x}{y} = x / y$ eingegeben.
Nach der Eingabe können Sie überprüfen, ob diese richtig interpretiert wurde.

Richtige Antwort, gut gemacht!

Gegeben seien die folgenden Stützstellen

x_1	x_2	x_3
3	6	9

Wie lautet das zugehörige Lagrange-Polynom zur Stützstelle x_1 ?

$$\ell_1(x) = ((x-9) \cdot (x-6)) / 18$$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:

$$\frac{(x-9) \cdot (x-6)}{18}$$

Hinweis: Produkte werden als $xy = x \cdot y$ und Quotienten als $\frac{x}{y} = x / y$ eingegeben.
Nach der Eingabe können Sie überprüfen, ob diese richtig interpretiert wurde.

Richtige Antwort, gut gemacht!



Kombination mit Choice-Aufgaben

Einbinden von Dropdown-Feldern

Bestimmen Sie den lineare Spline $s \in S(1, \Delta_3)$ zu den Splineknoten $\Delta_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, der die Daten

t_i	0	0.6	2.5	3
y_i	1	1.6	11.5	14

interpoliert. Die Splineknoten entsprechen hier nicht den Interpolationsknoten.

$s(x) =$ für $x \in [1, 2]$

Formeleingabe: Produkte $xy = \mathbf{x*y}$, Quotienten $\frac{x}{y} = \mathbf{x/y}$, Potenzen $x^2 = \mathbf{x^2}$

Ist der lineare interpolierende Spline $s \in S(1, \Delta_3)$ für beliebige, paarweise verschiedene Interpolationsknoten $t_0, t_1, t_2, t_3 \in [0, 3]$ eindeutig bestimmt?



Nicht beantwortet

ja

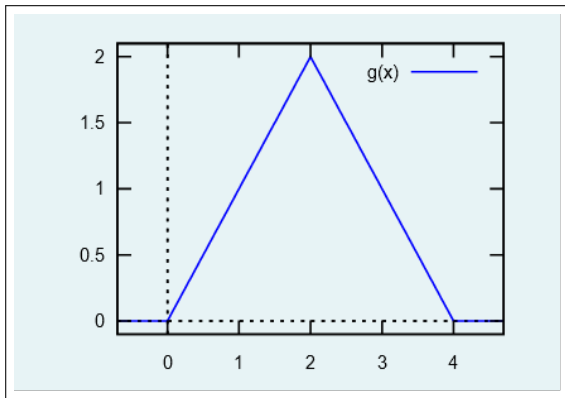
nein

A



Erzeugung von Grafiken per Maxima-Syntax

```
p1: plot(a*f0(b*(x+c)), [x,-c-1/b-.7,-c+1/b+.7], [y,min(a,0)-.099, max(a,0)+.099],  
[size,320,220], [legend,"g(x)"]);
```





Maxima-Variablen

- **Erstellen von Variablen** im Computeralgebrasystem Maxima

`x: 3;`

- **Syntax:** $x \cdot y = x*y$ $x^n = x^{\wedge}n$ $\frac{x}{y} = x/y$
 $e^x = \exp(x)$ $\sin x = \sin(x)$ $\pi = \%pi$

- Überprüfen des Codes in Desktopversion von Maxima möglich <https://maxima.sourceforge.io>
- Semikolon am Zeilenende nicht vergessen!



Maxima-Variablen

- **Erstellen von Variablen** im Computeralgebrasystem Maxima

`x: 3;`

- **Syntax:** $x \cdot y = x*y$ $x^n = x^{\wedge}n$ $\frac{x}{y} = x/y$
 $e^x = \exp(x)$ $\sin x = \sin(x)$ $\pi = \%pi$

- Überprüfen des Codes in Desktopversion von Maxima möglich <https://maxima.sourceforge.io>
- Semikolon am Zeilenende nicht vergessen!

- **Zufällige Zahlen**

`rand(3)` generiert zufällige ganze Zahl 0, 1 oder 2

- Verwenden im Aufgabentext

Beispiel: Maxima: `x : %pi^2/4`

`{@x@}` $\Rightarrow \frac{\pi^2}{4}$



Darstellung mathematischer Formeln

- Syntax des Textsatzsystems LaTeX
- Formeleingabe im Aufgabentext: `\(...\)` oder `\[...\]`
- Maxima-Variablen können mit `{@x@}` eingebunden werden

Erstellen von Lücken

Eingebefeld im Aufgabentext:

```
[[input:ans1]][[validation:ans1]]
```




Zeit zum Ausprobieren...



Einsatzszenarien



E-Prüfung in Numerische Mathematik

- [Vorlesung Numerische Mathematik](#) im Wintersemester 2020/21
- Wöchentlich schriftliche und elektronische Hausaufgaben
- [Prüfungsvorleistung](#): insgesamt 50 % der schriftlichen Hausaufgaben und 50 % der Online-Aufgaben erforderlich
- Bedienoberfläche und Syntax der Aufgaben sind bekannt



E-Prüfung in Numerische Mathematik

- **Vorlesung Numerische Mathematik** im Wintersemester 2020/21
- Wöchentlich schriftliche und elektronische Hausaufgaben
- **Prüfungsvorleistung**: insgesamt 50 % der schriftlichen Hausaufgaben und 50 % der Online-Aufgaben erforderlich
- Bedienoberfläche und Syntax der Aufgaben sind bekannt
- **Klausur**
- ca. 140 Teilnehmende (Ersttermin)
- Staffelung der Anfangszeiten um Überlastung der Server zu vermeiden
- Mix aus STACK-Aufgaben, Single-Choice-Aufgaben, Freitextaufgaben
- Manuelle Nachkorrektur der STACK-Eingaben:
Niemand soll wegen Syntaxfehler durchfallen (z.B. Dezimalpunkt vs. Dezimalkomma)
- Vorher: Probeklausur mit den gleichen Aufgabentypen



Mix verschiedener Aufgabentypen

Die Gleichung $x + 2y + 3z = 4$ beschreibt im dreidimensionalen Raum

- ☐ die leere Menge.
- ☐ eine Gerade.
- ☐ einen Körper.
- ☐ einen Punkt.
- ☐ eine Ebene.

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fourier-Transformierte wie folgt definiert.

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ordnen Sie eindeutig zu!

$$f(t) = t e^{-t^2}$$

Korrektes Element hier ablegen

Die Fourier-Transformierte F existiert nicht.

$$f(t) = e^{-|t-1|}$$

Korrektes Element hier ablegen

Die Fourier-Transformierte F existiert und $\operatorname{Re}(F) \equiv 0$.

$$f(t) = \cos t$$

Korrektes Element hier ablegen

Die Fourier-Transformierte F existiert und $\operatorname{Im}(F) \equiv 0$.

$$f(t) = e^{-|t|}$$

Korrektes Element hier ablegen

Die Fourier-Transformierte F existiert.

- Einbeziehen von Theorie-Aufgaben
- Single- und Multiple-Choice-Aufgaben
- Zuordnungs-Aufgaben
- Freitext-Aufgaben

Sei $\gamma \geq 0$ eine auf $[-1, 1]$ integrierbare Funktion mit höchstens endlich vielen Nullstellen. Sind die zugehörigen normierten Orthogonalpolynome p_n vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ für die

$$\int_{-1}^1 p_m(x) p_n(x) \gamma(x) dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt, eindeutig bestimmt? Falls nein, geben Sie eine Möglichkeit an, wie Eindeutigkeit erreicht werden kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweise: Formeln können als LaTeX-Code mit $\backslash(\cdot)$ oder $\$ \$ \cdot \$ \$$ eingegeben werden (nur $\$$ funktioniert nicht). Ein Formeleditor mit Vorschau ist nach Klick auf verfügbar. Alternativ kann ein (gut lesbares) Bild hinzugefügt werden. In der Probeklausur wird diese Aufgabe nicht bewertet und dient nur zum Test der technischen Möglichkeiten.

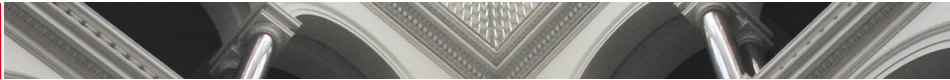
Rich text editor toolbar with icons for undo, redo, bold, italic, link, unlink, list, ordered list, table, image, video, audio, and other formatting options.





Vorteile

- Korrektur läuft automatisch
- parametrisierte Aufgaben können mehrfach wiederholt werden
- sofortige Rückmeldung über den Lernstand



Vorteile

- Korrektur läuft automatisch
- parametrisierte Aufgaben können mehrfach wiederholt werden
- sofortige Rückmeldung über den Lernstand

Nachteile

- Erstellen von Aufgaben ist aufwändig
- Möglicherweise weniger direkter Kontakt zwischen Lehrenden und Studierenden?



Vorteile

- Korrektur läuft automatisch
- parametrisierte Aufgaben können mehrfach wiederholt werden
- sofortige Rückmeldung über den Lernstand

Nachteile

- Erstellen von Aufgaben ist aufwändig
- Möglicherweise weniger direkter Kontakt zwischen Lehrenden und Studierenden?

Weiteres

- Studierende sollten mit der Formeleingabe vertraut sein
- Nachkorrektur von Aufgaben?



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und fürs Mitmachen!

Michael Quellmalz
TU Berlin, Institut für Mathematik
quellmalz@math.tu-berlin.de
<https://page.math.tu-berlin.de/~quellm>