5 Brownsche Bewegung (Version 13.2.2018)

Wir führen zuerst die Definition einer Brownschen Bewegung ein und zeigen dann, dass ein solcher Prozess existiert. Danach beweisen wir eine Reihe von Eigenschaften der Brownschen Bewegung, wie das Gesetz vom iterierten Logarithmus und die Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade der Brownschen Bewegung.

5.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir erinnern zunächst daran, dass ein reellwertiger Prozess $(X_i)_{i\in I}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *Gaußprozess* heisst, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $i_1, ..., i_m \in I$ der Vektor $(X_{i_1}, ..., X_{i_m})$ normalverteilt ist.

Definition 5.1. Ein reellwertiger stochastischer Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *Wienerprozess* oder *Brownsche Bewegung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften gelten:

(i) W ist ein Gaußprozess mit $\mathbb{E}W_t = 0$ und $\operatorname{cov}(W_s, W_t) = s \wedge t$ für alle $s, t \geq 0$,

(ii) $t \mapsto W_t(\omega)$ ist stetig für fast alle $\omega \in \Omega$ (d.h. W hat *stetige Pfade*).

Bemerkung 5.2. Aus den Tatsachen, dass $\mathbb{E}W_0 = 0$ und $\operatorname{cov}(W_0, W_0) = 0$ folgt $W_0 = 0$ fast sicher.

Wir zeigen die Existenz eines solchen Prozesses mit dem Satz von Donsker (wir werden später eine alternative Möglichkeit diskutieren).

Sei wie im letzten Kapitel $(C, \mathcal{B}(C), \mu)$ der *Wienerraum*, das heißt, $\mathcal{B}(C)$ ist die Borel-σ-Algebra auf $C = C[0,1]$ und μ das Wienermaß auf $(C, \mathcal{B}(C))$. Seien $W^{(1)}, W^{(2)}, ...$ unabhängige $(C, \mathcal{B}(C))$-wertige Zufallsvariable mit Verteilung μ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir definieren

$$W_t(\omega) := \sum_{k=1}^{n-1} W_1^{(k)}(\omega) + W_{t-(n-1)}^{(n)}(\omega), \text{ falls } n-1 \leq t < n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5.3. *Der soeben definierte Prozess W ist ein Wienerprozess.*

Beweis. W hat nach Konstruktion stetige Pfade und ist ein Gaußprozess. Offenbar gilt $\mathbb{E}W_t = 0$ für alle $t \geq 0$. Weiter gilt für $0 \leq s \leq t$ mit $m-1 \leq s < m$, $n-1 \leq t < n$:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(W_s, W_t) &= \mathbb{E}\Big(\Big(\textstyle\sum_{k=1}^{m-1} W_1^{(k)} + W_{s-(m-1)}^{(m)}\Big)\Big(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} W_1^{(j)} + W_{t-(n-1)}^{(n)}\Big)\Big)\\ &= m-1+(s-(m-1)) = s = s \wedge t.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.4. Man kann sich fragen, ob Eigenschaft (ii) in Definition 5.1 nicht automatisch aus (i) folgt. Dass dem nicht so ist, zeigt das folgende Argument. Wenn $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wienerprozess auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist (also insbesondere stetige Pfade hat), und X eine von W unabhängige auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgröße, dann erfüllt

$$\tilde{W}_t(\omega) := W_t(\omega) + \mathbf{1}_{X(\omega)+\mathbb{Q}}(t)$$

Eigenschaft (i) von Definition 5.1, aber W hat nicht nur keine stetigen Pfade, sondern mit Wahrscheinlichkeit 1 sind sogar alle Pfade in jedem Punkt unstetig.

Proposition 5.5. *Ein Wienerprozess $(W_t)_{t\geq 0}$ hat* unabhängige Zuwächse*, das heißt für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ sind die Zufallsgrößen $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ unabhängig.*

Beweis. Der Vektor $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und $\operatorname{cov}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \delta_{ij}(t_i - t_{i-1})$. Da bei einem normalverteilten Vektor die Komponenten unabhängig sind genau dann wenn sie unkorreliert sind, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.6. Es gilt auch eine Art (einfach zu zeigende) Umkehrung von Proposition 5.5: Ist $(W_t)_{t\geq 0}$ ein reeller Prozess mit stetigen Pfaden und unabhängigen Zuwächsen und ist für jedes $0 \leq s < t < \infty$ $W_t - W_s$ normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz $t - s$, dann ist W ein Wienerprozess.

Wir formulieren nun wichtige Invarianzeigenschaften des Wienerprozesses.

Proposition 5.7. *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wienerprozess und seien $c, s > 0$. Dann sind die Prozesse*

(i) $W_t^{(1)}(\omega) := -W_t(\omega), \quad t \geq 0,$

(ii) $W_t^{(2)}(\omega) := c\, W_{c^{-2}t}(\omega), \quad t \geq 0,$

(iii) $W_t^{(3)}(\omega) := \begin{cases} t\, W_{1/t}(\omega), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

(iv) $W_t^{(4)}(\omega) := W_{t+s}(\omega) - W_s(\omega), \quad t \geq 0$

ebenfalls Wienerprozesse.

Beweis. Offensichtlich sind alle $W^{(i)}$ Gaußprozesse. Man rechnet leicht nach, dass sie zentriert sind und dieselbe Kovarianzfunktion wie ein Wienerprozess haben. Weiter haben $W^{(1)}, W^{(2)}$ und $W^{(4)}$ offensichtlich fast sicher stetige Pfade. Man überzeugt sich sehr leicht davon, dass dies auch für $W^{(3)}$ so ist (da $W^{(3)}$ auf $(0,\infty)$ stetig ist und $W^{(3)}(0) = 0$ ist). □

5.2 Das Gesetz vom iterierten Logarithmus

Wir formulieren und beweisen nun das Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Brownsche Bewegung. Dazu benötigen wir noch ein Lemma, welches auch sonst sehr nützlich ist.

Lemma 5.8. *Es gelten folgende Abschätzungen:*

a) $\int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y \leq \frac{1}{x}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$ *für* $x > 0$,

b) $\int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y \sim \frac{1}{x}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$ *für* $x \to \infty$,

c) $\int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$ *für* $x \geq 0$.

Beweis.

a) $\int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y \leq \int_x^\infty \frac{y}{x}\exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y \leq \frac{1}{x}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$.

b) Für $x > 0$ gilt
$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \int_x^\infty \left(1 - \frac{3}{y^4}\right)\exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y \leq \int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y$,
woraus mit Teil a) die Behauptung folgt.

c) Es gilt für $x > 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y\Big) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\Big(-\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x\int_x^\infty \exp\{-\frac{y^2}{2}\}\ \mathrm{d}y\Big) \leq 0,$$

wobei das letzte "$\leq$" aus Teil a) folgt. Da die Ungleichung in c) offensichtlich für $x = 0$ gilt, folgt die Behauptung.

□

Satz 5.9. *(Gesetz vom iterierten Logarithmus)*
Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ *ein Wienerprozess. Dann gilt*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1\ \textit{f.s.}.$$

Beweis. (nach Durrett: *Probability: Theory and Examples*)
Wir zeigen zuerst, dass die linke Seite kleiner oder gleich der rechten ist. Sei zunächst $g : [0,\infty) \to (0,\infty)$ monoton nichtfallend und $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ...$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Wenn

$$\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}\big\{\max_{t_n\leq s\leq t_{n+1}} W_s \geq g(t_n)\big\} < \infty, \tag{5.1}$$

dann impliziert das erste Borel-Cantelli Lemma $\limsup_{t\to\infty} W_t/g(t) \le 1$ fast sicher. Setze nun für $\alpha > 1$ $t_n = \alpha^n$ und $g(t) := \sqrt{2\alpha^2 t \log\log t}$ für hinreichend große t. Dann gilt für n hinreichend groß

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big\{\max_{t_n\le s\le t_{n+1}} W_s \ge g(t_n)\Big\} \le \mathbb{P}\Big\{\max_{0\le s\le t_{n+1}} \frac{W_s}{\sqrt{t_{n+1}}} \ge \frac{g(t_n)}{\sqrt{t_{n+1}}}\Big\}\\
&\quad = \mathbb{P}\Big\{\max_{0\le s\le 1} W_s \ge \frac{g(t_n)}{\sqrt{t_{n+1}}}\Big\} = 2\int_{g(t_n)/\sqrt{t_{n+1}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&\quad \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{t_{n+1}}}{g(t_n)}\exp\Big\{-\frac{g(t_n)^2}{2t_{n+1}}\Big\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\alpha^{n+1}}}{\sqrt{2\alpha^{n+2}\log(\log\alpha^n)}}\exp\Big\{-\frac{2\alpha^{n+2}\log(\log\alpha^n)}{2\alpha^{n+1}}\Big\}\\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha\log(\log\alpha^n)}}\exp\{-\alpha(\log n + \log\log\alpha)\} \le c_\alpha n^{-\alpha},
\end{aligned}$$

wobei wir Teil a) des obigen Lemmas benutzten. Wegen $\alpha > 1$ konvergiert also die Reihe (5.1). Da $\alpha > 1$ beliebig war, folgt somit

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \le 1 \text{ f.s.}.$$

Nun zeigen wir die andere Richtung. Wir wählen wieder $t_n = \alpha^n$ mit $\alpha > 1$, lassen später aber $\alpha \to \infty$ gehen. Wähle

$$g(t) := \sqrt{2t\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)^2 \log(\log t)},$$

wobei t hinreichend groß ist (damit g strikt positiv ist). Es folgt unter Benutzung von Teil b) von Lemma 5.8 und mit $\beta := \frac{\alpha-1}{\alpha}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \ge g(t_{n+1})\} &= \mathbb{P}\Big\{\frac{W_{t_{n+1}} - W_{t_n}}{\sqrt{t_{n+1}-t_n}} \ge \frac{g(t_{n+1})}{\sqrt{t_{n+1}-t_n}}\Big\}\\
&\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\alpha^n(\alpha-1)}}{g(\alpha^{n+1})}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{2\alpha^{n+1}\beta^2\log(\log\alpha^{n+1})}{\alpha^n(\alpha-1)}\Big\}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}\sqrt{\log(n+1)+\log\log\alpha}}\,(n+1)^{-\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta\log\log\alpha}.
\end{aligned}$$

Die Summe über n divergiert und daher folgt aus dem zweiten Borel-Cantelli Lemma wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von W, dass fast sicher für unendlich viele n gilt:

$$W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \ge \sqrt{2t_{n+1}\beta^2\log\log t_{n+1}}.$$

Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir (wegen der Symmetrie der Verteilung von W), dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{-W_{t_n}}{\sqrt{2t_n\log\log t_n}} \le 1$$

fast sicher. Also existiert für fast alle ω zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon, \omega)$, so dass

$$-W_{t_n} \leq \sqrt{2t_n \log\log t_n}(1+\varepsilon) \leq \sqrt{2\frac{t_{n+1}}{\alpha} \log\log t_{n+1}(1+\varepsilon)}$$

für alle $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$ gilt, also - mit der Abkürzung $\gamma_n := \sqrt{2t_n \log\log t_n}$:

$$\frac{W_{t_{n+1}}}{\gamma_{n+1}} = \frac{W_{t_{n+1}} - W_{t_n}}{\gamma_{n+1}} + \frac{W_{t_n}}{\gamma_{n+1}} \geq \beta - \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}$$

für unendlich viele n. Da $\alpha > 1$ beliebig war, folgt (mit $\alpha \to \infty$)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq 1 \text{ fast sicher,}$$

womit der Beweis vollständig ist. □

Ohne Beweis formulieren wir noch das bemerkenswerte allgemeinere Strassen'sche Gesetz vom iterierten Logarithmus

Satz 5.10. *Sei (W_t), $t \geq 0$ ein Wienerprozess und für $t \geq 3$ Y_t die durch*

$$Y_t(s) := \frac{W_{st}}{\sqrt{2t\log\log t}}, \quad s \in [0,1]$$

definierte C-wertige Zufallsgröße. Dann ist fast sicher die Menge aller Häufungspunkte in C von Y_t gleich

$$\mathcal{H} := \{f \in C : f(0) = 0,\ f \textit{ abs. stetig und } \int_0^1 (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t \leq 1\}.$$

5.3 Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade der Brownschen Bewegung

Wir zeigen nun die Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade der Brownschen Bewegung.

Satz 5.11. *Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung $t \mapsto W_t(\omega)$ in keinem Punkt $t \geq 0$ differenzierbar.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in Breiman: *Probability*, der sich wiederum auf eine Arbeit von Dvoretski, Erdös und Kakutani stützt. Offensichtlich genügt es, die Aussage für alle $t \in [0,1]$ zu zeigen.

Wir fixieren $\beta > 0$. Ist $f \in C[0,1]$ an der Stelle $s \in [0,1]$ differenzierbar mit Ableitung $f'(s)$, die $|f'(s)| < \beta$ erfüllt, dann existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $t \in [0,1]$ mit $|t-s| \leq 3/n$ folgt, dass $|f(t) - f(s)| \leq \beta|t-s|$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n = \{f \in C[0,1] : \exists s \text{ mit } |f(t) - f(s)| \leq \beta|t-s| \text{ für alle } t \text{ mit } |t-s| \leq \frac{3}{n}\}.$$

Dann gilt

$$A_n \uparrow A \supseteq \{f \in C[0,1] : \exists s \text{ mit } f \text{ diff.bar in } s \text{ und } |f'(s)| < \beta\}.$$

Für $f \in C[0,1]$ und $k \in \{1, ..., n-2\}$ sei

$$y_k(f) := \max\Big\{\Big|f\Big(\frac{k+2}{n}\Big) - f\Big(\frac{k+1}{n}\Big)\Big|, \Big|f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|, \Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\Big\}.$$

Für $f \in A_n$ gilt $y_k(f) \leq \frac{5\beta}{n}$ für mindestens ein $k \in \{1, ..., n-2\}$. Also folgt für

$$B_n := \Big\{f : \exists k \in \{1, ..., n-2\} \text{ so dass } y_k(f) \leq \frac{5\beta}{n}\Big\},$$

dass $A_n \subseteq B_n$. Es genügt daher, für den Wienerprozess $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{W\big|_{[0,1]} \in B_n\} = 0$ zu zeigen (für jedes $\beta > 0$). Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{W\big|_{[0,1]} \in B_n\} &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n-2} \Big\{y_k(W) \leq \frac{5\beta}{n}\Big\}\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\Big\{\max\Big\{\Big|W\Big(\frac{k+2}{n}\Big) - W\Big(\frac{k+1}{n}\Big)\Big|, \Big|W\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - W\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|, \Big|W\Big(\frac{k}{n}\Big) - W\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\Big\} \leq \frac{5\beta}{n}\Big\} \\
&\leq n\mathbb{P}\Big\{\max\Big\{\Big|W\Big(\frac{3}{n}\Big) - W\Big(\frac{2}{n}\Big)\Big|, \Big|W\Big(\frac{2}{n}\Big) - W\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big|, \Big|W\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big|\Big\} \leq \frac{5\beta}{n}\Big\} \\
&= n\Big(\mathbb{P}\Big\{\big|W\big(\frac{1}{n}\big)\big| \leq \frac{5\beta}{n}\Big\}\Big)^3 \\
&= n\Big(\mathbb{P}\Big\{|W(1)| \leq \frac{5\beta}{\sqrt{n}}\Big\}\Big)^3 \leq n\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{10\beta}{\sqrt{n}}\Big)^3 \to 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

5.4 Stetigkeitssatz von Kolmogorov und Hölderstetigkeit der Pfade

Wir formulieren und beweisen zunächst den Stetigkeitssatz von Kolmogorov, der in der Wahrscheinlichkeitstheorie vielfache Anwendung findet. Mit diesem Satz kann man nicht nur die Existenz einer stetigen Modifikation der Brownschen Bewegung zeigen, sondern sogar die Hölderstetigkeit der Pfade. Im folgenden sei für $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{und} \qquad |x|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}.$$

Definition 5.12. Seien I eine Indexmenge, $(E, \mathcal{E})$ ein Messraum und $(Z_i)_{i\in I}$ und $(\hat{Z}_i)_{i\in I}$ E-wertige Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wenn für jedes $i \in I$ gilt, dass $\mathbb{P}\{Z_i = \hat{Z}_i\} = 1$, dann heisst $\hat{Z}$ eine *Modifikation* von Z. Sind zusätzlich auf I und E Metriken gegeben (und ist $\mathcal{E}$ die zugehörige Borel-σ-Algebra auf E) und ist die Abbildung $i \mapsto \hat{Z}_i(\omega)$ stetig für (fast) alle $\omega \in \Omega$, dann heisst $\hat{Z}$ *stetige Modifikation* von Z.

Satz 5.13. (Stetigkeitssatz von Kolmogorov) *Sei (S,d) ein polnischer Raum mit vollständiger Metrik d und Z_t, $t \in [0,1]^n$ ein S-wertiger Prozess. Wenn $a,b,c>0$ existieren, so dass für alle $x,y \in [0,1]^n$*

$$\mathbb{E}\big((d(Z_x,Z_y))^a\big) \le c|x-y|_1^{n+b}$$

gilt, dann hat Z eine stetige Modifikation $\hat{Z}$. Weiter existiert für jedes $\kappa \in (0,b/a)$ eine reelle Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}(Y^a) \le \frac{cn2^{a\kappa-b}}{1-2^{a\kappa-b}}$ und

$$\sup\Big\{d(\hat{Z}_x(\omega),\hat{Z}_y(\omega)) : x,y\in[0,1]^n, |x-y|_\infty \le r\Big\} \le \frac{2n}{1-2^{-\kappa}} Y(\omega) r^\kappa \tag{5.2}$$

für jedes $r \in [0,1]$. Insbesondere gilt für alle $u>0$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{x,y\in[0,1]^n} d(\hat{Z}_x,\hat{Z}_y) \ge u\right\} \le \left(\frac{2n}{1-2^{-\kappa}}\right)^a \frac{cn2^{a\kappa-b}}{1-2^{a\kappa-b}} u^{-a}. \tag{5.3}$$

Beweis. Die Aussage (5.3) folgt mit der Markovungleichung sofort aus (5.2) mit $r=1$ und der Momentenabschätzung für Y. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} D_m &:= \{(k_1,\dots,k_n)\cdot 2^{-m};\ k_1,\dots k_n \in \{1,\dots,2^m\}\} \\ \xi_m(\omega) &:= \max\{d(Z_x(\omega),Z_y(\omega)) : x,y\in D_m, |x-y| = 2^{-m}\}. \end{aligned}$$

Die $\xi_m, m\in\mathbb{N}$ sind messbar, da (S,d) separabel ist. Weiter gilt

$$|\big\{\{x,y\}\subset D_m : |x-y| = 2^{-m}\big\}| \le n\cdot 2^{nm}.$$

Daher gilt für $\kappa \in (0,\frac{b}{a})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\sum_{m=1}^\infty (2^{\kappa m}\xi_m)^a\Big) &= \sum_{m=1}^\infty 2^{\kappa m a}\mathbb{E}(\xi_m^a) \\ &\le \sum_{m=1}^\infty 2^{\kappa m a}\mathbb{E}\Big(\sum_{\{x,y\}\subset D_m, |x-y|=2^{-m}} \big(d(Z_x(\omega),Z_y(\omega))\big)^a\Big) \\ &\le \sum_{m=1}^\infty 2^{\kappa m a}\cdot n\cdot 2^{nm}\cdot c\cdot 2^{-m(n+b)} = cn\sum_{m=1}^\infty 2^{-m(b-a\kappa)} = \frac{cn2^{a\kappa-b}}{1-2^{a\kappa-b}} < \infty. \end{aligned}$$

Daher existiert eine Menge $\Omega_0 \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(\Omega_0)=1$ so dass

$$Y(\omega) := \sup_{m\ge1}\{2^{\kappa m}\xi_m(\omega)\} < \infty \quad \text{für alle } \omega\in\Omega_0.$$

Weiter gilt

$$\mathbb{E}(Y^a) \le \mathbb{E}\Big(\sum_{m=1}^\infty (2^{\kappa m}\xi_m)^a\Big) \le \frac{cn2^{a\kappa-b}}{1-2^{a\kappa-b}}.$$

Seien $x, y \in D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ so gewählt dass $|x-y|_\infty \le r < 2^{-k}$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es eine Folge

$$x = x_1, x_2 \dots, x_l = y$$

in D so dass für alle $i = 1, \dots, l-1$ ein $n(i) \ge k+1$ existiert, so dass $x_i, x_{i+1} \in D_{n(i)}$, $|x_i - x_{i+1}| = 2^{-n(i)}$ und

$$|\{i \in \{1, \dots, l-1\} : n(i) = M\}| \le 2n \quad \text{für alle } M \ge k+1.$$

gilt. Für $\omega \in \Omega_0$ und $0 < r < 1$ mit $2^{-k-1} \le r < 2^{-k}$ gilt mit der Dreiecksungleichung für d

$$\begin{aligned} & \sup\{d(Z_x(\omega), Z_y(\omega)); x, y \in D, |x-y|_\infty \le r\} \\ \le \;& 2n \sum_{m=k+1}^{\infty} \xi_m(\omega) \le 2nY(\omega) \sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-\kappa m} \\ = \;& 2^{-\kappa(k+1)} \frac{2n}{1-2^{-\kappa}} Y(\omega) \le \frac{2n}{1-2^{-\kappa}} Y(\omega) r^\kappa. \end{aligned}$$

Also ist für jedes $\omega \in \Omega_0$ die Abbildung $x \mapsto Z_x(\omega)$ von D nach S gleichmäßig stetig. Da D dicht in $[0,1]^n$ liegt und (S, d) vollständig ist, lässt sich für jedes $\omega \in \Omega_0$ die Abbildung eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\hat{Z}$ auf $[0,1]^n$ fortsetzen. Auf Ω_0^c wählen wir einfach $\hat{Z}$ als eine beliebige Konstante. Es bleibt zu zeigen, dass $\hat{Z}$ eine Modifikation von Z ist. Sei $x \in [0,1]^n$. Dann existiert eine Folge $x_1, x_2, ...$ in D, die gegen x konvergiert. Da $\hat{Z}_{x_i} = Z_{x_i}$ fast sicher und $\lim_{i\to\infty} \hat{Z}_{x_i} = \hat{Z}_x$ ganz sicher (wegen Stetigkeit) und $\lim_{i\to\infty} Z_{x_i} = Z_x$ in Wahrscheinlichkeit (nach Voraussetzung), folgt $\hat{Z}_x = Z_x$ fast sicher, das heißt, $\hat{Z}$ ist eine Modifikation von Z. □

Korollar 5.14. *Für jedes $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ sind fast alle Pfade des Wienerprozesses Hölderstetig zum Exponent α, das heißt, für jedes $T > 0$ existiert eine reelle Zufallsgröße V_T, so dass $|W_t - W_s| \le V_T |t-s|^\alpha$ für alle $0 \le s, t \le T$ gilt.*

Beweis. Wegen der Skalierungseigenschaft des Wienerprozesses können wir $T = 1$ annehmen. Wir überprüfen die Voraussetzungen des Kolmogorovschen Stetigkeitssatzes 5.13 mit $E = \mathbb{R}$, $n = 1$ und $Z = W$: es gilt für beliebiges $a > 0$ und $0 \le s \le t \le 1$

$$\mathbb{E}(|W_t - W_s|^a) = |t-s|^{a/2} \mathbb{E}(|W_1|^a).$$

Da für eine normalverteilte Zufallsgröße alle Momente endlich sind, sind für jedes $a > 2$ die Voraussetzungen des Stetigkeitssatzes mit $b := \frac{a}{2} - 1$ und $c := \mathbb{E}(|W_1|^a)$ erfüllt. Dabei ist $b/a = \frac{1}{2} - \frac{1}{a}$, das heißt, für jedes $\kappa \in (0, 1/2)$ finden wir ein hinreichend großes a, so dass $\kappa < b/a$ ist. Somit folgt die Aussage des Korollars aus (5.2). □

5.5 Alternative Konstruktion der Brownschen Bewegung

In diesem Abschnitt zeigen wir eine andere Möglichkeit der Konstruktion der Brownschen Bewegung, die den Satz von Donsker nicht voraussetzt. Wir konstruieren einen reellwertigen Prozess W_t, $t \in [0,1]$ mit Verteilung μ (Wienermaß) auf $(C, \mathcal{B}(C))$ (die Erweiterung auf das Intervall $[0,\infty)$ kann man dann wie am Anfang des Kapitels durchführen).

Gegeben sei eine Orthonormalbasis (ONB) ϕ_i, $i \in \mathbb{N}$ von $L^2[0,1]$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$. Weiter sei X_1, $X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$W_t^n := \sum_{i=1}^n X_i \int_0^t \phi_i(s)\ \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

Satz 5.15. *Für jedes $t \in [0,1]$ ist die Folge W_t^n, $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sei W_t der Grenzwert der Folge. Dann ist W_t, $t \in [0,1]$ ein Gaußprozess mit $\mathbb{E}W_t = 0$ und $\operatorname{cov}(W_s, W_t) = s \wedge t$ für $0 \le s, t \le 1$, das heißt, W erfüllt Eigenschaft (i) von Definition 5.1 auf dem Intervall $[0,1]$.*

Beweis. Für $0 \le s, t \le 1$ sei

$$I_t(s) := \begin{cases} 1, & s < t \\ 0, & s \ge t \end{cases}$$

Dann folgt

$$\int_0^t \phi_i(s)\ \mathrm{d}s = \langle I_t, \phi_i\rangle.$$

Da ϕ_i, $i \in \mathbb{N}$ eine ONB von $L^2[0,1]$ ist, folgt

$$I_t = \sum_{i=1}^\infty \langle I_t, \phi_i\rangle \phi_i \text{ und } t = \|I_t\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \langle I_t, \phi_i\rangle^2.$$

Für $n > m$ folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_t^n - W_t^m)^2 &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=m+1}^n X_i \int_0^t \phi_i(s)\ \mathrm{d}s\Big)^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^n \langle I_t, \phi_i\rangle^2 \to 0 \text{ mit } m, n \to \infty. \end{aligned}$$

Also ist W_t^n, $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Da $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $W_t = \sum_{i=1}^\infty X_i \int_0^t \phi_i(s)\ \mathrm{d}s$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1$ ist der Vektor $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$ normalverteilt und daher W_t, $t \in [0,1]$ ein Gaußprozess. Weiter gilt $\mathbb{E}W_t = 0$ für alle $t \in [0,1]$. Schließlich gilt für $0 \le s, t \le 1$

$$\mathbb{E}W_s W_t = \sum_{i=1}^\infty \Big(\int_0^s \phi_i(u)\ \mathrm{d}u \int_0^t \phi_i(v)\ \mathrm{d}v\Big) = \sum_{i=1}^\infty \big(\langle I_s, \phi_i\rangle \langle I_t, \phi_i\rangle\big) = \langle I_s, I_t\rangle = s \wedge t,$$

womit die Aussage gezeigt ist. $\square$

Damit ist noch nicht garantiert, dass der im letzten Satz konstruierte Prozess ein Wienerprozess ist. Dazu muss man zeigen, dass die Pfade $t \mapsto W_t(\omega)$ fast sicher stetig sind. Das muss aber keineswegs so sein. Mit dem Stetigkeitssatz von Kolmogorov (Satz 5.13) sehen wir aber, dass der Prozess $t \mapsto W_t(\omega)$ eine stetige Modifikation $\tilde{W}_t$, $t \in [0,1]$ besitzt und diese ist nach Konstruktion ein Wienerprozess auf $[0,1]$. Alternativ gibt es aber auch eine explizite Konstruktion, welche ohne Referenz auf den Stetigkeitssatz von Kolmogorov auskommt. Wir versuchen dabei, die Konstruktion im letzten Satz so zu gestalten, dass die Folge W_t^n nicht nur für jedes t in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvergiert, sondern sogar fast sicher gleichmäßig in $t \in [0,1]$. Dann folgt die fast sichere Stetigkeit von $t \mapsto W_t$ und wir sind fertig.

Um diesen Weg zu gehen, wählen wir eine spezielle ONB von $L^2([0,1])$, nämlich die sogenannten *Haarfunktionen* $\{f_0,\ f_{n,j},\ j = 1, ..., 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}\}$. Diese sind definiert als $f_0(t) \equiv 1$ und, mit $k = 2j - 1$,

$$f_{n,j}(t) = \begin{cases} 2^{(n-1)/2}, & \frac{k-1}{2^n} < t \le \frac{k}{2^n} \\ -2^{(n-1)/2}, & \frac{k}{2^n} < t \le \frac{k+1}{2^n} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft sehr leicht, dass dies ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$ ist. Nicht ganz so klar ist, dass es sich sogar um eine ONB handelt. Dies folgt aus der folgenden Proposition.

Proposition 5.16. *Sei $f \in L^2[0,1]$ mit der Eigenschaft, dass $\langle f, f_0 \rangle = 0$ und $\langle f, f_{n,j} \rangle = 0$ für alle j, n. Dann folgt $f = 0$.*

Beweis. Für ein solches f gilt, wie man leicht sieht, für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le k \le l \le 2^n$

$$\int_{k/2^n}^{l/2^n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Sei nun

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}[0,1] : \int_A f(t)\ \mathrm{d}t = 0\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem, welches ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}[0,1]$ enthält und daher gilt $\mathcal{D} = \mathcal{B}[0,1]$ nach dem Hauptsatz über Dynkinsysteme. Daraus folgt leicht $f = 0$ fast sicher (wie beim Beweis der Eindeutigkeit der bedingten Erwartung). $\square$

Nun definieren wir die *Schauderfunktionen* $\{F_0,\ F_{n,j}\}$ als Integrale der Haarfunktionen, also

$$F_0(t) = t$$

und

$$F_{n,j}(t) = \begin{cases} 2^{(n-1)/2}(t - (k-1)/2^n), & \frac{k-1}{2^n} \le t \le \frac{k}{2^n} \\ 2^{(n-1)/2}((k+1)/2^n - t), & \frac{k}{2^n} \le t \le \frac{k+1}{2^n} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien $X_0, X_{n,j}, n \in \mathbb{N}, j = 1, ..., 2^{n-1}$ uiv $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt und für $t \in [0,1]$, $N \in \mathbb{N}$ sei

$$W_t^N(\omega) = X_0 F_0(t) + \sum_{n=1}^{N} V_n(t, \omega),$$

wobei

$$V_n(t,\omega) := \sum_{j=1}^{2^{n-1}} X_{n,j}(\omega) F_{n,j}(t).$$

Für jedes $\omega \in \Omega$ und $N \in \mathbb{N}$ ist $t \mapsto W_t^N(\omega)$ stetig.

Satz 5.17. *Die Folge W^N konvergiert für $N \to \infty$ fast sicher gleichmäßig gegen eine C-wertige Zufallsvariable W. W_t, $t \in [0,1]$ ist ein (auf $[0,1]$ eingeschränkter) Wienerprozess.*

Beweis. Die letzte Aussage folgt aus der ersten und Satz 5.15. Um die erste Aussage zu zeigen, definieren wir

$$H_n(\omega) := \max_{t \in [0,1]} |V_n(t,\omega))|.$$

Da für jedes n die Funktionen $F_{n,1}, ..., F_{n,2^n-1}$ disjunkte Träger haben, gilt

$$H_n(\omega) = 2^{-(n+1)/2} \max_{1 \leq j \leq 2^{n-1}} |X_{n,j}|.$$

Wenn eine Folge positiver Zahlen b_n, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_n b_n < \infty$ existiert mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_n \geq b_n) < \infty, \tag{5.4}$$

dann folgt aus dem ersten Borel-Cantelli Lemma die fast sichere Konvergenz von $\sum H_n(\omega)$ und damit die erste Behauptung.

Wir versuchen den Ansatz $b_n = \exp\{-\gamma n\}$ mit einem geeigneten $\gamma > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_n \geq \exp\{-\gamma n\}) &= \mathbb{P}\big(\max_j |X_{n,j}| \geq 2^{(n+1)/2}\, \mathrm{e}^{-\gamma n}\big) \\
&\leq 2^{n-1} \mathbb{P}\big(|X_{n,1}| \geq 2^{(n+1)/2}\, \mathrm{e}^{-\gamma n}\big) \\
&\leq 2^{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\big\{-\frac{1}{2} 2^{n+1}\, \mathrm{e}^{-2\gamma n}\big\} \\
&= \exp\{(n-1)\log 2 - 2^n\, \mathrm{e}^{-2\gamma n}\},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Lemma 5.8c) folgt. Daher gilt (5.4), wenn $\gamma < \frac{1}{2}\log 2$ und die Behauptung ist bewiesen. □

5.6 Stetigkeitsmodul der Brownschen Bewegung

Wir sahen bereits, dass die Pfade der Brownschen Bewegung Hölderstetig mit Exponent α für jedes $\alpha \in (0, 1/2)$ sind. Die folgenden Sätze verschärfen diese Aussage noch. Zuerst formulieren wir aber das lokale Gesetz vom iterierten Logarithmus für den Wienerprozess.

Satz 5.18. *Für den Wienerprozess W_t, $t \geq 0$ gilt*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{W_h}{\sqrt{2h \log\log 1/h}} = 1 \textit{ f.s.}$$

Beweis. Sei $\tilde{W}_t := tW_{1/t}$, $t > 0$ und $\tilde{W}_0 := 0$. Dann ist $\tilde{W}$ nach Proposition 5.7(iii) ein Wienerprozess. Aus Satz 5.9 folgt daher mit $t = 1/h$

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\downarrow 0} \frac{W_h}{\sqrt{2h \log\log 1/h}} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{W}_t}{t\sqrt{2\frac{1}{t}\log\log t}} \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{W}_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \text{ f.s.}
\end{aligned}$$

□

Aus dieser Aussage folgt zusammen mit Proposition 5.7(iv) sofort die folgende Aussage.

Korollar 5.19. *Für jedes* $s \geq 0$ *gilt*

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{W_{s+h} - W_s}{\sqrt{2h\log\log 1/h}} = 1 \textit{ f.s.} \tag{5.5}$$

Wir betonen, dass dies *nicht* bedeutet, dass fast sicher (5.5) für jedes $s \in [0,1]$ gilt. Es ist sogar so, dass dies nicht nur nicht aus dem letzten Korollar folgt, sondern sogar falsch ist. Ist zum Beispiel $s \in (0,1)$ eine lokale Maximalstelle von $t \mapsto W_t(\omega)$, dann ist s zufällig und es gilt für dieses s

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{W_{s+h} - W_s}{\sqrt{2h\log\log 1/h}} \leq 0.$$

Wir untersuchen nun den Stetigkeitsmodul der Brownschen Bewegung auf $[0,1]$.

Definition 5.20. Sei $f \in C$. Dann heißt die Funktion

$$w_\delta(f) := \max_{0<h\leq\delta} \max_{0\leq t\leq 1-h} |f(t+h) - f(t)|, \quad \delta \in (0,1]$$

Stetigkeitsmodul von f.

Die Funktion $\delta \mapsto w_\delta(f)$ ist offensichtlich nicht-fallend und es gilt $\lim_{\delta\downarrow 0} w_\delta(f) = 0$, da jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig ist. Weiter gilt offensichtlich

$$w_{\delta+\varepsilon}(f) \leq w_\delta(f) + w_\varepsilon(f),\ \delta, \varepsilon > 0,\ \delta + \varepsilon \leq 1. \tag{5.6}$$

Setzt man für f die Brownsche Bewegung W auf dem Intervall $[0,1]$ ein, so ist $w_\delta(W)$ zufällig, aber man kann immerhin darauf hoffen, dass die Asymptotik von $w_\delta(W)$ für $\delta \downarrow 0$ deterministisch ist, das heißt, dass es eine deterministische Funktion $\varphi : (0,1] \to (0,\infty)$ gibt, so dass $\lim_{\delta\downarrow 0} w_\delta(W)/\varphi(\delta) = 1$ fast sicher gilt.

Wenn dies so ist, dann muss wegen Satz 5.18 $\limsup_{\delta\downarrow 0} \varphi(\delta)/\sqrt{2\delta\log\log\frac{1}{\delta}} \geq 1$ gelten. Wir werden weiter unten sehen, dass dieser $\limsup$ sogar unendlich ist, die Funktion $\varphi(t)$ also mit $t \downarrow 0$ (viel) langsamer gegen Null geht als $t \mapsto \sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}$.

Wir werden gleich eine Funktion φ und Zahlen $0 < c_1 \le c_2 < \infty$ angeben, für die gilt:

$$c_1 \le \liminf_{\delta \downarrow 0} w_\delta(W)/\varphi(\delta) \le \limsup_{\delta \downarrow 0} w_\delta(W)/\varphi(\delta) \le c_2, \text{ f.s.}$$

Wir zeigen die Ungleichungen für $\varphi(\delta) := \sqrt{\delta \log \frac{1}{\delta}}$, wobei wir zuerst die linke Ungleichung mit $c_1 = \sqrt{2}$ zeigen.

Proposition 5.21. *Es gilt fast sicher*

$$\liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w_\delta(W)}{\sqrt{\delta \log \frac{1}{\delta}}} \ge \sqrt{2}.$$

Beweis. Sei Y eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße, $n \in \mathbb{N}$ und $c_n > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\max_{k\in\{0,\dots,n-1\}} W\big(\frac{k+1}{n}\big) - W\big(\frac{k}{n}\big) \le \frac{1}{\sqrt{n}} c_n\big) &= \big(1 - \mathbb{P}\big(Y \ge c_n\big)\big)^n \\ &\le \big(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c_n} \exp\big\{-\frac{1}{2} c_n^2\big\}\big)^n,\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Ungleichheitszeichen Lemma 5.8 b) mit einer geeigneten Konstanten $\alpha \in (0,1)$ verwendeten und die Ungleichung dann nur für hinreichend große c_n gilt. Wir wollen nun c_n so wählen, dass der letzte Ausdruck (hinreichend schnell) mit $n \to \infty$ gegen Null geht. Dazu bietet sich die Wahl $c_n = \sqrt{2\beta \log n}$ mit $\beta \in (0,1)$ an. Wir setzen diesen Wert in die letzte Formel ein, verwenden die Ungleichung $1 - x \le \exp\{-x\}$ und erhalten

$$= \big(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c_n} n^{-\beta}\big)^n \le \exp\{-\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c_n} n^{1-\beta}\}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert mit $n \to \infty$ so schnell gegen Null, dass sogar die entsprechende Reihe über n konvergiert. Nach dem ersten Borel-Cantelli Lemma folgt daher, dass fast sicher ein $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\max_{k\in\{0,\dots,n-1\}} W\big(\frac{k+1}{n}\big) - W\big(\frac{k}{n}\big) > \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2\beta \log n}$$

für alle $n \ge n_0$ gilt, woraus sofort die Behauptung folgt. □

Bemerkung 5.22. Man beachte, dass die letzte Proposition insbesondere besagt, dass die Pfade des Wienerprozesses auf $[0,1]$ fast sicher *nicht* Hölderstetig mit Exponent $1/2$ (und damit erst recht nicht Hölderstetig mit Exponent α für irgendein $\alpha > 1/2$ sind).

Nun zeigen wir eine umgekehrte Ungleichung.

Proposition 5.23. *Es gilt fast sicher*

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w_\delta(W)}{\sqrt{\delta \log \frac{1}{\delta}}} \le 6.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c_n > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\big(\max_{k\in\{0,\dots,n-1\}} \max_{t\in[k/n,(k+1)/n]} \big|W(t) - W\big(\frac{k}{n}\big)\big| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}c_n\big) \quad\leq\quad n \cdot \mathbb{P}\big(\max_{0\leq t\leq 1} |W(t)| \geq c_n\big)$$
$$\leq 2n\mathbb{P}\big(\max_{0\leq t\leq 1} W(t) \geq c_n\big) \quad\leq\quad 4n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\big\{-\frac{1}{2}c_n^2\big\}.$$

Hier bietet sich der Ansatz $c_n := \sqrt{2\gamma\log n}$ mit $\gamma > 1$ an. Setzt man diesen in den letzten Ausdruck ein, so ergibt sich

$$2n\exp\{-\gamma\log n\} = 2n^{1-\gamma},$$

was gegen Null geht, allerdings konvergiert die zugehörige Reihe nur dann, wenn $\gamma > 2$ ist. Da wir bei dieser Beweisrichtung nicht den Ehrgeiz habe, die optimale Konstante herauszufinden, geben wir uns mit $\gamma > 2$ zufrieden und erhalten für jedes feste $\gamma > 2$ mit dem ersten Borel-Cantelli Lemma die fast sichere Existenz eines $n_0 = n_0(\omega, \gamma) \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{k\in\{0,\dots,n-1\}} \max_{t\in[k/n,(k+1)/n]} \big|W(t) - W\big(\frac{k}{n}\big)\big| < \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2\gamma\log n}$$

für alle $n \geq n_0$. Hieraus sieht man sofort (am besten mit einem Bild), dass für jedes solche n gilt

$$w_{1/n}(W) \leq 3\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2\gamma\log n},$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Bemerkung 5.24. Die bisherigen Aussage lassen sich zu folgender verschärfen (siehe Mörters und Peres: Brownian Motion, Cambridge Univ. Press, 2010). Es gilt fast sicher

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{|W(t+h) - W(t)|}{\sqrt{2h\log(1/h)}} = 1.$$

Dies bedeutet, dass unsere untere Abschätzung in Proposition 5.21 optimal war, die in Proposition 5.23 aber (wie zu erwarten war) nicht. Man kann die Konstante 6 auf der rechten Seite der Ungleichung in Proposition 5.23 zum Beispiel dadurch verbessern, dass man zu geeigneten Teilfolgen von n übergeht und damit auch $\gamma < 2$ wählen darf.