II. Dynamische Flüsse

§6 Dynamische s,t Flüsse mit konstanten Fahrzeiten

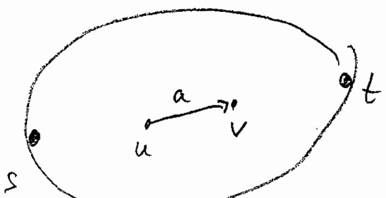
bisher: Rush Hour = statischer Fluss

d.h. in einem Zeitraum auf ganzem Weg P konstante Flussrate f_P

Modell nicht mehr zutreffend außerhalb der Rush hour.

$\Rightarrow$ müssen zeitliches Verhalten des Flusses mit modellieren
wichtig auch für logistische Anwendungen

6.1 Maximale s,t Flüsse bei konstanten Fahrzeiten



Kante a hat Kapazität $u_a \in \mathbb{N}$

Zeit $\tau_a \in \mathbb{N}$

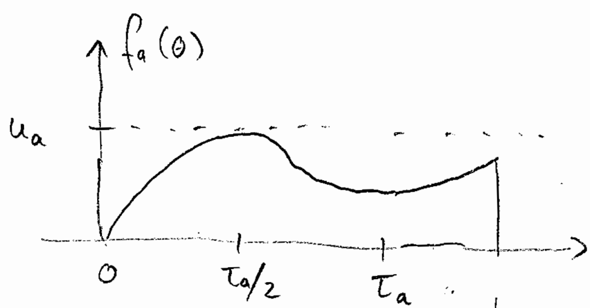
benötigt zum Durchqueren der Kante

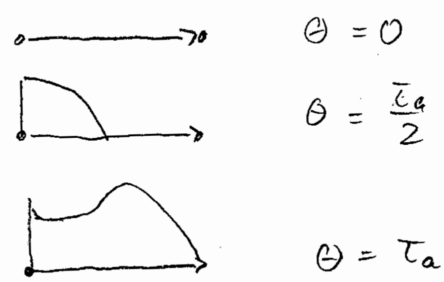
zusätzlich Zeithorizont T gegeben

Dynamischer Fluss f mit Zeithorizont T

= Funktionen $\underbrace{f_a : [0,T[\;\to \mathbb{R}^1_+}$ für alle Kanten $a \in A$

$f_a(\theta)$ = Flussrate in Kante a hinein zum Zeitpkt θ





"umgekehrtes Bild" auf Kante

zur Zeit $\Theta \geq \tau_a$ kommt $f_a(\Theta - \tau_a)$ am Kopf der Kante an

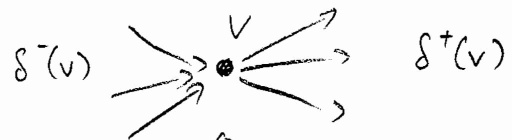
Ein <u>dynamischer Fluss mit Zeithorizont T</u> erfüllt

(1) die Kapazitätsbedingungen:

$$f_a(\Theta) \leq u_a \quad \forall\, \Theta \in [0,T[$$

Kapazitäten beschränken die Flussrate

(2) Flusserhaltungsgleichungen (kein Defizit an Knoten gestattet)



$$\underbrace{\sum_{a \in \delta^-(v)} \int_{\tau_a}^{\Theta} f_a(\xi - \tau_a)\, d\xi}_{\text{Einfluss bis } \Theta} \geq \underbrace{\sum_{a \in \delta^+(v)} \int_{0}^{\Theta} f_a(\xi)\, d\xi}_{\text{Ausfluss bis } \Theta} \quad \forall\, \Theta$$

"$>$" $\hat{=}$ Warten in Knoten erlaubt

"$=$" $\hat{=}$ kein Warten erlaubt

(3) "$=$" muss gelten zum Zeitpkt T
und $f_a(\Theta) = 0$ für $\Theta > T - \tau_a$ (Fluss hat Netzwerk verlassen nach Zeit T)

Wert des zulässigen Flusses f:

$$\begin{aligned} \text{value}(f) &= \sum_{a \in \delta^+(s)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta - \sum_{a \in \delta^-(s)} \int_{\tau_a}^T f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta \\ &= -\sum_{a \in \delta^+(t)} \int_0^T f_a(\Theta)\, d\Theta + \sum_{a \in \delta^-(t)} \int_{\tau_a}^T f_a(\Theta - \tau_a)\, d\Theta \\ &= \text{Nettoausfluss aus } s = \text{Nettoeinfluss in } t \end{aligned}$$

Maximales dynamisches s,t-Fluss Problem

Gegeben: Digraph $G=(V,A)$, $s,t \in V$, u_a, τ_a, Zeithorizont T

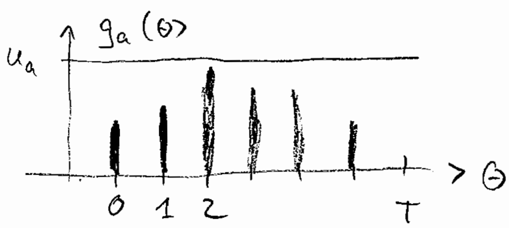
Gesucht: dynamischer s,t-Fluss f in $[0,T]$ mit maximalem Flusswert value(f)

6.2 Diskret vs. stetige Zeit

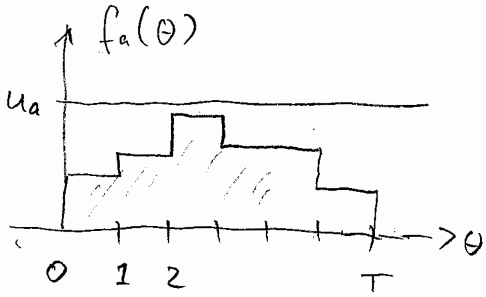
bisherige Definition nutzt stetige Zeit

diskrete Zeit $\hat{=}$ sende Fluss nur zu Zeitpkt. $0, 1, 2, \dots$

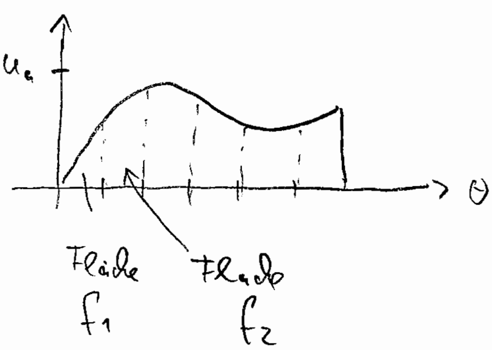
diskreter Fluss g



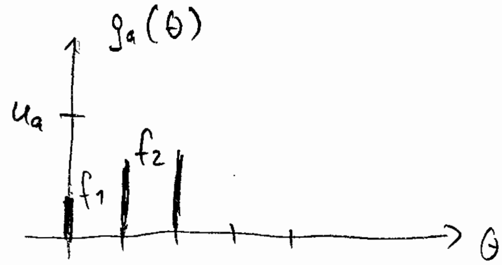
Transformation $\longrightarrow$ in stetigen Fluss



stetiger Fluss $f_a(\theta)$



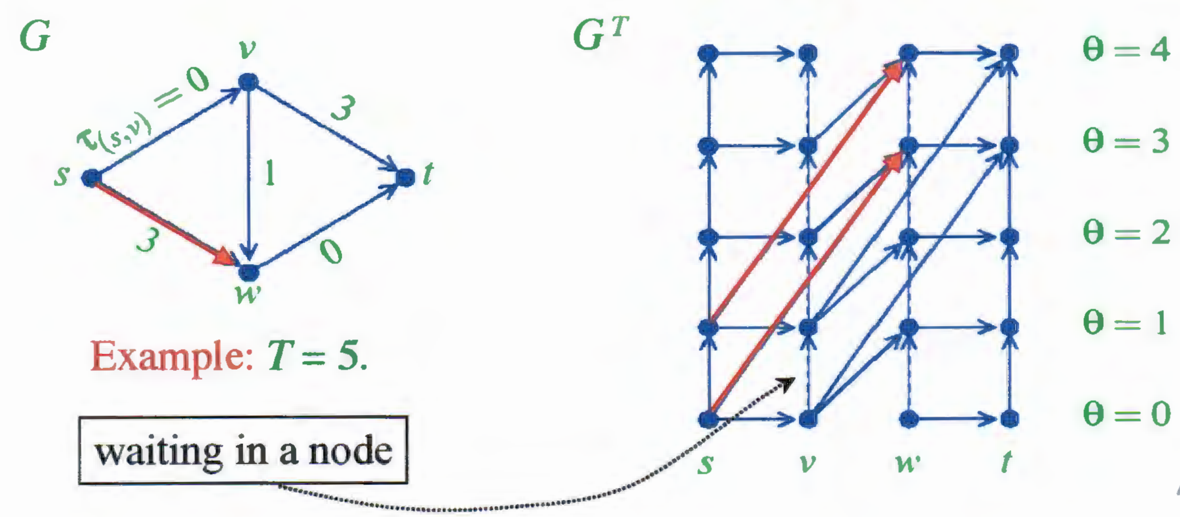
Transformation $\longrightarrow$ in diskreten Fluss



Beobachtung: Bei hinreichend feiner Diskretisierung der Zeit kann jeder diskrete dynamische Fluss als stetiger dynamischer Fluss interpretiert werden und umgekehrt (genau bis auf beliebig kleinen Approximationsfehler bei "vernünftigen" f_a)

Time expanded networks

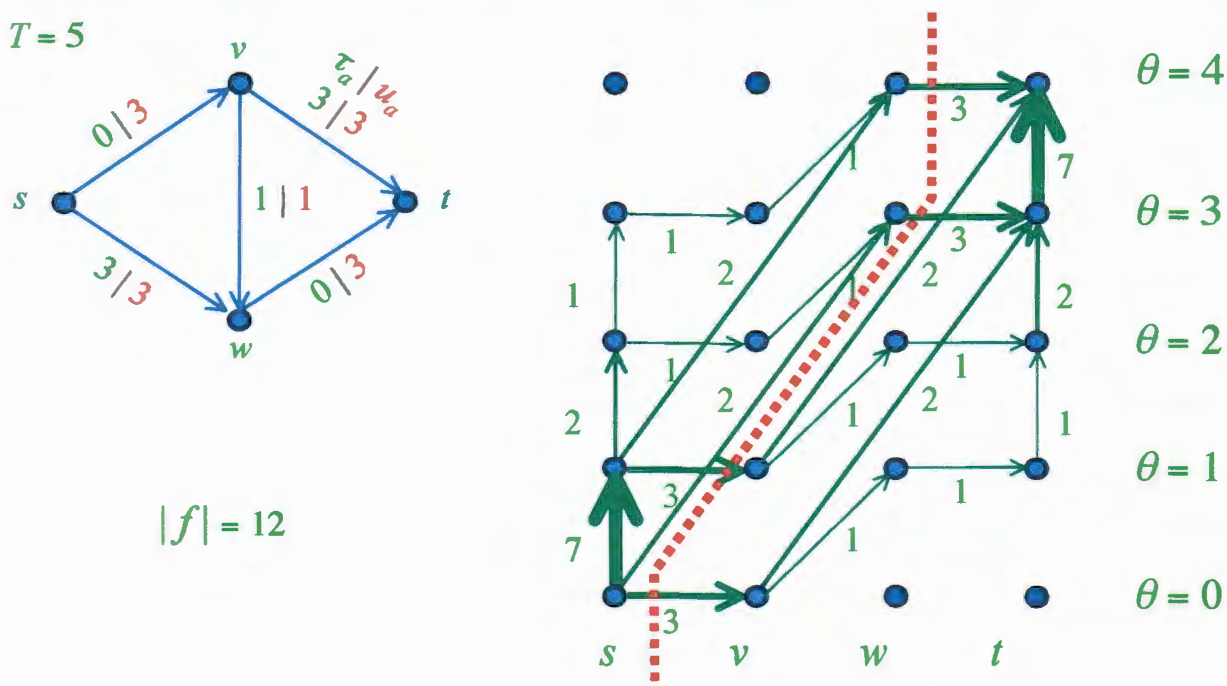
Observation. Discrete flows over time in G correspond to static flows in time-expanded networks G^T (for constant τ_a)



Kopie von G für jede Zeitschicht

Kanten zwischen verschiedenen Zeitschichten entsprechend τ_a

A static flow in the time expanded network



min Schnitt = max value dyn. Fluss

Vorteil diskreter dynamischer Flüsse: Beschreibung über zeitexpandierte Netze möglich

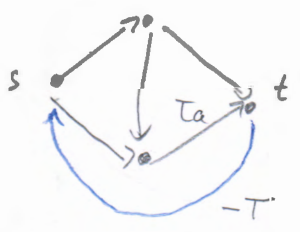
$\Downarrow$

- max s,t-dynamischer Fluss mit Zeithorizont T
  $\hat{=}$ max s,t-statischen Fluss in G^T
- statische Flusstheorie im Prinzip anwendbar (z.B. max Fluss - min Cut)
- ABER G^T riesig bei feiner Zeitskala
  in G^T polynomiale Algorithmen sind bzgl G
  nur pseudopolynomial

6.3 Algorithmus von Ford-Fulkerson für max dyn.-s,t-Flüsse [1958]

Grobe Idee:

1) Berechne statischen min-cost Fluss x in $G + (t,s) =: \bar{G}$



d.h. Zielfkt $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T \cdot value(x)$

$\hat{=}$ min-cost Zirkulation, da alle Balancen $b(v) = 0$

$u_{(t,s)} = \infty$

[geht in polynomialer Zeit mit Methoden aus ADM I]

2) Wähle beliebige Pfaddekomposition $\mathcal{P} \subseteq \{s,t \text{ Wege}\}$ von x bzgl. G mit x_P = Fluss entlang $P \in \mathcal{P}$

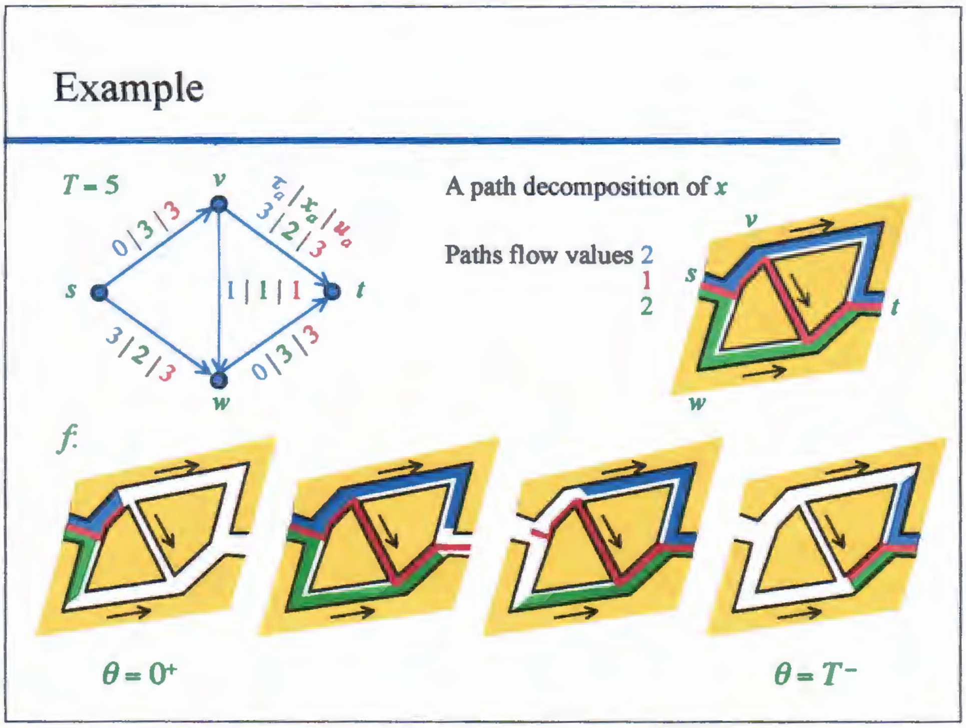
[Standardzerlegung aus ADM I von x in $G + (t,s)$ ergibt gerichtete Kreise, nehme nur die, die (t,s) enthalten, diese definieren s,t Wege ; möglich in polynomialer Zeit, ADM I und $|\mathcal{P}| \leq m$]

3) Nutze die Pfade zur Konstruktion eines <u>zeitlich wiederholten Flusses</u> f:

f schickt Fluss mit der konstanten Rate x_P entlang P

im gesamten Intervall $[0, T-\tau_P]$

$\uparrow$ letzter Zeitpunkt zum Senden bei s, so dass Fluss spätestens zur Zeit T in Senke t ankommt



4) Dies ergibt einen dynamischen s,t-Fluss f mit Zeithorizont T

Die Flussraten $f_a : [0,T[\to \mathbb{R}$ ergeben sich polynomiell aus den maximal m Wegraten f_P und Zeiten τ_a

Jede Flussrate ist eine stückweise konstante Fkt mit maximal 2m Sprüngen, da $|\mathcal{P}| \le m$

$\Rightarrow$ alle Flussraten haben Outputgröße polynomiell in der Inputgröße und können in polyn. Zeit konstruiert (werden)

<u>Zulässigkeit des zeitlich wiederholten Flusses f</u>

- Flusserhaltung trivial., f erfüllt sie mit "=",
  d.h. keine Speicherung von Fluss in Knoten

- Kapazitätserhaltung:
  $$f_a(\theta) \leq \sum_{P: a \in P} x_P = x_a \leq u_a$$

- Nach Zeit T ist das Netzwerk leer, da auf P der letzte Fluss zu Zeit $T - \tau_P$ geschickt wird

<u>Wert des zeitlich wiederholten Flusses f</u>

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (T - \tau_P)\, x_P = T \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_P x_P$$

$$= T\,\text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \Big(\sum_{a \in P} \tau_a \Big) x_P$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} \Big(\sum_{P \ni a} x_P \Big) \tau_a$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a$$

$= $ negative der Zielfunktion $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T \cdot \text{value}(x)$
für min-cost flow, unabh. von Pfadzerlegung!

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$f$ maximiert den Flusswert über alle zeitlich wiederholten dynamischen s,t-Flüsse mit Zeithorizont T}}$

Insbesondere ist $\tau_P \leq T \quad \forall P$, sonst ist $P + (t,s)$ Zykel mit positiven Kosten

<u>Optimalität:</u>

Gilt max-flow min-cut auch im dynamischen Fall

Def. <u>dynamischer s,t-Schnitt mit Zeithorizont T</u>

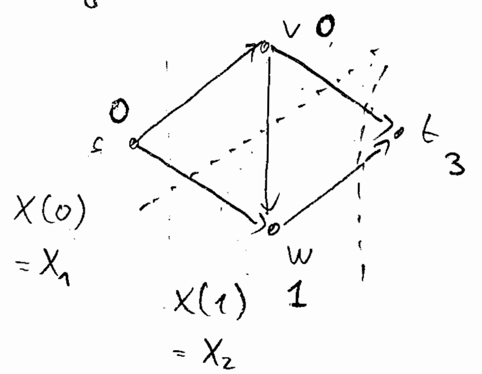
ist gegeben durch Werte $\pi(v) \in [0, \infty[$ für $v \in V$ mit $\pi(s) = 0$, $\pi(t) \geq T$.

Diese Werte definieren eine aufsteigende Folge $\mathcal{C}$ von Mengen

$$X(\theta) := \{ v \in V \mid \pi(v) \leq \theta \}$$

so dass für $\theta \in [0, T[$ $\quad X(\theta), V - X(\theta)$ einen s,t Schnitt definiert

Die Folge hat nur endlich viele verschiedene Mengen $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_k$



$\pi(s) = 0$

$\pi(v) = 0$

$\pi(w) = 1$

$\pi(t) = 3 = T$

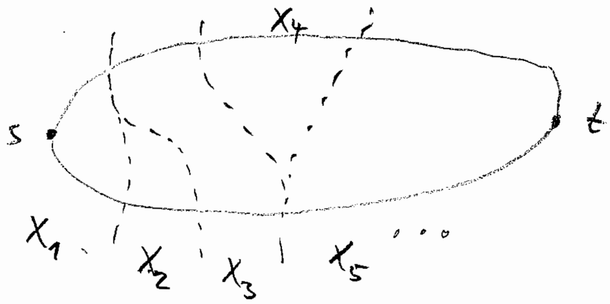
Die <u>Kapazität</u> eines solchen Schnittes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$cap(\mathcal{C}) := \sum_{\substack{a \in A \\ a = (v,w)}} \underbrace{\max\{ \underbrace{\pi(w) - \pi(v)}_{\text{Zeit, die } a \text{ im dyn. Schnitt ist}} - \tau_a, 0 \}}_{\text{maximale Zeitspanne, in der Fluss aus Kante } a \text{ rausfließen konnte, während } a \text{ im Schnitt ist}} \cdot \underbrace{u_a}_{\text{Schranke für die Flussrate}}$$

6.1 LEMMA. Für jeden dyn. s,t-Fluss f und jeden dyn. s,t-Schnitt $\mathcal{C}$ zum selben Zeithorizont T gilt

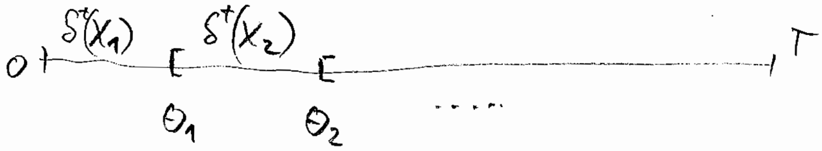
$$\text{value}(f) \leq \text{cap}(\mathcal{C})$$

Beweis: Betrachte die Folge der Schnitte $X_1, X_2, \ldots, X_k$ zu $\mathcal{C}$



Jeder Schnitt X_i erzeugt Kantenmenge $\delta^+(X_i)$ (Kanten raus aus X_i)

Das Zeitintervall $[0,T[$ wird durch die "Gültigkeit" der $\delta^+(X_i)$ überdeckt

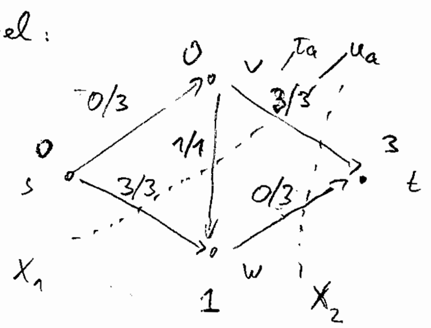


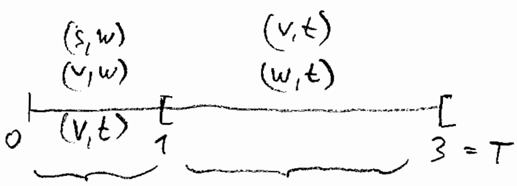
d.h. $\Theta_i = \min\{\pi(w) \mid (v,w) \in \delta^+(X_i)\}$

$\Rightarrow$ value$(f) \leq \sum_i$ Flussmenge über Kanten $\delta^+(X_i)$, die im Zeitintervall $[\Theta_{i-1}, \Theta_i]$ fließen kann

$$\leq \sum_{\substack{a \in A \\ a=(v,w)}} \max\{\pi(w)-\pi(v)-\tau_a, 0\} \cdot u_a = \text{cap}(\mathcal{C}) \quad \square$$

Beispiel:





cap$(\mathcal{C}) = 6$

$\delta(X_1)$: maximal 1 Zeiteinheit à 0 Flusseinheiten

$\delta(X_2)$: maximal 2 Zeiteinheiten à 3 Flusseinheiten über (w,t)

$cap(\mathcal{C})$: $[(s,v) \to \pi(v)-\pi(s)-\tau_a = 0-0-0 \to$ kein Beitrag$]$ in keinem Slice

$(s,w) \to 1-0-3 \to$ kein Beitrag

$(v,w) \to 1-0-1 \to$ kein Beitrag

$(v,t) \to 3-0-3 \to$ kein Beitrag

$(w,t) \to 3-1-0 \to 2\cdot 3 = 6$

Hier noch ein "formaler" Beweis.

Sei f ein dynamischer Fluss.

Für v und Zeitpunkt Θ definiere $ex_f(v,\Theta)$ als den Einfluss − Ausfluss von v im Intervall $[0,\Theta]$, also

$$ex_f(v,\Theta) = \sum_{a\in\delta^-(v)} \int_0^{\Theta-\tau_a} f(\xi)\,d\xi - \sum_{a\in\delta^+(v)} \int_0^{\Theta} f(\xi)\,d\xi$$

Dann gilt $value(f) = ex_f(t,T)$

Sei nun $\mathcal{C}$ ein dynamischer Schnitt mit Werten $\pi(v)$

Dann ist

$$value(f) = ex_f(t,T) \le \sum_v ex_f(v,\pi(v)) \quad \text{da } \pi(t) \ge T$$

$$= \sum_v \left(\sum_{a\in\delta^-(v)} \int_0^{\pi(v)-\tau_a} f(\xi)\,d\xi - \sum_{a\in\delta^+(v)} \int_0^{\pi(v)} f(\xi)\,d\xi \right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{a=(v,w)} \left(\int_0^{\pi(w)-\tau_a} f(\xi)\,d\xi - \int_0^{\pi(v)} f(\xi)\,d\xi \right)$$

Kantenweise am Ende der Kante betrachtet

$$= \sum_{a=(v,w)} \int_{\pi(v)}^{\pi(w)-\tau_a} f(\xi)\,d\xi$$

$$\leq \sum_{a=(v,w)} \max\{\pi(w)-\pi(v)-\tau_a, 0\} \cdot u_a$$

$$= \mathrm{cap}(\mathcal{C}) \qquad \square$$

---

zum Beweis der Optimalität des zeitlich wiederholten Flusses f konstruiert man aus f einen dynamischen s,t Schnitt $\mathcal{C}$ mit $\mathrm{value}(f) = \mathrm{cap}(\mathcal{C})$

<u>Konstruktion des Schnittes aus Fluss f am Ende des Algos</u>

Setze $\pi(v) :=$ Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Residualgraph $(G+(t,s))_x =: \bar{G}_x$ bzgl. Kosten τ_a und $-T$

$\boxed{\text{definiert dynamischen } s,t\text{-Schnitt } \mathcal{C}}$ da

$\pi(s) = 0$ ($\bar{G}_x$ enthält keinen negativen Zykel)

$\pi(t) \geq T$ (sonst gibt es in G_x einen s,t Weg mit Länge (= kosten) $< T$

$\Rightarrow$ $\bar{G}_x$ hat negativen Zykel

Widerspruch, da x Kosten-minimal)

Beachte: Da Kante $(s,t) \in \bar{G}_x$ folgt $\boxed{\pi(t) = T}$

Beweis: <u>$\mathrm{value}(f) = \mathrm{cap}(\mathcal{C})$</u>

Betrachte Kante $a = (v,w)$

<u>Claim 1</u>: $\boxed{\begin{array}{l} [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\; \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad x_a = u_a \,, \quad f_a(\theta) = u_a \quad \forall\, \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\end{array}}$

Beweis: a) Annahme $x_a < u_a$

$\Rightarrow (v,w) \in \bar{G}_x \quad \Rightarrow \quad \pi(w) \leq \pi(v) + \tau_a \quad \Rightarrow$ Intervall ist leer

↑ kürzeste Weglängen — Widerspruch

b) Annahme: $\exists\, \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$ mit $f_a(\theta) < u_a \; (= x_a)$

$\Rightarrow \exists$ Weg P_0 in Pfadzerlegung zu x mit $a \in P_0$ und

(i) der erste Fluss entlang P_0 kommt in v nach Zeit $\pi(v)$ an

(wenn auf allen Wegen durch a der Fluss in v bereits zu $\pi(v)$ ankommt, gilt: $f_a(\pi(v)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$)

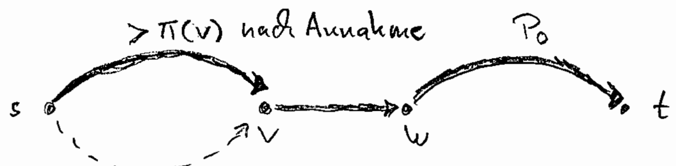
oder

(ii) der letzte Fluss durch P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

(sonst $f_a(\pi(w)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a$)

Da f zeitlich wiederholt, muss (i) oder (ii) gelten

zu (i)



P_0 in G

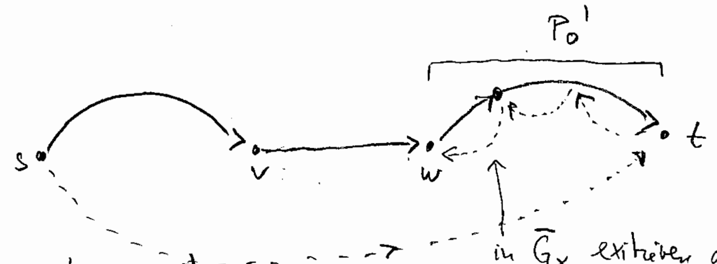
↑ Weg P im Residualgraph $\bar{G}_x$ mit Länge $\pi(v)$, existiert nach Def (von $\pi(v)$)

Entlang P_0 fließt Fluss $\Rightarrow$ Rückwärtskanten sind in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow P[s,v] + \overleftarrow{P}_0[v,s]$ ist Zykel negativer Länge in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Optimalität von x

zu (ii)



P_0 in G

kürzester Weg P_1 in $(G+(t,s))_x$ von s nach t

in $\bar{G}_x$ existieren die Rückwärtskanten ihre Bewertung ist $-\tau(P_0')$

Fluss entlang P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

$\Rightarrow$ (da man bis zum letzten Moment entlang P_0 schickt)

$$\pi(w) + \tau(P_0') > T = \pi(t) \quad \Rightarrow \quad -\tau(P_0') < \pi(w) - \pi(t) \quad (*)$$

Betrachte Weg P_1 + Rückwärtskanten zu P_0' von s zu w

Dies ist Weg in G_x mit Länge (Kosten)

$$\pi(t) - \tau(P_0') \overset{(*)}{<} \pi(t) + \pi(w) - \pi(t) = \pi(w)$$

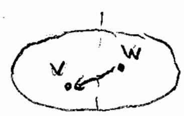
Widerspruch dazu, dass $\pi(w)$ Länge eines kürzesten Weges bis w in $\bar{G}_x$ ist $\square$

Claim 2: $\boxed{[\pi(w) - \tau_a, \pi(v)[\neq \emptyset \Rightarrow x_a = 0, \ f_a(\theta) = 0 \ \forall \theta}$

Beweis: Falls $x_a > 0 \Rightarrow$ Kante (w,v) ist in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow \pi(v) \leq \pi(w) - \tau_a$ Widerspruch $\square$

Claim 2 $\Rightarrow$ f kreuzt keinen Schnitt auf Rückwärtskanten



(keine Zeitreise in Vergangenheit)

$\Rightarrow$ nur auf Vorwärtskanten

$\Rightarrow$ (Claim 1) $f_a(\theta) = u_a \ \forall \theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$

$\Rightarrow$ value(f) = cap$(\mathcal{C})$ $\square$

$\Downarrow$

6.2 SATZ (Ford-Fulkerson 58). (1) Der Algorithmus konstruiert einen optimalen dyn. s,t-Fluss zum Zeithorizont T.

(2) Die Laufzeit wird dominiert durch die Berechnung des statischen min-cost Flusses x

(3) Der optimale dynamische Fluss ist zeitlich wiederholt und kommt ohne Speicherung in Knoten aus

alternatives Beweis für Optimalität über Dualitätstheorie (Schrijver)

Min Cost Flow Problem als LP formulieren (P)

Duales formulieren (D)

6.1 zeigen, dass value$(f) \geq$ OPT(P)

value$(f) \leq$ OPT(D)

AUFGABE 6.1