zur Information, wurde nicht behandelt
und ist nicht prüfungsrelevant.

§8 Dynamische Flussprobleme mit flussabhängigen Fahrzeiten τ_a

Sehr schwierig exakt zu behandeln

In Praxis daher meist Simulation

↑ ausgefeiltes Fahrverhalten
spätlich, Sonntagsfahrer, ...

Ein Grund für die Schwierigkeit:

- kein zeitexpandierter Graph G^T

↑ basiert auf festen Fahrzeiten
d.h. G^T würde sich dauernd ändern im dynamischen Fall

in COGA: 2 vereinfachte Modelle

1) Einfluss-abhängige Fahrzeiten (Köhler, Langkau, Skutella)

2) Last-abhängige Fahrzeiten (Köhler, Skutella)

zu 1)

- $x_a(\theta)$:= Flussrate zum Zeitpkt θ rein in die Kante a
- Fluss der Kante a zum Zeitpkt θ betritt benötigt $\tau_a(x_a(\theta))$ Zeit zum Durchfahren der Kante
- alle diese Flusseinheiten haben dieselbe Fahrzeit, die also nur vom Eintrittszeitpunkt θ abhängt

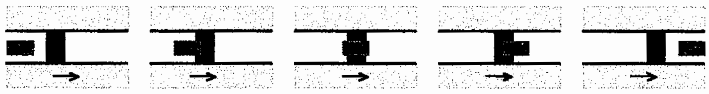
zu 2) • $y_a(\theta)$:= Flussmenge auf Kante a zum Zeitpkt θ

- Flusseinheiten auf a fahren zum Zeitpkt θ mit Geschwindigkeit $1/\tau_a(y_a(\theta))$

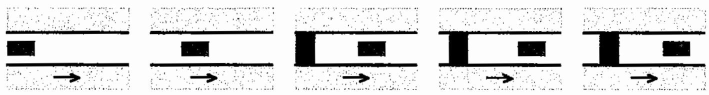
- zu jedem Zeitpkt Θ haben alle Flusseinheiten auf a dieselbe Geschwindigkeit (die ändert sich jedoch mit Θ)

Beide Modelle haben eine gewisse Praxisferne

Inflow dependent model: does not satisfy First-In First-Out property



Load dependent model: later arriving flow influences earlier flow



ABER.. • man kann in ihnen optimieren

- Routen aus der Optimierung zeigen sich in der Simulation den aus der Simulation ermittelten Routen überlegen
  (laufende Forschung BMBF Projekt ADVEST)

Ergebnisse in der Übersicht:

zu 1) Einfluss-abhängige Fahrzeiten

- schnellste s,t Fluss Problem ist stark NP-schwer!
- schnellste s,t Fluss Problem hat einfache $(2-\varepsilon)$-Approximation mit zeitlich wiederholten Flüssen
- ausbaubar zu Approximationsschema (FPTAS)
  (allerdings mit unschönen Flüssen)

zu 2) Last-abhängiges Modell

- $(2+\varepsilon)$ - Approximation mit zeitlich wiederholten Flüssen für schnellste s,t-Fluss Problem
- Problem ist APX-schwer, daher kein Approximationsschema (außer P = NP)

Approximationsresultat zu 1:

Betrachten $\boxed{\text{schnellstes s,t-Fluss-Problem mit Einfluss-abhängigen Fahrzeiten}}$

A: Schnellstes s,t-Fluss-Problem mit konstanten Fahrzeiten

Nutze binäre Suche bzgl Zeithorizont T und löse für jedes T ein maximales dynamisches s,t-Fluss-Problem gemäß § 5.1

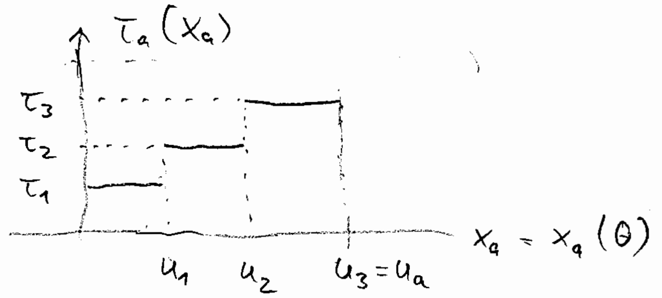
Problem: optimaler Zeithorizont muss nicht ganzzahlig sein
$\Rightarrow$ nur ε-Approximation durch binäre Suche möglich

ABER (Fleischer & Tardos 98):
Alle τ_a und Demand d gzz
$\Rightarrow$ optimaler Zeithorizont ist rationale Zahl p/q
mit $q \leq$ Wert eines minimalen s,t-Schnittes

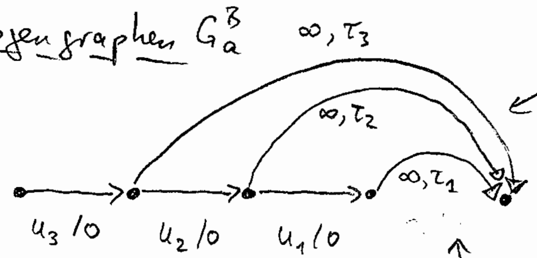
$\Rightarrow$ exakte binäre Suche in polynomialer Zeit möglich

8.7 SATZ: Für das schnellste s,t-Fluss-Problem mit konstanten Fahrzeiten existiert ein optimaler Fluss, der zeitlich wiederholt ist, und ein solcher kann in polynomialer Zeit ermittelt werden.

B. Schnellstes s,t-Fluss Problem mit stückweise konstanten Fahrzeiten



1. Konstruiere für jede Kante a aus der Funktion $\tau_a(x_a)$ einen Bogengraphen G_a^B



langsame Fahrzeit, aber große Kapazität

Kapazität

konstante Fahrzeit

schnelle Fahrzeit, aber geringe Kapazität

2. Ersetze jede Kante a durch ihren Bogengraphen und ermittle im resultierenden Graphen G^B einen schnellsten s,t Fluss f^B gemäß A.

- geht, da alle Fahrzeiten konstant
- ergibt einen Zeithorizont $T^B \leq T^{OPT}$ (8.1)
  da jeder Fluss in G zulässig in G^B ist.

(i.A. gibt es aber mehr Fluss in G^B, da ein Fluss entlang Kante a in G jetzt mit mehreren Geschwindigkeiten in G_a^B reisen kann)

- Kanten in G_a^B sind von unten nach oben gesättigt (sonst lässt sich Fluss nach unten verschieben und die Fahrzeit verbessern; dies geht, da auf unterem Weg Fluss fließt)

- f^B ist zeitlich wiederholt in G^B (aber i.A. nicht zulässig in G)

3. <u>Konstruktion eines in G zulässigen (zeitlich wiederholten) Flusses aus f^B</u>

f^B wurde aus Max. dyn. s,t-Fluss zum Zeithorizont T^B gewonnen
↑
letztes T bzgl.
binäre Suche

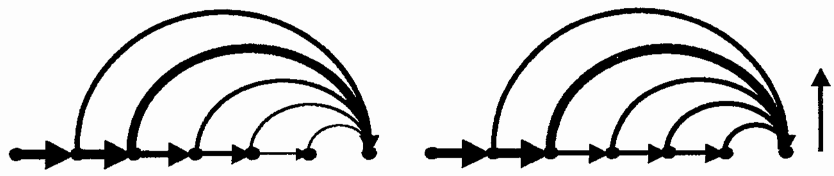
§ 6
$\Rightarrow$ f^B wurde zeitlich wiederholt aus statischem Fluss x^B in G^B gewonnen

- reroute x^B so dass er nicht mehrere Bögen in G_a^B benutzt.

  dazu: schiebe allen Fluss in G_a^B auf den höchsten Fluss-führenden Bogen

  der resultierende statische Fluss sei x

  $\Rightarrow$ x läßt sich als Fluss in G interpretieren



- x ist klarerweise ein statischer Fluss (Flusserhaltung usw) in G
- x nutzt nur Wege, die auch in x^B genutzt wurden

  $\Rightarrow$ Länge dieser Wege ist $\leq T^B$, da x^B optimal für T^B

  vgl. §6

- Nutze diese Wege (in G interpretiert) zur Konstruktion eines zeitlich wiederholten Flusses f
  - sende zeitlich wiederholt entlang der Wegzerlegung von x^B
  - bis zum Zeithorizont T', der so gewählt wird dass bei T' der Demand d in t angekommen ist,

  also $\text{value}(f) = \underbrace{\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \cdot (T' - \tau_P)}_{} = d$

  $$= T' \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a$$

  T' einfach ermittelbar

8.2 SATZ: f löst das schnellste dynamische s,t-Flussproblem mit stückweise konstanten Fahrzeiten in einer Zeit

$$T' \leq 2 \cdot T^{OPT}$$

Beweis: sei $\text{value}(T) :=$ Wert von f bei Zeithorizont T

$$\underset{§6}{=} T\, \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a \qquad (8.2)$$

Es reicht zu zeigen: $\text{value}(2T^{OPT}) \geq d$

$$\underbrace{\text{value}(2T^{OPT}) \geq}_{\substack{\text{value}(\ldots) \\ \text{ist monoton} \\ \text{in } T}} \underbrace{\text{value}(2T^B)}_{\substack{\text{opt. Wert} \\ \text{von } f^B \leq T^{OPT} \\ \text{nach (8.1)}}} \underbrace{=}_{(8.2)} 2T^B \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a$$

$$= 2T^B \text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T^B \text{value}(x) + T^B \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T^B \text{value}(x) + \sum_{P \in \mathcal{P}} \underbrace{(T^B - \tau_P)}_{\geq 0 \text{ da } \tau_P \leq T^B \text{ bzgl. } x} x_P$$

$$\geq T^B \text{value}(x)$$

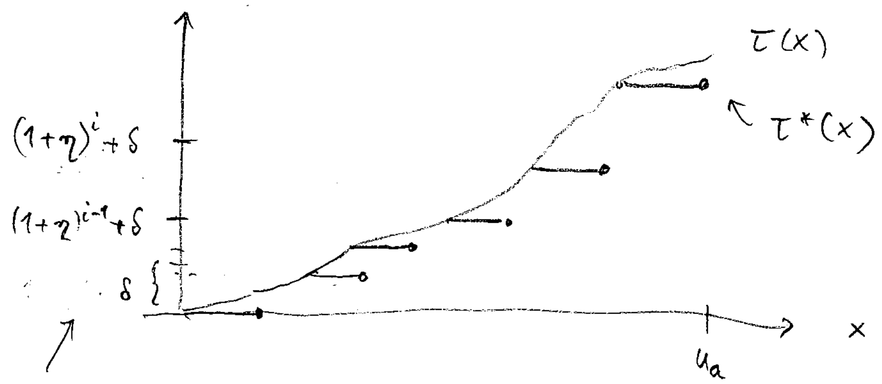
$= T^B \text{value}(x^B)$ da x aus x^B gewonnen durch Rerouting

$$\geq \underbrace{T^B \text{value}(x^B) - \sum_{a \in A^B} \tau_a \cdot x_a^B}_{\text{beides in } G^B}$$

$$= \text{value}(f^B) = d \qquad \square$$

C. Schnellstes s,t-Fluss-Problem mit beliebigen (monotonen, linksseitig stetigen) Fahrzeitfunktionen

Approximation solcher Fahrzeitfkt. durch stückweise konstante Fkt. τ^*



wie bei Fließkomma Zahlen

$$\tau^*(x) \le \tau(x) \le (1+\eta)\,\tau^*(x)+\delta \qquad \forall x$$

$$\#\ \text{Konstanz-Stücke} \le \left\lceil \log_{(1+\eta)}\left(\bar{\tau}_a(u_a)-\delta\right)\right\rceil + 1$$

$\Downarrow$

$2+\varepsilon$ Approximation für beliebiges $\varepsilon>0$

$(3/2+\varepsilon)$ Approximation für konkave Fahrzeiten — AUFGABE