1 Martingale (Version November 2017)

Definition 1.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum.

a) Eine *Filtration* (oder *Filtrierung*) ist eine aufsteigende Folge $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$ für $n \in \mathbf{N}_0$. Ist $\mathbf{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so nennt man $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ einen *filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum*.

b) $(E, \mathcal{E})$ sei ein zweiter messbarer Raum. Eine Folge $\mathbf{X} := (X_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ von Abbildungen $\Omega \to E$ heißt $\mathbf{F}$-*adaptiert*, falls für alle $n \in \mathbf{N}_0$ X_n $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{E}$-messbar ist und $\mathbf{F}$-*vorhersagbar* oder $\mathbf{F}$-*prävisibel*, wenn X_0 konstant ist und für alle $n \geq 1$ X_n $\mathcal{F}_{n-1}$-$\mathcal{E}$-messbar ist.

Notation 1.2. $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_n \mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) \subset \mathcal{F}$.

Beispiel 1.3. $\mathbf{X} := (X_n)$ sei eine Folge von $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}$ messbaren Abbildungen. $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n) = \bigvee_{j=0}^{n} X_j^{-1}(\mathcal{E})$. $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ ist eine Filtration. (X_n) ist $\mathbf{F}$-adaptiert. $\mathbf{F}$ heißt die von $\mathbf{X}$ *erzeugte* Filtration. $\mathbf{F}$ ist die kleinste Filtration, bezüglich der $\mathbf{X}$ adaptiert ist.

Bemerkung 1.4. Sei $\mathbf{X} := (X_n)$ eine $\mathbf{F}$-adaptierte $(E, \mathcal{E})$-wertige Folge. $F_n : E^n \to E'$ sei $\mathcal{E}^n$-$\mathcal{E}'$-messbar, wobei $(E', \mathcal{E}')$ ein neuer messbarer Raum ist. $Y_n := F_n(X_0, \ldots, X_n)$ ist dann ebenfalls $\mathbf{F}$-adaptiert.

Notation 1.5. $\overline{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$

Definition 1.6. Sei $\mathbf{F}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Eine Abbildung $\nu : \Omega \to \overline{\mathbf{N}}_0$ heißt $\mathbf{F}$-*Stoppzeit*, falls für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt: $\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Bemerkung 1.7. Wegen $\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ gilt $\{\nu = \infty\} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\nu = n\}\right)^c \in \mathcal{F}_\infty$.

Beispiele 1.8. $\mathbf{X} := (X_n)$ sei $\mathbf{F}$-adaptiert, $(E, \mathcal{E})$-wertig.

(a) $A \in \mathcal{E}, \nu_A = \inf\{n \in \mathbf{N}_0 : X_n \in A\}$ (wobei $\inf \emptyset := \infty$). Dann ist ν_A eine Stoppzeit.

Beweis: Für $n \in \mathbf{N}_0$ gilt $\{\nu_A = n\} = \{X_n \in A\} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \in A^c\} \in \mathcal{F}_n$.

(b) Sei τ eine beliebige Stoppzeit, $A \in \mathcal{E}$ und $\nu := \inf\{n > \tau : X_n \in A\}$.
Dann ist ν eine Stoppzeit.

Beweis:
$\{\nu = n\} = \{X_n \in A\} \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\{\tau = k\} \bigcap \bigcap_{\ell=k+1}^{n-1} \{X_\ell \notin A\} \right) \in \mathcal{F}_n.$

Aus a), b) folgt: Zweiteintrittszeiten etc. sind Stoppzeiten.

Definition 1.9. Sei ν eine $\mathbf{F}$-Stoppzeit. Dann heißt

$$\mathcal{F}_\nu := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}$$

σ-Algebra der *Prä-ν-Ereignisse*.

Man prüft leicht nach, dass $\mathcal{F}_\nu$ eine σ-Algebra ist und ν $\mathcal{F}_\nu$-messbar ist!

Bemerkung 1.10. $\nu : \Omega \to \overline{\mathbf{N}}_0$ sei konstant $= m \in \overline{\mathbf{N}}_0$. Dann gilt

$\{\nu = n\} = \begin{cases} \emptyset & n \neq m \\ \Omega & n = m \end{cases} \in \mathcal{F}_n.$

$\mathcal{F}_\nu = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}.$
Somit gilt $\mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_m$.

Beispiel 1.11. Sei $\nu = \nu_A$ wie in Beispiel 1.8(a) und $C \in \mathcal{E}$. Wir betrachten das Ereignis D, dass X_n mindestens einmal in C ist, bevor es nach A gelangt:

$$D = \{\exists n < \nu \text{ mit } X_n \in C\}.$$

$$D \in \sigma(X_n : n \in \mathbf{N}) \subset \mathcal{F}_\infty.$$

$$D \cap \{\nu = n\} = \{\nu = n\} \cap \bigcup_{k=0}^{n-1} \{X_k \in C\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \Rightarrow D \in \mathcal{F}_\nu.$$

Lemma 1.12. *(a) Sei $\nu : \Omega \to \overline{\mathbf{N}}_0$ eine Abbildung. ν ist genau dann eine $\mathbf{F}$-Stoppzeit, wenn $\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt.*

(b) $A \in \mathcal{F}_\infty$ liegt genau dann in $\mathcal{F}_\nu$, wenn $A \cap \{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle n gilt.

Beweis.

a) I) Sei ν eine Stoppzeit. Dann folgt $\{\nu \leq n\} = \cup_{k=0}^{n} \{\nu = k\} \in \mathcal{F}_n$
II) Umkehrung: $\{\nu = n\} = \{\nu \leq n\} \setminus \{\nu \leq n - 1\} \in \mathcal{F}_n$.

b) analog.

$\square$

Lemma 1.13. *Sei $\nu_k, k \in \mathbf{N}$ eine Folge von Stoppzeiten. Dann sind $\sup_k \nu_k$ und $\inf_k \nu_k$ Stoppzeiten.*

Beweis. Für $n \in \mathcal{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} \{\sup_k \nu_k \le n\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\nu_k \le n\} \in \mathcal{F}_n \\ \{\inf_k \nu_k \le n\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\nu_k \le n\} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.12. □

Lemma 1.14. *ν, ν' seien zwei Stoppzeiten. Dann gilt:*

a) $\{\nu \le \nu'\}, \{\nu = \nu'\} \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_{\nu'}$.

b) Gilt $\nu \le \nu'$, so folgt $\mathcal{F}_\nu \subset \mathcal{F}_{\nu'}$.

c) $\mathcal{F}_{\nu \wedge \nu'} = \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_{\nu'}$.

d) Ist $\mathbf{X} = (X_n)$ adaptiert und $\nu(\omega) < \infty$ für alle ω, dann ist X_ν $\mathcal{F}_\nu$-messbar.

Beweis.

a) ν, ν' sind $\mathcal{F}_\infty$-messbar. Daher gilt $\{\nu \le \nu'\} \in \mathcal{F}_\infty$.
$\{\nu \le \nu'\} \cap \{\nu = n\} = \{\nu = n\} \cap \{\nu' \ge n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \Rightarrow \{\nu \le \nu'\} \in \mathcal{F}_\nu$.
$\{\nu \le \nu'\} \cap \{\nu' = n\} = \{\nu' = n\} \cap \{\nu \le n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \Rightarrow \{\nu \le \nu'\} \in F_{\nu'}$.
$\{\nu = \nu'\} = \{\nu \le \nu'\} \cap \{\nu' \le \nu\} \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_{\nu'}$.

b) $A \in \mathcal{F}_\nu \Rightarrow A \in \mathcal{F}_\infty$. $A \cap \{\nu' \le n\} = \underbrace{A \cap \{\nu \le n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\nu' \le n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \; \forall n$.

c) und d) Übungsaufgabe.

□

Definition 1.15. $\mathbf{X} = (X_n)$ sei eine Folge von $\mathbf{F}$-adaptierten, integrierbaren reellen Zufallsgrößen auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$.

a) $\mathbf{X}$ heißt $\mathbf{F}$-*Martingal*, wenn für alle $n \in \mathbf{N}_0$ $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ f.s. gilt.

b) $\mathbf{X}$ heißt $\mathbf{F}$-*Submartingal*, wenn für alle $n \in \mathbf{N}_0$ $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \ge X_n$ f.s. gilt.

c) $\mathbf{X}$ heißt $\mathbf{F}$-*Supermartingal*, wenn $-\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal ist.

Ist $\mathbf{F}$ die von (X_n) erzeugte Filtration, so sagt man statt $\mathbf{F}$-*Martingal* oft einfach *Martingal* (analog für Submartingal und Supermartingal).

Bemerkung 1.16. a) Ist $\mathbf{X} = (X_n)$ ein $\mathbf{F}$-(Sub-)Martingal, so gilt $\mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = (\geq)X_n$ für alle $m \geq n$. Insbesondere gilt $\mathbf{E}X_m = (\geq)\mathbf{E}X_n$ für alle $m \geq n$.

b) Ist $\mathbf{X} = (X_n)$ ein $\mathbf{F}$-(Sub-)Martingal, dann auch ein (Sub-)martingal (bezüglich der von $\mathbf{X}$ erzeugten Filtration).

Beispiele 1.17. a) $\xi_i,\ i \in \mathbf{N}$, seien unabhängige integrierbare Zufallsgrößen mit $\mathbf{E}\xi_i = 0, i \in \mathbf{N}$. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n), X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Dann ist (X_n) ein $\mathbf{F}-$Martingal.

b) Die $\xi_i, i \in \mathbf{N}$, seien wie in Beispiel a), jedoch $\in L^2$. Dann ist $X_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{var}(\xi_i)$ ein $\mathbf{F}-$Martingal.

Beweis. (X_n) ist offensichtlich $\mathbf{F}$-adaptiert.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i + \xi_{n+1}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{var}(\xi_i)|\mathcal{F}_n\right) \\
&= X_n + \mathbf{E}(2\xi_{n+1}\sum_{i=1}^{n} \xi_i|\mathcal{F}_n) + \mathbf{E}(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - \mathrm{var}(\xi_{n+1}) \\
&= X_n + 2\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbf{E}(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - \mathrm{var}(\xi_{n+1}) = X_n
\end{aligned}$$

wegen $\mathbf{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\xi_{n+1}) = 0$ und $\mathbf{E}(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\xi_{n+1}^2) = \mathrm{var}(\xi_{n+1})$. □

c) **Polyas Urnenschema**
Zur Erinnerung an W.-Theorie I: Polyas Urnenschema ist eine Markovkette auf $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((r,s),(r+1,s)) = \frac{r}{r+s}$$

$$p((r,s),(r,s+1)) = \frac{s}{r+s}$$

(die anderen sind 0). Ist $(R_0, S_0) = (1, 1), (R_1, S_1), (R_2, S_2), \dots$ eine Markovkette mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten, so betrachten wir

$$X_n = \frac{R_n}{R_n + S_n} = \frac{R_n}{n+2}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma((R_0, S_0), (R_1, S_1) \dots, (R_n, S_n)).$$

(X_n) ist dann ein $\mathbf{F}$-Martingal.

Beweis. $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\frac{R_{n+1}}{n+3}|\mathcal{F}_n) = \frac{R_n}{n+2} \cdot \frac{R_n+1}{n+3} + (1 - \frac{R_n}{n+2})\frac{R_n}{n+3} = X_n$. □

d) Ist X eine beliebige integrierbare Zufallsgröße und $\mathbf{F} = (F_n)$ eine beliebige Filtration, so wird durch $X_n = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$ ein $\mathbf{F}$-Martingal definiert.

Proposition 1.18. *a) Sei $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Martingal, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konvex und $\mathbf{E}|\varphi(X_n)| < \infty$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann ist $\varphi(\mathbf{X}) := (\varphi(X_n))_{n\in\mathbf{N}_0}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal.*

b) Sei $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal, $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konvex und nichtfallend und $\mathbf{E}|\varphi(X_n)| < \infty$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann ist $\varphi(\mathbf{X})$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal.

Beweis. Mit der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungen folgt in beiden Fällen für $n \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{E}(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \varphi(\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)).$$

Im Fall a) ist der letzte Ausdruck gleich $\varphi(X_n)$, im Fall b) $\geq \varphi(X_n)$. □

Stoppsatz 1.19. *Sei $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal, $N \in \mathbf{N}_0$ und S und T Stoppzeiten mit $T(\omega) \leq N$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt*

$$\mathbf{E}(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_{S\wedge T} \text{ f.s.}$$

mit Gleichheit, falls $\mathbf{X}$ sogar ein $\mathbf{F}$-Martingal ist.

Bemerkung 1.20. Vor allem der Fall $S(\omega) \leq T(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ ist wichtig. In diesem Fall folgt insbesondere $\mathbf{E}X_T \geq \mathbf{E}X_S$. Auch die spezielleren Fälle $S \equiv 0$ sowie der Fall $T \equiv N$ sind interessant. Ohne die Beschränktheitsbedingung ist der Satz im allgemeinen *nicht* richtig. So ist die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbf{Z}$ mit Start in 1 als Spezialfall von 1.17a) ein Martingal und $S \equiv 0$ und $T = \inf\{n \in \mathbf{N} : X_n = 0\}$ Stoppzeiten, aber $\mathbf{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = 0$ und $X_S = X_0 = 1$.

Beweis.

(i) $X_{S\wedge T}$ ist $\mathcal{F}_{S\wedge T}$-messbar nach Lemma 1.14d) und daher $\mathcal{F}_S$-messbar nach Lemma 1.14b).

Ebenso folgt, dass X_T $\mathcal{F}_T$-messbar ist. Wegen $\mathbf{E}|X_T| \leq \mathbf{E}\left(\max_{0\leq i\leq N} |X_i|\right) \leq \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{N} |X_i|\right) < \infty$ gilt $X_T \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und ebenso $X_{S\wedge T} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(ii) Zu zeigen bleibt (nach Definition der bedingten Erwartung)

$$\int_B X_T \mathrm{d}\mathbf{P} \overset{\geq}{(=)} \int_B X_{S\wedge T} \mathrm{d}\mathbf{P} \tag{1}$$

für alle $B \in \mathcal{F}_S$. Es genügt dabei, die Behauptung nur für Mengen der Form $B = \{S = k\} \cap A$ mit $A \in \mathcal{F}_S$ zu zeigen, da sie wegen der Linearität des Integrals dann auch für $A \in \mathcal{F}_S$ folgt, indem man $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A \cap \{S = k\})$ disjunkt zerlegt (die Vereinigung erstreckt sich auch über $k = \infty$!). Wir fixieren nun $k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $A \in \mathcal{F}_S$ und zeigen (1) für $B = A \cap \{S = k\}$ mit Induktion bezüglich des größten Wertes m von T, also $m := \max\limits_{\omega\in\Omega} T(\omega)$.

$$m = 0: \text{ hier ist } T \equiv 0 \text{ und beide Seiten von (1) sind } \int_B X_0 \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass (1) für alle T mit $\max\limits_{\omega\in\Omega} T(\omega) \leq m-1$ gilt. Wir zeigen, dass (1) dann auch im Fall $\max\limits_{\omega\in\Omega} T(\omega) = m$ folgt:

1. Fall: $m \leq k$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_B X_T \mathrm{d}\mathbf{P} &= \mathbf{E}(X_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}}) = \mathbf{E}(X_{T\wedge k} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}}) = \mathbf{E}(X_{S\wedge T} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}}) \\ &= \int_B X_{S\wedge T} \mathrm{d}\mathbf{P}.\end{aligned}$$

2. Fall: $m > k$.
Dann gilt zunächst

$$B \cap \{T = m\} = A \cap \{S = k\} \cap \{T \leq m-1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_T \mathbb{1}_B) &= \mathbf{E}(X_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T\leq m-1\}}) + \mathbf{E}(X_m \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T=m\}}) \\ &\overset{\geq}{(=)} \mathbf{E}(X_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T\leq m-1\}}) + \mathbf{E}(X_{m-1} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T=m\}}) \\ &= \mathbf{E}(X_{T\wedge(m-1)} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}}) \overset{\geq}{(=)} \mathbf{E}(X_{T\wedge(m-1)\wedge S} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S=k\}}) \\ &= \mathbf{E}(X_{T\wedge S} \mathbb{1}_B),\end{aligned}$$

wobei beim ersten "$\geq$" die Submartingaleigenschaft und beim letzten "$\geq$" die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. Damit ist (1) gezeigt. □

Korollar 1.21. *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-(Sub)martingal,* ν *eine Stoppzeit und* $Y_n(\omega) := X_{n\wedge\nu(\omega)}(\omega)$*. Dann ist* $\mathbf{Y}$ *ein* $\mathbf{F}$*-(Sub)martingal.*

Beweis. Für $n \in \mathbf{N}_0$ folgt $\mathbf{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X_{(n+1)\wedge\nu}|\mathcal{F}_n) \overset{(\geq)}{=} Y_n$ aus dem Stoppsatz 1.19, indem man dort $S = n$ und $T = (n+1) \wedge \nu$ setzt. □

Korollar 1.22. *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Submartingal mit beschränkten Zuwächsen, dh es existiert* $\beta \in \mathbf{R}^+$*, so dass* $|X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leq \beta$ *für alle* $\omega \in \Omega$ *und alle* $n \in \mathbf{N}_0$*. Seien* S *und* T *Stoppzeiten mit* $\mathbf{E}T < \infty$*. Dann gilt* $\mathbf{E}(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_{S\wedge T}$ *f.s. mit Gleichheit falls* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Martingal ist.*

Beweis.

$$|X_{T\wedge n}| = |\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k - X_{k-1}) + X_0| \leq \sum_{k=1}^{T\wedge n} |X_k - X_{k-1}| + |X_0| \leq \beta T + |X_0|.$$

Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz für bedingte Erwartungen können wir daher in der aus dem Stoppsatz 1.19 folgenden Ungleichung (bzw. Gleichung im Martingalfall)

$$\mathbf{E}(X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_S) \geq X_{S\wedge T\wedge n}$$

zum fast sicheren Grenzwert $n \to \infty$ übergehen und erhalten die Behauptung. □

Proposition 1.23. *Ist* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Martingal und* $\mathbf{H} = (H_n)$ *vorhersagbar und gilt für alle* n $\sup_{\omega\in\Omega} |H_n(\omega)| < \infty$*, dann ist der Prozess* $(\mathbf{H}\cdot\mathbf{X})_n := \sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1})$*,* $n \in \mathbf{N}_0$ *ein Martingal. Dieser Prozess heißt auch* diskretes stochastisches Integral*.*

Beweis. Sehr einfach! □

Aufgabe 1.24. Wie lange muss man im Mittel warten, bis beim Werfen einer fairen Münze erstmalig die Sequenz "WZW" unmittelbar hintereinander erscheint? Man kann dies mit etwas Mühe zu Fuß ausrechnen, aber mit Martingalmethoden geht es sehr viel schneller und eleganter! Um die Spannung zu erhalten, wird dies erst in der Vorlesung gezeigt.

Satz 1.25. *(Doobs maximale Ungleichung) Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Submartingal und* $N \in \mathbf{N}_0$*. Dann gilt für alle* $x > 0$

(i) $\mathbf{P}\left(\max_{n\leq N} X_n \geq x\right) \leq \frac{1}{x}\mathbf{E}\left(X_N \mathbb{1}_{\{\max_{n\leq N} X_n \geq x\}}(\omega)\right) \leq \frac{1}{x}\mathbf{E}X_N^+,$

(ii) $\mathbf{P}\left(\min_{n\leq N} X_n \leq -x\right) \leq \frac{1}{x}\left(\mathbf{E}X_N^+ - \mathbf{E}X_0\right).$

Beweis.

(i) Sei $\nu := \inf\{n \le N : X_n \ge x\}$ mit $\nu := N$, falls die Menge leer ist. ν ist eine Stoppzeit mit $\nu(\omega) \le N$ für alle $\omega \in \Omega$ und $A := \{\max_{n\le N} X_n \ge x\} \in \mathcal{F}_\nu$. Mit $S := \nu$ und $T := N$ folgt aus dem Stoppsatz 1.19

$$x\mathbf{P}\left(\left\{\max_{n\le N} X_n \ge x\right\}\right) \le \int_A X_S \mathrm{d}\mathbf{P} \le \int_A X_T \mathrm{d}\mathbf{P} \le \mathbf{E}X_N^+.$$

(ii) Sei $\nu := \inf\{n \le N : X_n \le -x\}$ mit $\nu := N$, falls die Menge leer ist.

$$A := \left\{\min_{n\le N} X_n \le -x\right\} \in \mathcal{F}_\nu.$$

Mit $S := 0$ und $T := \nu$ folgt aus dem Stoppsatz 1.19

$$x\mathbf{P}\left(\left\{\min_{n\le N} X_n \le -x\right\}\right) \le -\int_A X_T \mathrm{d}\mathbf{P} = -\mathbf{E}X_T + \int_{A^c} X_T \mathrm{d}\mathbf{P}$$
$$\le -\mathbf{E}X_T + \int_{A^c} X_N \mathrm{d}\mathbf{P} \le -\mathbf{E}X_0 + \mathbf{E}X_N^+,$$

wobei wir beim vorletzten Ungleichheitszeichen ebenfalls den Stoppsatz 1.19 anwendeten. □

Definition 1.26. Sei $F \subset \mathbf{N}_0$ eine endliche nichtleere Menge, $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$, $a < b$ reelle Zahlen, $\tau_1 = \inf\{t \in F : f(t) \le a\}$ und für $k = 1, 2, \ldots$ sei $\sigma_k = \inf\{t > \tau_k : t \in F, f(t) \ge b\}$ und $\tau_{k+1} = \inf\{t > \sigma_k : t \in F, f(t) \le a\}$, wobei das Infimum über eine leere Menge als ∞ definiert wird. Dann heißt

$$U(a, b, F, f) = \max\{k : \sigma_k < \infty\}$$

Zahl der *Upcrossings des Intervalls* $[a, b]$ *von* f *in* F.

Doobsche Upcrossingungleichung 1.27. *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Submartingal,* $N \in \mathbf{N}_0$ *und* $F = \{0, \ldots, N\}$*. Dann gilt für* $a < b$

$$\mathbf{E}(U(a, b, F, \mathbf{X}(\omega))) \le \frac{\mathbf{E}((X_N - a)^+)}{b - a}.$$

Beweis. Definiere σ_k, τ_k wie in Definition 1.26. Dann sind alle σ_k und τ_k Stoppzeiten. Mit dem Stoppsatz 1.19 – angewendet auf $S = \sigma_k \wedge N$ und $T = \tau_{k+1} \wedge N$ – folgt

$$0 \le \mathbf{E}\sum_{k=1}^{N} \left(X_{\tau_{k+1}\wedge N} - X_{\sigma_k \wedge N}\right) = \mathbf{E}\sum_{k=1}^{U(a,b,F,\mathbf{X}(\omega))} \left(X_{\tau_{k+1}\wedge N} - X_{\sigma_k\wedge N}\right)$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(-\sum_{k=2}^{U(a,b,F,\mathbf{X}(\omega))}(X_{\sigma_k\wedge N}-X_{\tau_k\wedge N})-(X_{\sigma_1\wedge N}-a)+(X_{\tau_{(U(a,b,F,\mathbf{X})+1)}\wedge N}-a)\right)\mathbb{1}_{\{U(a,b,F,\mathbf{X})\geq 1\}}(\omega)\right]$$
$$\leq \mathbf{E}(-(b-a)U(a,b,F,\mathbf{X})) + \mathbf{E}((X_N-a)^+),$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Martingalkonvergenzsatz 1.28. *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Submartingal mit* $\sup_{n\in\mathbf{N}_0}\mathbf{E}(X_n^+) < \infty$*. Dann existiert eine* $\mathcal{F}_\infty$*-messbare integrierbare Zufallsgröße* X_∞*, so dass*

$$X_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \textit{ fast sicher.}$$

Weiter gilt

$$\mathbf{E}|X_\infty| \leq \liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}|X_n|.$$

Bemerkung 1.29. Für ein $\mathbf{F}$-Submartingal ist $n \mapsto \mathbf{E}X_n$ nichtfallend. Daher gilt

$$\mathbf{E}|X_n| = 2\mathbf{E}X_n^+ - \mathbf{E}X_n \leq 2\mathbf{E}X_n^+ - \mathbf{E}X_0.$$

Außerdem gilt

$$\mathbf{E}|X_n| \geq \mathbf{E}X_n^+.$$

Daher ist die Bedingung $\sup_{n\in\mathbf{N}_0}\mathbf{E}(X_n^+) < \infty$ in 1.28 äquivalent zu $\sup_{n\in\mathbf{N}_0}\mathbf{E}|X_n| < \infty$.

Beweis. Sei $a < b$. Wegen $(x-a)^+ \leq x^+ + |a|$ gilt $c := \sup_{n\in\mathbf{N}_0}\mathbf{E}((X_n-a)^+) < \infty$.

Aus 1.27 folgt daher (mit monotoner Konvergenz)

$$\sup_{N\in\mathbf{N}} U(a,b,\{0,\dots,N\},\mathbf{X}(\omega)) < \infty \text{ fast sicher .}$$

Weiter ist
$\mathcal{N} := \{\omega : \sup_{N\in\mathbf{N}_0} U(q_1,q_2,\{0,\dots,N\},\mathbf{X}(\omega)) < \infty \text{ für alle } q_1 < q_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Q}\}^c$ eine $\mathbf{P}$-Nullmenge und für alle $\omega \notin \mathcal{N}$ gilt offenbar, dass

$$X_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

existiert, eventuell aber ∞ oder $-\infty$ ist. Aus dem Lemma von Fatou folgt zusammen mit obiger Bemerkung

$$\mathbf{E}|X_\infty| \leq \liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}|X_n| < \infty.$$

Insbesondere ist also X_∞ integrierbar und damit fast sicher endlich. Die $\mathcal{F}_\infty$-Messbarkeit lässt sich gegebenenfalls nach Abänderung auf einer Nullmenge sicherstellen. Konkret ist

$$X_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{wenn der Grenzwert in } \mathbf{R} \text{ existiert.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_\infty$-messbar (vgl. frühere Übungsaufgabe). □

Bemerkung 1.30. Die Bedingung $\sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}(X_n^+) < \infty$ ist automatisch für nichtpositive Submartingale erfüllt. Daher konvergiert *jedes* nichtpositive Submartingal (und somit jedes nichtnegative Supermartingal) fast sicher.

Anwendungen 1.31. a) Irrfahrt auf $\mathbf{N}_0$ mit absorbierendem Rand.
Wir betrachten die Markovkette $X_0, X_1, \ldots$ auf $\mathbf{N}_0$ mit $X_0 = 1$ und Übergangswahrscheinlichkeit

$$p(i, i+1) = p(i, i-1) = 1/2 \text{ für } i \geq 1$$

$$p(0,0) = 1.$$

$\mathbf{X} = (X_n)$ ist ein positives Martingal:

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) = \mathbf{E}(X_{n+1}|X_n) = \sum_{i\in\mathbf{N}_0} ip(X_n, i) = X_n.$$

X_n konvergiert also f.s. (nach 1.28), was wir allerdings aus WT I ohnehin schon wissen: $X_n \to 0$, da die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbf{Z}$ rekurrent ist.
Da $\mathbf{X}$ ein Martingal ist, gilt $\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0 = 1$.

Somit gilt $\mathbf{E}X_\infty = 0 < \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = 1$.

b) Polyas Urnenschema (siehe 1.17c):
$\mathbf{X} = (X_n)$ ist ein positives Martingal. Die X_n sind ferner beschränkt durch 1. Nach dem Martingalkonvergenzsatz 1.28 konvergiert X_n f.s. gegen eine Zufallsgröße X_∞. Da die X_n beschränkt sind, gilt

$$\mathbf{E}X_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0 = 1/2.$$

Im Gegensatz zu den bisher meist betrachteten Situationen ist X_∞ nicht eine Konstante. Es gilt nämlich:

$$X_\infty \text{ ist gleichmäßig auf } [0,1] \text{ verteilt.}$$

Beweis:
Aus $X_n \to X_\infty$ f.s. folgt $X_n \to X_\infty$ in Wahrscheinlichkeit und daher auch in Verteilung. Die Verteilung von X_n lässt sich leicht berechnen. R_n kann die Werte $1, 2, \ldots, n+1$ annehmen. Aus W.-Th. I wissen wir, wie $\mathbf{P}(R_n = k)$ zu berechnen

ist:

$\mathbf{P}(R_n = k) = p^{(n)}((1,1),(k,n+2-k))$, wobei $p^{(n)}$ die n-stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten sind. Um sie zu berechnen, summiert man die Produkte der Übergangswahrscheinlichkeiten über alle möglichen Zwischenschritte. Die möglichen Pfade von $(1,1)$ nach $(k, n+2-k)$ werden durch die Festlegung der $k-1$ Zeitpunkte beschrieben, bei denen eine rote Kugel gezogen wird. Jeder dieser Pfade hat offenbar Wahrscheinlichkeit $\frac{(k-1)!(n+1-k)!}{(n+1)!}$. Da es $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$ solcher Pfade gibt, folgt

$$\mathbf{P}(R_n = k) = \frac{1}{n+1}, \text{ d.h.}$$

$$\mathbf{P}\left(X_n = \frac{k}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} \text{ für } 1 \leq k \leq n+1.$$

Daraus ergibt sich $\mathcal{L}(X_n) \to \lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ ist.

c) Starkes Gesetz der großen Zahlen:

Satz: Seien $X_1, X_2 \ldots$ unabhängige reellwertige Zufallsgrößen mit endlichen zweiten Momenten und (a_n) eine monoton wachsende unbeschränkte Folge positiver reeller Zahlen. Falls $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{var}(X_i)/a_i^2 < \infty$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}X_i) = 0 \text{ fast sicher.}$$

Beweis:

$Y_n := \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}X_i)/a_i$ ist ein $\mathbf{F}$-Martingal, wobei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

$$\sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}Y_n^2 = \sup_{n\in\mathbf{N}_0} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i)/a_i^2 < \infty.$$

Somit folgt $\sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}|Y_n| \leq 1 + \sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}Y_n^2 < \infty$. Nach dem Martingalkonvergenzsatz 1.28 konvergiert Y_n fast sicher gegen eine f.s. endliche Zufallsgröße. Die Aussage des Satzes folgt dann mit dem nachfolgenden Lemma.

Kronecker-Lemma:

a_n, b_n seien zwei reelle Zahlenfolgen. $a_n > 0$ sei monoton wachsend und strebe gegen ∞. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/a_n$ in $\mathbf{R}$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Beweisidee: Sei $s_n := \sum_{i=1}^n b_i/a_i$ und $s := \lim s_n$. Dann gilt

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n b_i = \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n a_i(s_i - s_{i-1}) = s_n - \frac{1}{a_n}\sum_{i=2}^n s_{i-1}(a_i - a_{i-1}) \to s - s = 0.\Box$$

Offenbar kann man bei dem starken Gesetz die Unabhängigkeit der X_i durch die schwächere Bedingung $\mathbf{E}(X_{n+1} - \mathbf{E}X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) = 0, n \in \mathbf{N}$ ersetzen, ohne dass der Beweis zu ändern ist. Man sagt, dass $(X_n - \mathbf{E}X_n)$ eine *Martingaldifferenzfolge* ist, da dann $S_n := \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i)$ ein Martingal ist.

Eine Frage, die oft interessiert, ist die folgende: Unter welchen Bedingungen konvergiert X_n in L^1 gegen X_∞? Wir sahen in 1.31a), dass dies nicht immer gilt.

Definition 1.32. Ein $\mathbf{F}$-Submartingal, das in L^1 konvergiert, heißt *regulär.*

Satz 1.33. *Sei $\mathbf{X}$ ein reguläres $\mathbf{F}$-(Sub)martingal. Dann konvergiert X_n auch fast sicher, und für den Grenzwert X_∞ gilt für alle $n \in \mathbf{N}_0$*

$$X_n \overset{(\leq)}{=} \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) \text{ f.s. }.$$

Beweis. X_∞ sei der L^1-Grenzwert der Folge. Aus der L^1-Konvergenz folgt $\sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, also konvergiert nach dem Martingalkonvergenzsatz 1.28 die Folge auch fast sicher (und zwar auch gegen X_∞). Sei $\delta > 0$. Dann gilt für $m > n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) - X_n < -\delta) &\leq \mathbf{P}(\mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) - \mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_n) < -\delta) \\
&\leq \mathbf{P}(|\mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) - \mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_n)| > \delta) \\
&\leq \frac{\mathbf{E}|\mathbf{E}(X_\infty - X_m|\mathcal{F}_n)|}{\delta} \leq \frac{\mathbf{E}(\mathbf{E}(|X_\infty - X_m||\mathcal{F}_n))}{\delta} \\
&= \frac{\mathbf{E}|X_\infty - X_m|}{\delta} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also folgt $\mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ fast sicher. Ist $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Martingal, dann sind $\mathbf{X}$ und $-\mathbf{X}$ $\mathbf{F}$-Submartingale, und somit gilt

$$X_n = \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) \text{ fast sicher}$$

und alle Aussagen des Satzes sind gezeigt.
Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren. Für $m > n$ gilt

$$X_n \overset{(\leq)}{=} \mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_n) \text{ f.s. }.$$

Die linke Seite konvergiert fast sicher gegen X_∞. Weiter sieht man leicht, dass wegen der L^1-Konvergenz von X_m gegen $X\infty$ auch $\mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_n)$ in L^1 gegen $\mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ konvergiert und somit die Behauptung des Satzes (im Martingalfall und Submartingalfall) folgt. $\Box$

Als notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Regularität eines Martingals wird sich die gleichgradige Integrierbarkeit von $\mathbf{X} = (X_n)$ herausstellen.

Definition 1.34. Eine Familie reeller Zufallsgrößen $X_t, t \in I$ (I beliebige Indexmenge) heißt *gleichgradig (oder gleichmäßig oder gleichförmig) integrierbar*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \int_{\{|X_t|\geq n\}} |X_t| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0.$$

Bemerkungen 1.35. a) Ist X eine integrierbare ZV, dann ist $\{X\}$ gleichgradig integrierbar.

b) Jede endliche Menge integrierbarer ZV auf einem Wraum ist gleichgradig integrierbar.

c) Sind $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ Mengen gleichgradig integrierbarer ZV auf einem Wraum, dann auch $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

d) Existiert zu einer Familie $\mathcal{M}$ von ZV eine integrierbare Majorante, dann ist $\mathcal{M}$ gleichgradig integrierbar.

e) Ist X integrierbar, dann ist $\{Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) : \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)\}$ gleichgradig integrierbar.

f) Seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ Mengen von ZVn auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{M}_2$ gleichgradig integrierbar. Wenn zu jedem $X \in \mathcal{M}_1$ ein $Y \in \mathcal{M}_2$ existiert mit $|X| \leq |Y|$ fast sicher, dann ist $\mathcal{M}_1$ gleichgradig integrierbar.

Proposition 1.36. *Sei $X_t, t \in I$ eine Familie von Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\{X_t, t \in I\}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(ii) $\sup_{t\in I} \mathbf{E}|X_t| < \infty$ *und für alle* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$, *so dass für alle* $A \in \mathcal{F}$ *mit* $\mathbf{P}(A) < \delta$ *und alle* $t \in I$ *gilt:* $\mathbf{E}|X_t \mathbb{1}_A| < \varepsilon$.

(iii) Es existiert eine nichtnegative nichtfallende konvexe Funktion

$$G : [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = \infty \text{ und } \sup_t \mathbf{E}G(|X_t|) < \infty.$$

(iv) Es existiert eine nichtnegative messbare Funktion $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *mit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = \infty \text{ und } \sup_t \mathbf{E}G(|X_t|) < \infty.$$

Beweis.
(i)⇒(ii): Sei $n \in \mathbf{N}$ so gewählt, dass $\sup_t \int_{\{|X_t|\geq n\}} |X_t| \mathrm{d}\mathbf{P} < \infty$. Dann folgt $\sup_t \mathbf{E}|X_t| \leq \sup_t \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{|X_t|\geq n\}}|X_t|) + n < \infty$. Sei weiter $\varepsilon > 0$. Wähle $n = n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$,

so dass $\sup_t \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{|X_t|\geq n\}}|X_t|) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2n}$. Dann folgt für $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbf{P}(A) < \delta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X_t \mathbb{1}_A| &= \mathbf{E}(|X_t| \mathbb{1}_{A\cap\{|X_t|\geq n\}}) + \mathbf{E}(|X_t| \mathbb{1}_{A\cap\{|X_t|<n\}}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + n\mathbf{P}(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(i)⇒(iii): Sei $N_k, k \in \mathbf{N}$ eine wachsende Folge positiver Zahlen, so dass $N_1 = 0$,

$$N_k \uparrow \infty \text{ und } C := \sup_t \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{E}(|X_t| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t|\geq N_k\}}) < \infty.$$

Definiere die stetige Funktion G durch $G(0) = 0$ und $G'(x) = \left(k - \frac{N_{k+1}-x}{N_{k+1}-N_k}\right), N_k \leq x < N_{k+1}, k \in \mathbf{N}$. Dann ist G konvex, nichtfallend und erfüllt $\lim_{x\to\infty} G(x)/x = \infty$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}G(|X_t|) &= \int_\Omega \int_0^\infty G'(y)\mathbb{1}_{\{|X_t|\geq y\}} \mathrm{d}y\mathrm{d}\mathbf{P} \\ &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \int_{N_k}^{N_{k+1}} G'(y)\mathbb{1}_{\{|X_t|\geq y\}} \mathrm{d}y\mathrm{d}\mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\leq \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} k(|X_t| - N_k) \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t|\geq N_k\}}\mathrm{d}\mathbf{P} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{E}(|X_t| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t|\geq N_k\}}) \leq C < \infty.$$

(iii)⇒(iv): trivial.
(iv)⇒(i): Sei $n \in \mathbf{N}$ und $M_n := \inf_{x\geq n} \frac{G(x)}{x}$. Dann folgt

$$\sup_t \int_{\{|X_t|\geq n\}} |X_t|\mathrm{d}\mathbf{P} \leq \frac{1}{M_n} \sup_t \int_\Omega G(|X_t|)\mathrm{d}\mathbf{P}.$$

(ii)⇒(i): Sei $\varepsilon > 0$ und $n = n(\varepsilon) > \frac{1}{\delta} \sup_{t\in I} \mathbf{E}|X_t|, n < \infty$.
Wegen $\mathbf{E}|X_t| \geq n\mathbf{P}\{|X_t| \geq n\}$ folgt $\mathbf{P}\{|X_t| \geq n\} < \delta$, also folgt aus (ii) $\mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{|X_t|\geq n\}}|X_t|) < \varepsilon$. □

Bemerkung 1.37. a) Ein wichtiger Spezialfall ist $G(x) = x^p$ für $p > 1$.

b) Aus $\sup_{t\in I} \mathbf{E}|X_t| < \infty$ folgt *nicht* die gleichgradige Integrierbarkeit von $X_t, t \in I$! Ein Beispiel dafür ist $I = \mathbf{N}, (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ und $X_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

c) Aus der zweiten Bedingung von Proposition 1.36 (ii) folgt ebenfalls nicht die gleichgradige Integrierbarkeit wie das folgende Beispiel zeigt: Ω einelementig, $I = \mathbf{N}$ und $X_k := k$, $k \in \mathbf{N}$.

Für den Beweis des folgenden Satzes wird sich das folgende Lemma als nützlich erweisen, dessen einfacher Beweis dem Leser überlassen ist.

Lemma 1.38. *Eine Folge reeller ZV $X_k, k \in \mathbf{N}_0$ ist gleichgradig integrierbar genau dann wenn alle X_k integrierbar sind und* $\lim_{n\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \mathbf{E}(|X_k| 1\!\!1_{\{|X_k|\geq n\}}) = 0$.

Der folgende Satz zeigt (auch außerhalb der Martingaltheorie) die Nützlichkeit des Begriffs der gleichgradigen Integrierbarkeit.

Satz 1.39. *Sei $p \in [1,\infty)$ und $X_n, n \in \mathbf{N}_0$ eine Folge in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und X eine Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *in* $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

(ii)
α) $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *in Wahrscheinlichkeit und*
β) $|X_n|^p, n \in \mathbf{N}_0$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(iii)
α) $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *in Wahrscheinlichkeit,*
β) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|^p = \mathbf{E}|X|^p$ *und*
γ) $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(iii):
α) und γ) sind klar.
β) Aus der Dreiecksungleichung für die L^p-norm folgt

$$|(\mathbf{E}(|X_k|^p))^{1/p} - (\mathbf{E}(|X|^p))^{1/p}| \leq \|X_k - X\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii): Für $n > 0$ folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X_k|^p 1\!\!1_{\{|X_k|^p\geq n\}}) &\leq \mathbf{E}(|X_k|^p - |X_k|^p \wedge (n - |X_k|^p)^+) \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}|X|^p - \mathbf{E}\big(|X|^p \wedge (n - |X|^p)^+\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

wobei wir beim Grenzübergang $k \to \infty$ benutzten, dass eine gleichmäßig (in k und ω) beschränkte Folge von Zufallsgrößen, welche in Wahrscheinlichkeit konvergiert, dies auch in L^1 tut. Mit Lemma 1.38 folgt nun die Behauptung.

(ii)$\Rightarrow$(i):
Wegen $\mathbf{E}(|X|^p) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n|^p)$ (Fatou!) ist $\mathcal{M} = \{|X|^p\} \cup \{|X_n|^p, n \in \mathbf{N}_0\}$

gleichgradig integrierbar. Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A|Y|) < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$ für alle $Y \in \mathcal{M}$ und $\mathbf{P}(A) < \delta$. Weiter existiert ein $N \in \mathbf{N}_0$, so dass $\mathbf{P}\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3}\} < \delta$ für alle $n \geq N$. Damit gilt für $n \geq N$

$$\|X_n - X\|_p \leq \|\mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon/3\}}(|X_n| + |X|)\|_p + \|\mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon/3\}}|X_n - X|\|_p \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Proposition 1.40. *Sei $p \geq 1$ und $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dann ist $\{|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|^p, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Teil-σ-Algebra$\}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. $\{|X|^p\}$ ist gleichgradig integrierbar, also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $A \in \mathcal{F}$ und $\mathbf{P}(A) < \delta$ folgt: $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A|X|^p) < \varepsilon$. Sei $n > \delta^{-1}\mathbf{E}(|X|^p)$. Dann folgt mit Markov und Jensen

$$\mathbf{P}(|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|^p \geq n) \leq \frac{1}{n}\mathbf{E}(|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|^p) \leq \frac{1}{n}\mathbf{E}(\mathbf{E}(|X|^p|\mathcal{G})) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(|X|^p) < \delta$$

und somit

$$\int_{\{|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|^p \geq n\}} |E(X|\mathcal{G})|^p \mathrm{d}\mathbf{P} \leq \int_{\{|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|^p \geq n\}} \mathbf{E}(|X|^p|\mathcal{G}) \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\{|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|^p \geq n\}} |X|^p \mathrm{d}\mathbf{P} < \varepsilon.$$

□

Satz 1.41. *Sei $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Martingal. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

a) $\mathbf{X}$ *ist regulär.*

b) $\sup_{n \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$ *und für den f.s. Limes X_∞ gilt $X_\infty \in L^1$ und $X_n = \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ f.s. für alle $n \in \mathbf{N}_0$.*

c) Es existiert $X' \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $X_n = \mathbf{E}(X'|\mathcal{F}_n)$ f.s. für alle $n \in \mathbf{N}_0$.

d) $\{X_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis.

a) ⇒ b) dies wurde in Satz 1.33 gezeigt.

b) ⇒ c) klar.

c) ⇒ d) dies wurde in Proposition 1.40 gezeigt.

d) ⇒ a) Die gleichgradige Integrierbarkeit impliziert nach 1.36 ii) $\sup_{n \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, also konvergiert X_n fast sicher gegen eine Zufallsgröße X_∞ (nach Satz 1.28). Aus Satz 1.39 folgt, dass $\mathbf{X}$ regulär ist.

$\square$

Bemerkung 1.42. Ist $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal, und ersetzt man in Satz 1.41 alle "$=$" durch "$\leq$", dann gilt a) $\Leftrightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c). (Übungsaufgabe: man zeige c) $\Rightarrow$ b) !).

Ist $\mathbf{X}$ die in -1 startende symmetrische Irrfahrt mit Absorption in Null, so erfüllt $\mathbf{X}$ b) mit "$\leq$" statt "$=$" (wobei $X_\infty \equiv 0$), nicht aber a) (vgl. 1.31 a)).

Satz 1.43. *Sei $p > 1$ und $\mathbf{X}$ ein $\mathbf{F}$-Martingal. Gilt $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E}(|X_n|^p) < \infty$, so ist $\mathbf{X}$ regulär und X_n konvergiert in L^p.*

Beweis. Nach 1.36(iv) (mit $G(x) = x^p$) ist $X_n, n \in \mathbf{N}$ gleichgradig integrierbar, also nach Satz 1.41 regulär. Sei X_∞ der (f.s. und L^1) Grenzwert. Dann gilt $X_n = \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)$. Nach Fatou folgt $\mathbf{E}(|X_\infty|^p) \leq \sup_{n \in \mathbf{N}_0} \mathbf{E}(|X_n|^p) < \infty$ und mit Jensen

$$|X_n|^p = |\mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)|^p \leq \mathbf{E}(|X_\infty|^p|\mathcal{F}_n).$$

Nach Proposition 1.40 und Bemerkung 1.35f) ist $\{|X_n|^p, n \in \mathbf{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar. Aus Satz 1.39 folgt schließlich $X_n \to X_\infty$ in L^p. $\square$

Bemerkung 1.44. Satz 1.43 ist falsch für $p = 1$ (vgl. 1.31 a)). Für $\mathbf{F}$-Submartingale und $p > 1$ ist Satz 1.43 ebenfalls falsch. Als Beispiel mit $p = 2$ wähle $X_0 \equiv X_1 \equiv -2^{1/2}, \mathbf{P}(X_{n+1} = -2^{(n+1)/2}|X_n < 0) = 1/2 = \mathbf{P}(X_{n+1} = 0|X_n < 0)$ für $n \in \mathbf{N}$ und $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1$. Es folgt $\mathbf{E}X_n^2 = 2$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ und $\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n = -2^{n/2}) = -2^{(n+1)/2} \cdot 1/2 > -2^{n/2}$. Daher konvergiert X_n fast sicher gegen $X_\infty \equiv 0$, aber **nicht** in L^2!

Proposition 1.45. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $X_n := \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$. Dann gilt $X_n \to \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ fast sicher und in L^1.*

Beweis. $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ist nach 1.17 d) ein Martingal, welches nach Satz 1.41 regulär ist, konvergiert also fast sicher und in L^1 gegen eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare integrierbare Zufallsgröße X_∞. Weiter gilt $X_n = \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$. Zu zeigen ist $X_\infty = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$. Da X_∞ $\mathcal{F}_\infty$-messbar ist, bleibt nur zu zeigen, dass für alle $A \in \mathcal{F}_\infty$

$$\int_A X_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbf{P}$$

ist. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller $A \in \mathcal{F}_\infty$, für die dies gilt. $\mathcal{A}$ ist ein Dynkinsystem, welches $\mathcal{M} := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ enthält (da $X_n = \mathbf{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_n)$). Da $\mathcal{M}$ $\cap$-stabil ist und $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{M})$ folgt $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty$. $\square$

Wir zeigen noch eine Verallgemeinerung des Stoppsatzes 1.19 auf reguläre Submartingale. Dazu ist das folgende Lemma nützlich:

Lemma 1.46. *Sei* $\mathbf{X}$ *ein reguläres* $\mathbf{F}$*-Submartingal und* T *eine Stoppzeit, dann ist* $\{X_{T\wedge n}, n \in \mathbf{N}_0\}$ *gleichgradig integrierbar.*

Beweis. (nach Durrett, Probability: Theory and Examples, 1991):

Nach 1.18 b) ist $(X_n^+)_{n\in\mathbf{N}_0}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal. Nach dem Stoppsatz 1.19 folgt $\mathbf{E}X_{T\wedge n}^+ \le \mathbf{E}X_n^+$. Nach 1.21 ist $X_{T\wedge n}, n \in \mathbf{N}_0$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal, welches wegen $\sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}X_{T\wedge n}^+ \le \sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}X_n^+ \le \sup_{n\in\mathbf{N}_0} \mathbf{E}|X_n| < \infty$ nach dem Martingalkonvergenzsatz 1.28 fast sicher konvergiert und zwar gegen X_T mit $\mathbf{E}|X_T| < \infty$ (wobei $X_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$).

Nun gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|X_{T\wedge n}\cdot \mathbb{1}_{\{|X_{T\wedge n}|\ge a\}}| &= \mathbf{E}|X_T \cdot \mathbb{1}_{\{|X_T|\ge a\}} \cdot \mathbb{1}_{\{T\le n\}}| \\ &\quad + \mathbf{E}|X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\ge a\}} \cdot \mathbb{1}_{\{T>n\}}| \\ &\le \mathbf{E}|X_T \cdot \mathbb{1}_{\{|X_T|\ge a\}}| + \mathbf{E}|X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\ge a\}}|,\end{aligned}$$

woraus wegen $\mathbf{E}|X_T| < \infty$ und der gleichgradigen Integrierbarkeit der $X_n, n \in \mathbf{N}_0$ die der $X_{T\wedge n}, n \in \mathbf{N}_0$ folgt. □

Stoppsatz 1.47. *Sei* $\mathbf{X}$ *ein reguläres* $\mathbf{F}$*-Submartingal und* S *und* T *Stoppzeiten. Dann gilt*

$$\mathbf{E}(X_T|\mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T}$$

mit Gleichheit, falls $\mathbf{X}$ *ein Martingal ist (wobei* $X_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$*).*

Beweis. Sei $N \in \mathbf{N}_0$. Nach Satz 1.19 gilt

$$\mathbf{E}(X_{T\wedge N}|\mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T\wedge N} \text{ f.s.}$$

Nach 1.21 ist $X_{T\wedge N}, N \in \mathbf{N}_0$ ein $\mathbf{F}-$Submartingal, welches nach Lemma 1.46 und Bemerkung 1.42 gegen X_T in L^1 konvergiert, woraus

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big|\mathbf{E}(X_{T\wedge N}|\mathcal{F}_S) - \mathbf{E}(X_T|\mathcal{F}_S)\big| &\le \mathbf{E}(\mathbf{E}(|X_{T\wedge N} - X_T||\mathcal{F}_S)) \\ &= \mathbf{E}|X_{T\wedge N} - X_T| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

folgt. Bildet man also in der Ungleichung

$$\mathbf{E}(X_{T\wedge N}|\mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T\wedge N}$$

beidseitig Grenzwerte $N \to \infty$ (links in L^1, rechts fast sicher), so folgt

$$\mathbf{E}(X_T|\mathcal{F}_S) \ge X_{S\wedge T}.$$

Ist $\mathbf{X}$ ein Martingal, so sind $\mathbf{X}$ und $-\mathbf{X}$ Submartingale. Also gilt in diesem Fall Gleichheit. □

Oft ist die folgende Abschätzung nützlich.

Satz 1.48. *(Doobs L^p-Ungleichung) Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $\mathbf{F}$*-Martingal oder nichtnegatives* $\mathbf{F}$*-Submartingal,* $N \in \mathbf{N}_0$ *und* $1 < p < \infty$*. Dann gilt*

$$\mathbf{E}(\max_{0\le n\le N} |X_n|^p) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}(|X_N|^p).$$

Beweis. Nach Proposition 1.18 ist in jedem Fall $(|X_n|)_{n\in\mathbf{N}_0}$ ein $\mathbf{F}$-Submartingal. O.b.d.A. sei $\mathbf{E}|X_N|^p < \infty$. Dann folgt mit Jensen für $k \le N$

$$\mathbf{E}|X_k|^p \le \mathbf{E}\big|\mathbf{E}\big(|X_N|\big|\mathcal{F}_k\big)\big|^p \le \mathbf{E}|X_N|^p < \infty.$$

Sei

$$V := \max_{1\le n\le N} |X_n|, \qquad U := |X_N|.$$

Es gilt

$$\mathbf{E}V^p \le \mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^N |X_n|^p\right) < \infty \text{ und}$$

$$\frac{1}{p}\|V\|_p^p = \mathbf{E}\left(\frac{V^p}{p}\right) = \int_\Omega \int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{1}_{\{V\ge y\}}(\omega)\mathrm{d}y\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \underset{Fubini}{=} \int_0^\infty y^{p-1}\mathbf{P}(V\ge y)\mathrm{d}y$$

$$\underset{1.25}{\le} \int_0^\infty y^{p-2}\int_{\{V\ge y\}} U(\omega)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\mathrm{d}y \underset{Fubini}{=} \int_\Omega U(\omega)\int_0^{V(\omega)} y^{p-2}\mathrm{d}y\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)$$

$$= \mathbf{E}\left(U\frac{V^{p-1}}{p-1}\right) \underset{Hoelder}{\le} \frac{1}{p-1}\|U\|_p\,\|V^{p-1}\|_{p/p-1} = \frac{1}{p-1}\|U\|_p\|V\|_p^{p-1},$$

woraus $\|V\|_p \le \frac{p}{p-1}\,\|U\|_p$ und somit die Behauptung folgt. □

Satz 1.49. *(Charakterisierung von Martingalen)*
Sei $\mathbf{X} = (X_0, X_1, ...)$ *ein* $\mathbf{F}$*-adaptierter reellwertiger Prozess mit* $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ *für alle* $n \in \mathbf{N}_0$*. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{X}$ *ist ein* $\mathbf{F}$*-Martingal.*

(ii) $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0$ *für jede* $\mathbf{F}$*-Stoppzeit* T *mit* $\sup_{\omega\in\Omega} T(\omega) < \infty$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): folgt aus dem Stoppsatz 1.19 mit $S = 0$.
(ii) ⇒ (i): sei $n \in \mathbf{N}_0$, $A \in \mathcal{F}_n$ und $T(\omega) := n\mathbb{1}_{A^c}(\omega) + (n+1)\mathbb{1}_A(\omega)$. T ist eine Stoppzeit, da $\{T = n\} = A^c \in \mathcal{F}_n$ und $\{T = n+1\} = A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Weiter gilt:

$$\mathbf{E}(X_n\mathbb{1}_{A^c}) + \mathbf{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) = \mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0 = \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}(X_n\mathbb{1}_{A^c}) + \mathbf{E}(X_n\mathbb{1}_A).$$

Also folgt

$$\mathbf{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) = \mathbf{E}(X_n\mathbb{1}_A)$$

für alle $A \in \mathcal{F}_n$ und somit $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ f.s. □

Nun formulieren wir noch eine nützliche Aussage zur gleichgradigen Integrierbarkeit.

Satz 1.50. *Sind X_1, $X_2, ...$ identisch verteilte Zufallsgrößen in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so ist die Familie $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right\}$, $n \in \mathbf{N}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ unabhängige auf Zufallsvariable U_1, $U_2, ...$ definiert sind, $n \in \mathbf{N}$ und diese auch unabhängig von $X_1, ...$ sind, so dass U_n auf $\{1, ..., n\}$ gleichverteilt ist. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ und $X^{(n)} := X_{U_n}$, $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt $\mathbf{E}(X^{(n)}|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $X^{(n)}$ hat dieselbe Verteilung wie die X_i. Die Behauptung folgt nun mittels einer offensichtlichen Verallgemeinerung von Proposition 1.40: Sind $X^{(1)}$, $X^{(2)}, ...$ identisch verteilt in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so ist $\{\mathbf{E}(X^{(n)}|\mathcal{G}),\ \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Teil-σ-Algebra, $n \in \mathbf{N}\}$ gleichgradig integrierbar. □

Bemerkung 1.51. Die letzte Aussage zeigt (zusammen mit Satz 1.39), dass immer dann, wenn für eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen X_1, $X_2, ...$ ein schwaches Gesetz der großen Zahlen gilt, das heißt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, diese Konvergenz auch in L^1 stattfindet.

Zum Abschluss noch eine Übungsaufgabe.

Aufgabe 1.52. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Ist $\mathbf{X} = (X_0, X_1, ...)$ ein $\mathbf{F}$-Martingal, so stimmen die Mengen $\{\omega : \sup\{X_n, n \geq 0\} < \infty\}$ und $\{\omega : \inf\{X_n, n \geq 0\} > -\infty\}$ bis auf eine Nullmenge überein.