

Bachelorarbeit Mathematik

Steuerung von Verkehrsflüssen in  
Mehrgüternetzwerken mit heterogenen  
Nutzern durch Mautgebühren

Theresa Thunig

4. März 2013

Betreuer: Prof. Dr. Rolf H. Möhring

Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Skutella

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

FAKULTÄT II - MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

## **Eidesstattliche Versicherung**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 4. März 2013

---

Theresa Thunig

## Zusammenfassung

Wir zeigen auf Grundlage der Ausarbeitung von Fleischer et al. [7] die Existenz von Maut, welche in Mehrgüternetzwerken mit heterogenen Nutzern das Systemoptimum, das heißt die Minimierung der Gesamtreisezeit, erzwingt. Mit ihrem konstruktiven Beweis geben Fleischer et al. die Möglichkeit, die optimale Maut in polynomieller Zeit in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes zu berechnen. Für die Höhe der nötigen Kantenmaut geben sie eine exponentielle obere Schranke in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes an. Des Weiteren betrachten sie allgemeine Auslastungsspiele, auf welche die Resultate der Mehrgüternetzwerke übertragen werden können. Abschließend zeigen sie, dass in allgemeinen Auslastungsspielen eine exponentielle Maut zur Erzwingung des Systemoptimums nicht nur hinreichend, sondern notwendig ist. Diese Resultate werden wir hier präsentieren. Zusätzlich zu den Resultaten der Ausarbeitung von Fleischer et al. untersuchen wir die exponentielle obere Schranke an die Mauthöhe in Mehrgüternetzwerken genauer und zeigen, dass sie für Mehrgüternetzwerke, in denen die maximale Länge eines Pfades hinreichend klein ist, verbesserbar ist.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Das diskrete Modell</b>	<b>6</b>
2.1	Existenz von optimaler Maut im diskreten Modell . . . . .	8
2.2	Charakterisierung erzwingbarer Auslastungen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Berechnung der Maut in polynomieller Zeit</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Schranken an die Mauthöhe</b>	<b>18</b>
4.1	Exponentielle obere Schranke an die Mauthöhe . . . . .	18
4.2	Untersuchung der oberen Schranke an die Mauthöhe . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Das stetige Modell</b>	<b>25</b>
5.1	Existenz von optimaler Maut im stetigen Modell . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Allgemeine Auslastungsspiele</b>	<b>28</b>
6.1	Existenz von optimaler Maut in allgemeinen Auslastungsspielen .	29
6.2	Schranken an die Mauthöhe in allgemeinen Auslastungsspielen .	32
6.3	Verallgemeinerungen . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>34</b>
	<b>Literatur</b>	<b>37</b>

# 1 Einleitung

Der Begriff Maut steht für eine Gebühr, die man für die Nutzung von Straßen oder anderen Verkehrswegen zahlen muss. Mauten wurden schon in Form von Wegezöllen im 11. Jahrhundert erhoben. Damals musste ein Wegezoll gezahlt werden, um Straßen passieren zu dürfen. Heute wird Maut meist als Straßenbenutzungsgebühr erhoben und in vielen verschiedenen Formen eingesetzt. In Frankreich ist beispielsweise ein großer Teil des Autobahnnetzes mautpflichtig, wobei die Maut nach der gefahrenen Strecke abgerechnet wird. Eine andere Form der Maut, die dem früheren Wegezoll ähnelt, gibt es in Dänemark, wo man für die Benutzung von bestimmten Brücken eine Gebühr zahlen muss. In London dagegen wird eine Kordonmaut für den Innenstadtbereich erhoben, sodass Autofahrer eine Gebühr zahlen müssen, wenn sie diesen befahren möchten. Maut kann auch verkehrsmittelspezifisch eingesetzt werden, wie es in Deutschland mit der LKW-Maut der Fall ist. Auch in Bergen, Singapur und vielen weiteren Städten bzw. Ländern werden Mautgebühren erhoben. In vielen Fällen wird dabei die Maut als Finanzquelle genutzt, um den Ausbau und Erhalt der Infrastruktur zu finanzieren. Aber kann Maut außer als Finanzquelle auch dafür genutzt werden, den Gesamtverkehrsfluss zu verbessern oder sogar zu optimieren?

In Netzwerken ohne Maut möchte in der Realität jeder Nutzer seine Reisezeit minimieren. Dabei entsteht das sogenannte Nash-Gleichgewicht, bei dem sich kein Nutzer durch alleinigen Routenwechsel verbessern kann. Es ist bekannt, dass dieses in der Regel nicht dem Systemoptimum entspricht, welches die Gesamtreisezeit minimiert. Führt man jedoch eine Maut auf den Kanten des Netzwerkes ein, so werden die Nutzer bei ihrer Routenwahl nicht mehr nur ihre Reisezeit minimieren, sondern auch die entstehenden Mautkosten berücksichtigen, womit sich das Nash-Gleichgewicht verändern kann. Sobald monetäre Aspekte in Form der Maut bei der Wahl der Route ins Spiel kommen, muss man diese in der Modellierung des Netzwerkes mit den zeitlichen Aspekten geeignet kombinieren. Dazu werden wir den in der Verkehrsplanung als ‘value of travel time savings’ bezeichneten Latenzsensitivitätsfaktor benutzen, der uns angibt, wie viele Geldeinheiten die Einsparung einer Reisezeitstunde wert ist. In den Gesamtkosten für den Nutzer kann die in Geldeinheiten angebbare benötigte Reisezeit somit mit der Maut verrechnet werden. Benutzt man für alle Nutzer die gleiche Latenzsensitivität, so bezeichnet man das Modell als Netzwerk mit homogenen Nutzern. Man wird jedoch schnell feststellen, dass unterschiedliche Nutzer in der Realität auch unterschiedlich auf Maut reagieren können. Mit dieser Art heterogener Nutzer, werden wir uns in dieser Bachelorarbeit beschäftigen, indem wir die Resultate der Arbeit „Tolls for heterogeneous selfish users in multicommodity networks and generalized congestions games“ von 2004 von Fleischer, Jain und Mahdian [7] betrachten. Wir beschäftigen uns also mit der Frage, ob man in einem Mehrgüternetzwerk mit heterogenen Nutzern das Nash-Gleichgewicht durch Einführung einer Maut systemoptimal machen kann oder auch, ob man Nutzer eines Systems durch die Einführung von Maut so beeinflussen kann, dass sich eine gewünschte Belastung der Kanten einstellt.

Um einen besseren Einstieg in diese Fragestellung zu ermöglichen, betrachten wir zunächst ein Beispiel, in dem wir durch die Einführung von Maut das Systemoptimum erzwingen wollen. Gegeben sei das Eingüternetzwerk aus Abbildung 1 mit infinitesimal kleinen Nutzern mit der Gesamtgröße  $d = 1$ , die alle von  $s$  nach  $t$  gelangen wollen.

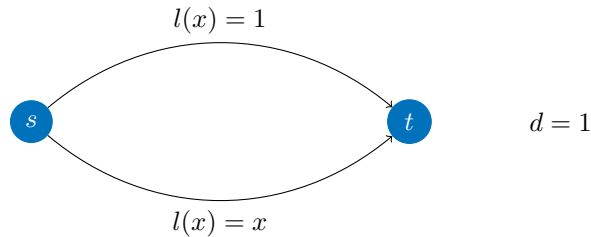


Abbildung 1: Minimalbeispiel eines Eingüternetzwerkes

Die Latenz (oder Reisezeit) auf dem oberen Pfad beträgt immer 1, die auf dem unteren entspricht der Anzahl der Nutzer, die diesen wählen. Lässt man die Nutzer ihren Weg wählen, so minimiert jeder Nutzer für sich seine Kosten, welche in einem System ohne Maut der Latenz entsprechen. In unserem Minimalbeispiel entspricht das so entstehende Nash-Gleichgewicht der Belastung aus Abbildung 2 mit einer Gesamtlatenz von  $C_{\text{Nash}} = 1$ .

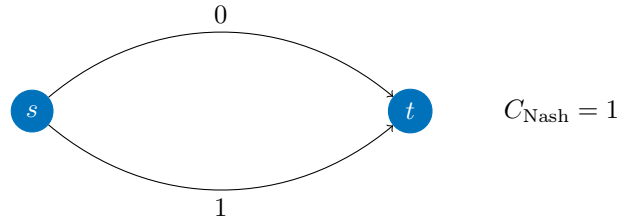


Abbildung 2: Nash-Gleichgewicht im Minimalbeispiel

Betrachten wir einen  $\epsilon$ -kleinen Nutzer, der auf die obere Kante wechselt. Obwohl er sich durch diesen Wechsel in seiner Reisezeit nicht verschlechtert, würde er sofort zurückwechseln, da die Latenz auf der unteren Kante nach seinem Wechsel  $(1 - \epsilon) \leq 1$  betragen würde. Somit kann sich kein Nutzer durch alleinigen Routenwechsel verbessern, weshalb die in Abbildung 2 dargestellte Belastung dem Nash-Gleichgewicht entspricht.

Man kann sich vorstellen, dass der Netzwerkbetreiber ein anderes Gleichgewicht anstrebt: die Minimierung der Gesamtlatenz, welche dem Systemoptimum entspricht. Das Systemoptimum in diesem Netzwerk entspricht der folgenden Belastung mit einer Gesamtlatenz von  $C_{\text{SO}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ .

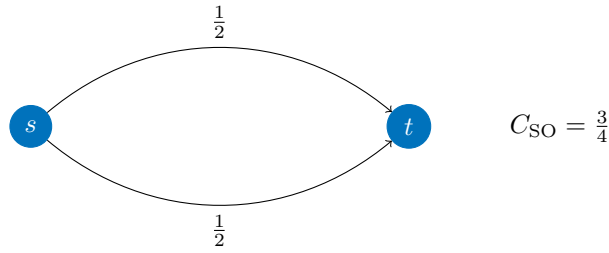


Abbildung 3: Systemoptimum im Minimalbeispiel

Betrachtet man die Gesamtlatenz  $C(z) = z^2 + (1 - z)$  ausgedrückt mit der Belastung  $z$  auf der unteren Kante, so sieht man, dass deren Ableitung  $C'(z) = 2z - 1$  bei  $z = \frac{1}{2}$  eine Nullstelle hat. Die Gesamtlatenz nimmt damit in der dargestellte Belastung das Optimum an, welches in diesem Fall dem Minimum entspricht. Somit stellt die in Abbildung 3 dargestellte Belastung das Systemoptimum dar.

Pigou [12] betrachtete dieses Netzwerk schon 1920 zur Untersuchung des Kostenunterschiedes zwischen der minimal möglichen mittleren Gesamtreisezeit (dem Systemoptimum) und den Kosten, die bei der eigennützigen Routenwahl (dem Nash-Gleichgewicht) entstehen. Das Verhältnis dieser beiden Werte wird auch als Preis der Anarchie bezeichnet (Koutsoupias und Papadimitriou [10]):

$$\text{POA} = \frac{C_{\text{Nash}}}{C_{\text{SO}}}.$$

Da stets gilt  $C_{\text{SO}} \leq C_{\text{Nash}}$ , folgt  $\text{POA} \geq 1$ . Geht der Preis der Anarchie gegen 1, so ist der negative Einfluss der eigennützigen Routenwahl relativ gering und die Kosten der beiden Gleichgewichte ähnlich. In unserem Beispiel beträgt der Preis der Anarchie  $\text{POA} = \frac{4}{3}$ . Mit leichter Veränderung der Kostenfunktion der unteren Kante kann man jedoch ein Netzwerk erreichen, bei dem er gegen unendlich geht (Roughgarden [13], S. 31f.).

Die Frage in unserem Fall ist, ob der Netzbetreiber durch die Einführung von Maut erreichen kann, dass sich das Systemoptimum als Nash-Gleichgewicht einstellt. In Netzwerken, bei denen die eigennützige Routenwahl einen hohen negativen Einfluss auf die mittlere Gesamtreisezeit hat, wäre dies besonders erwünscht.

Angenommen in unserem Beispielnetz reagieren alle Nutzer gleich auf Maut und minimieren ihre generalisierten Kosten als Summe von Reisezeit in Geldeinheiten und Maut, so kann die Erzwingung des Systemoptimums durch die Einführung einer Maut von  $\frac{1}{2}$  auf der unteren Kante erreicht werden. Die neuen Kostenfunktionen der Kanten seien in Abbildung 4 noch einmal abgebildet.

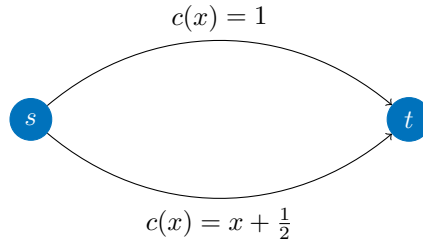


Abbildung 4: Kantenkosten nach Einführung der Maut im Minimalbeispiel

Man kann leicht sehen, dass mit diesen veränderten Kostenfunktionen im Nash-Gleichgewicht nur noch die Hälfte der Nutzer die untere Kante wählen und sich damit das Systemoptimum einstellt. Aber existiert in jedem Netzwerk eine optimale Maut, die das Systemoptimum erzwingt?

In ihrer Arbeit betrachten Fleischer et al. [7] heterogene Nutzer, die unterschiedlich auf Maut reagieren können. Für homogene Nutzer, die alle gleich auf Maut reagieren, wurde die Aussage schon 1956 von Beckman, McGuire und Winsten bewiesen:

**Satz**(1956, Beckman et al. [1]). *Das Systemoptimum ist für Mehrgüternetzwerke mit homogenen Nutzern durch Maut erzwingbar.*

*Beweisidee.* Sei  $f = (f_e)_{e \in E}$  das Systemoptimum. Im Systemoptimum wird sich die Gesamtlatenz nicht verbessern, wenn ein infinitesimal kleiner Nutzer seinen Pfad ändert. Das heißt, die Ableitungen aller Pfadlatenzen sind gleich, was man salopp schreiben kann als

$$\frac{\partial}{\partial f} \underbrace{\sum_{e \in p} l_e(f_e) f_e}_{\text{Pfadlatenz}} = \frac{\partial}{\partial f} \sum_{e \in p'} l_e(f_e) f_e \quad \forall p, p' \text{ Pfade.}$$

Weil die Summe endlich ist, kann die Ableitung in die Summe gezogen werden, also gilt

$$\sum_{e \in p} \frac{\partial}{\partial f} l_e(f_e) f_e = \sum_{e \in p'} \frac{\partial}{\partial f} l_e(f_e) f_e \quad \forall p, p' \text{ Pfade}$$

und damit nach Anwendung der Produktregel

$$\sum_{e \in p} \underbrace{l'_e(f_e) f_e + l_e(f_e)}_{\text{Kantenkosten}} = \sum_{e \in p'} l'_e(f_e) f_e + l_e(f_e) \quad \forall p, p' \text{ Pfade.}$$

Wählt man  $l'_e(f_e) f_e$  als Mautkosten der Kante  $e$ , so entspricht die Summe  $l'_e(f_e) f_e + l_e(f_e)$  den Kantenkosten für die Benutzung der Kante  $e$ , da alle Nutzer gleich auf Maut reagieren. Mit Maut  $l'_e(f_e) f_e$  sind also die Pfadkosten aller Pfade gleich und alle Nutzer haben somit gleiche Kosten, was die Bedingung für ein Nash-Gleichgewicht ist. Damit haben wir eine Maut gefunden, mit der sich das Systemoptimum als Nash-Gleichgewicht einstellt.  $\square$



Die Erweiterung dieser Aussage auf heterogene Nutzer gelang erst 50 Jahre später. Zunächst schränkten sich Cole, Dodis und Roughgarden 2003 bei ihrer Betrachtung auf Eingüternetzwerke, das heißt Netzwerke mit nur einem Quelle-Ziel-Paar, ein:

**Satz** (2003, Cole et al. [5]). *Das Systemoptimum ist für Eingüternetzwerke mit heterogenen Nutzern durch Maut erzwingbar.*

*Beweisidee.* Im Beweis konstruieren Cole et al. eine stetige Abbildung, die jeder Maut eine bessere Maut zuordnet, in dem Sinne, dass die von der Maut erzwungene Auslastung die Gesamtlatenz verringert. Auf diese Abbildung wird der Fixpunktsatz von Brouwer [3] angewendet, um zu zeigen, dass sie mindestens einen Fixpunkt hat. Zu zeigen ist nun noch, dass die Fixpunkte der Abbildung die gewünschten optimalen Mauten sind, die das Systemoptimum erzwingen. Dieser Beweis ist nicht offensichtlich und macht starken Gebrauch von den Eigenschaften des zugrunde liegenden Netzwerkes. Bei Interesse kann dieser in der Ausarbeitung [5] nachgelesen werden.  $\square$

Ein Jahr später haben Fleischer et al. bewiesen, dass die Einschränkung auf Eingüternetzwerke für die Existenz von optimaler Maut nicht nötig ist.

**Satz** (2004, Fleischer et al. [7]). *Das Systemoptimum ist für Mehrgüternetzwerke mit heterogenen Nutzern durch Maut erzwingbar.*

Im Beweis dieser Aussage, der in dieser Arbeit vorgestellt werden soll, geben Fleischer et al. ein lineares Programm an, mit dem die optimale Maut sogar berechnet werden kann. Formuliert man dieses um, so kann die Maut in polynomieller Zeit bezogen auf die Anzahl der Kanten des Netzwerkes berechnet werden. Außerdem charakterisieren Fleischer et al. die Menge der erzwingbaren Flüsse und zeigen, dass nicht nur das Systemoptimum erzwingbar ist. Auch eine obere Schranke an die Mauthöhe, welche exponentiell in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes ist, wird bewiesen. Damit ist ein besserer Realitätsbezug gegeben, da in der Realität die Maut möglichst klein gehalten werden sollte. Abschließend übertragen die Autoren die Resultate auf allgemeine Auslastungsspiele und zeigen, dass dort eine exponentielle Maut zur Erzwingung des Systemoptimums nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist.

Diese Resultate wollen wir im Folgenden genauer betrachten. Zusätzlich zu den Resultaten der Ausarbeitung von Fleischer et al. untersuchen wir die exponentielle obere Schranke an die Mauthöhe in Mehrgüternetzwerken in Kapitel 4.2 genauer und zeigen, dass sie für Mehrgüternetzwerke, in denen die maximale Länge eines Pfades hinreichend klein ist, verbesserbar ist.

## 2 Das diskrete Modell

Bevor wir die angesprochenen Resultate beweisen können, müssen wir einige Begriffe definieren.

**Definition 2.1.** *Ein Mehrgüternetzwerk im diskreten Modell besteht aus*

- *einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$ ,*
- *einer nichtfallenden, stetigen Latenzfunktion  $l_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  für alle Kanten  $e \in E$ ,*

- $K$  Gütern  $\{(s_i, t_i, d_i)\}_{i=1}^K$ ,
- Latenzsensitivitäten  $\alpha_i \geq 0$  für alle Güter  $i$ .

O. B. d. A. gelte  $\sum_i d_i = 1$ . Des Weiteren sei  $P_i$  die Menge aller Pfade von  $s_i$  nach  $t_i$  in  $G$  und  $P = \bigcup_i P_i$ .

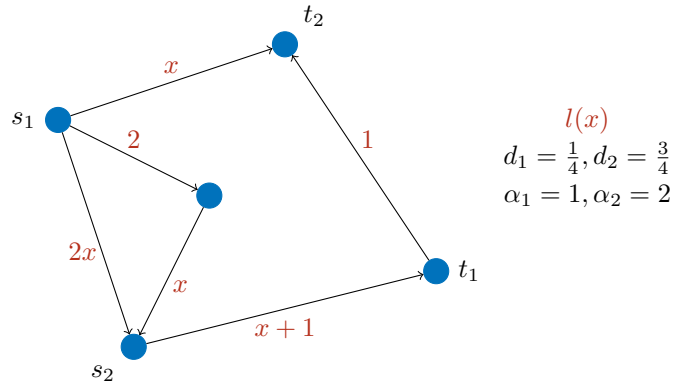


Abbildung 5: Beispiel für ein Mehrgüternetzwerk im diskreten Modell

Die Latenzfunktion  $l_e$  gibt an, wie viel Latenz jedes Gut aufbringen muss, um eine Kante  $e$  bei der entsprechenden Belastung zu nutzen. Jedes Gut enthält die Informationen, wie viele infinitesimal kleine Agenten  $d_i$  vom Startknoten  $s_i$  zum Zielknoten  $t_i$  geschickt werden sollen. Die Latenzsensitivitäten  $\alpha_i$  geben die Reaktion der Agenten des Typs  $i$  auf Verzögerung an und werden bei der Definition der Streckenkosten genauer betrachtet.

Im folgenden sei  $m$  stets die Anzahl der Kanten und  $n$  die Anzahl der Knoten des Netzwerkes, das heißt es sei  $m = |E|$  und  $n = |V|$ .

**Definition 2.2.** Ein Mehrgüterfluss im diskreten Modell ist ein Vektor

$$f = (f_p^i)_{i=1, \dots, K, p \in P_i}$$

mit nichtnegativen Einträgen.

Ein Mehrgüterfluss gibt an, dass das  $i$ -te Gut  $f_p^i$  Einheiten entlang  $p$  schickt.

**Definition 2.3.** Ein Mehrgüterfluss  $f$  heißt zulässig, wenn gilt

$$\sum_{p \in P_i} f_p^i = d_i \quad \forall i.$$

Ein zulässiger Mehrgüterfluss erfüllt damit die Nachfrage  $d_i$  jedes Gutes  $i$ .

Da Mehrgüterflüsse eine exponentielle Größe in der Anzahl der Pfade haben, definiert man einen weiteren Begriff, um die Belastung eines Netzwerkes in polynomieller Größe angeben zu können:

**Definition 2.4.** Eine Auslastung im diskreten Modell ist ein Vektor

$$g = (g_e)_{e \in E}.$$

Jeder Fluss  $f$  induziert eine Auslastung

$$f_e = \sum_i \sum_{p \in P_i: e \in p} f_p^i.$$

Im Unterschied zu einem Mehrgüterfluss definiert eine Auslastung die Verteilung der Agenten auf das Netzwerk kantenweise. Dabei wird Kante  $e$  von  $g_e$  Einheiten genutzt. Aus einer Auslastung kann man damit im Gegensatz zu einem Mehrgüterfluss nicht mehr auf die Verteilung eines Gutes auf die Pfade schließen. Aus diesem Grund werden Auslastungen für uns im Folgenden nützlich sein, da einem Netzbetreiber, der eine bestimmte Kantenbelastung erzwingen möchte, in der Regel nicht wichtig ist, wie die einzelnen Güter sich auf die Kanten verteilen. Um trotz der Güterunabhängigkeit definieren zu können, ab wann es mit einer festen Auslastung bzw. Kantenbelastung möglich ist die geforderte Nachfrage zu erfüllen, nutzt man die Zulässigkeit des zugehörigen Mehrgüterflusses:

**Definition 2.5.** Eine Auslastung  $g$  heißt zulässig, wenn ein zulässiger Mehrgüterfluss  $f$  existiert, für dessen induzierte Auslastung  $f_e$  gilt:  $f_e \leq g_e \forall e \in E$ .

## 2.1 Existenz von optimaler Maut im diskreten Modell

Führen wir nun auf jeder Kante  $e$  Mautkosten  $\tau_e$  ein, so werden die Kosten, die Gut  $i$  für die Nutzung einer Kante aufbringen muss, beschrieben durch

$$\alpha_i l_e(f_e) + \tau_e.$$

Die Latenzsensitivität  $\alpha_i$  ist dabei ein positiver Indikator für die Reaktion von Agenten des Typs  $i$  auf Verspätung und wird in der Verkehrsplanung auch als ‘value of travel time savings’ bezeichnet, da er den Geldwert der Reisezeiterparnis angibt.

Zunächst nehmen wir an, dass die Kosten eines Weges der Summe der Kantenkosten auf dem Weg entsprechen. In Kapitel 6.3 werden wir sehen, dass diese Annahme verallgemeinert werden kann. Den mit Maut  $(\tau_e)_{e \in E}$  ausgestatteten Graphen wollen wir mit  $G^\tau$  bezeichnen.

Ziel ist es nun, die Maut so anzupassen, dass eine bestimmte Kantenauslastung (zum Beispiel das Systemoptimum) erzwungen wird.

**Definition 2.6.** Eine Auslastung  $g$  heißt erzwingbar, wenn eine Menge nicht-negativer Maut  $\tau$  existiert, sodass die vom Nashfluss in  $G^\tau$  induzierte Auslastung  $g$  ist.

Eine Auslastung ist also erzwingbar, wenn sie sich als Nash-Gleichgewicht im Graphen  $G^\tau$  einstellt, wobei ein Nashfluss folgendermaßen definiert sei:

**Definition 2.7.** Ein Fluss  $f$  in  $G^\tau$  ist ein Nashfluss, wenn

$$\alpha_i l_p(f) + \tau_p \leq \alpha_i l_{p'}(f) + \tau_{p'}$$

für alle  $i$  und  $p, p' \in P_i$  mit  $f_p^i > 0$ . Ein Nashfluss entspricht damit einem Fluss, bei dem sich kein Nutzer durch alleinigen Routenwechsel verbessern kann.

**Definition 2.8.** Eine Auslastung  $g$  heißt optimal, wenn  $g$

$$\sum_{e \in E} l_e(g) g_e$$

über alle zulässigen Auslastungen minimiert.

Optimale Auslastungen minimieren damit die Gesamtlatenz und sind systemoptimal.

Mit den eingeführten Begriffen können wir nun die Hauptaussage der Arbeit von Fleischer et al. formulieren.

**Korollar 2.1** (Fleischer et al. [7]). Für jedes diskrete Mehrgüternetzwerk existiert Maut, die eine optimale Auslastung  $g^*$  erzwingt.

Wenn wir dieses Korollar beweisen können, wissen wir, dass in diskreten Mehrgüternetzwerken das Nash-Gleichgewicht mit Maut systemoptimal gemacht werden kann. Für den Beweis benötigen wir allerdings noch einige Vorüberlegungen.

Sei  $g$  die Auslastung, die erzwungen werden soll. Wir betrachten das lineare Programm  $P_g$ , welches wir für unsere Beweise nutzen wollen:

$$P_g : \quad \min \sum_i \alpha_i \sum_{p \in P_i} l_p(g) f_p^i \quad (P.1)$$

$$\text{sodass} \quad \sum_i \sum_{p \in P_i: e \in p} f_p^i \leq g_e \quad \forall e \in E \quad (P.2)$$

$$\sum_{p \in P_i} f_p^i = d_i \quad \forall i \quad (P.3)$$

$$f_p^i \geq 0 \quad \forall i \quad \forall p \in P_i \quad (P.4)$$

Betrachtet man Bedingung (P.2), so stellt man fest, dass dies die Bedingung für die Zulässigkeit von  $g$  als Auslastung ist. Fluss  $f$  in  $P_g$  existiert also nach Definition 2.5, wenn  $g$  zulässig ist. (P.3) und (P.4) sind Bedingungen für die Zulässigkeit von  $f$  als Mehrgüterfluss. Die Kostenfunktion (P.1) minimiert bei Latenzkosten von Auslastung  $g$  und Belastungen von Fluss  $f$ , die Gesamtlatenz für alle Güter in Geldeinheiten. Gesucht wird also ein zulässiger Fluss  $f$ , der eine Auslastung induziert, die nicht größer ist als  $g$  und die Gesamtlatenz in Geldeinheiten minimiert.

Um mit dem aufgestellten linearen Programm  $P_g$  die Aussage beweisen zu können, nutzen wir die Theorie der Dualität aus der linearen Optimierung (siehe zum Beispiel Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 67ff.). Es gibt viele verschiedene Formulierungen der Dualitätsregeln, wir werden folgende Formulierung nutzen, um unser lineares Programm  $P_g$  zu dualisieren:

lineares Programm:

$$\begin{aligned} \min \quad & a^T x \\ \text{sodass} \quad & Px \leq p \\ & Cx = c \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

duales Programm:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T z - p^T t \\ \text{sodass} \quad & C^T z - P^T t \leq a \\ & t \geq 0 \end{aligned}$$

Um das lineare Programm  $P_g$  mit den angegebenen Dualisierungsregeln leichter dualisieren zu können, formulieren wir es zunächst um. Man kann nachvollziehen, dass  $P_g$  äquivalent zu dem folgenden linearen Programm in Matrixschreibweise ist.

$$P_g^* : \quad \min (\alpha_i l_p(g))_{i=1, \dots, K, p \in P_i}^T f \quad (P^*.1)$$

$$\text{sodass } Bf \leq (g_e)_{e \in E} \quad (P^*.2)$$

$$Cf = (d_j)_{j=1, \dots, K} \quad (P^*.3)$$

$$f \geq 0 \quad (P^*.4)$$

Dabei ist  $f = (f_p^i)_{i=1, \dots, K, p \in P_i}$  als Mehrgüterfluss ein Spaltenvektor, der alle Nutzertypen  $i$  durchläuft und für festes  $i$  auch alle Pfade  $p \in P_i$ . Der Vektor  $f$  ist also  $|P| = \sum_i |P_i|$ -dimensional, da alle Pfade aus  $P$  genau einmal durchlaufen werden. Analog ist  $(\alpha_i l_p(g))_{i=1, \dots, K, p \in P_i}^T$  ein  $|P|$ -dimensionaler Zeilenvektor. Dann ist  $B$  eine  $(m \times |P|)$ -Matrix mit Einträgen

$$B_{e,p} = \begin{cases} 1 & e \in p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $C$  eine  $(K \times |P|)$ -Matrix mit Einträgen

$$C_{j,p} = \begin{cases} 1 & p \in P_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf dieses lineare Programm können wir nun leichter die oben formulierten Dualisierungsregeln anwenden und erhalten das folgende lineare Programm als duales Programm von  $P_g$ .

$$D_g^* : \quad \max (d_i)_{i=1, \dots, K}^T z - (g_e)_{e \in E}^T \tau \quad (D^*.1)$$

$$\text{sodass } C^T z - B^T \tau \leq (\alpha_i l_p(g))_{i=1, \dots, K, p \in P_i}^T \quad (D^*.2)$$

$$\tau \geq 0 \quad (D^*.3)$$

Um mit dem dualen Programm besser arbeiten zu können, formulieren wir es erneut um und erhalten:

$$D_g : \quad \max \sum_i d_i z_i - \sum_{e \in E} g_e \tau_e \quad (D.1)$$

$$\text{sodass } z_i - \sum_{e \in p} \tau_e \leq \alpha_i l_p(g) \quad \forall i \quad \forall p \in P_i \quad (D.2)$$

$$\tau_e \geq 0 \quad \forall e \in E \quad (D.3)$$

Betrachten wir  $\tau$  als Mautkosten, so steht Bedingung (D.2) für die Zulässigkeit von  $\tau$  als Maut. Bedingung (D.1) bedeutet, dass  $z_i$  für jedes Gut  $i$  nicht größer als die Kosten (Latenz und Maut) aller Pfade  $p \in P_i$  wird, da umformuliert gilt  $z_i \leq \alpha_i l_p(g) + \sum_{e \in p} \tau_e$ . Da  $z_i$  kleiner gleich der Kosten aller nutzbaren Pfade für Gut  $i$  ist, ist es auch kleiner gleich der Kosten des kürzesten Pfades, also den Kosten, die ein Agent von Typ  $i$  aufbringen muss, um sein Ziel zu erreichen. Der Minuend der Kostenfunktion ist somit kleiner gleich der Gesamtkosten aller Güter bei Auslastung  $g$ . Von ihm wird die Summe der zu zahlenden Mautkosten bei Auslastung  $g$  abgezogen. Da maximiert wird, wird  $z_i$  also im Optimum maximal sein und damit die minimal möglichen Kosten für Gut  $i$  darstellen. Diese Interpretation passt mit der Tatsache zusammen, dass das primale und duale Programm im Optimum den gleichen Zielfunktionswert annehmen. Wir erhalten also im dualen Programm einen Ausdruck für die Maut, obwohl wir im primalen Programm nur eine Auslastung angeben, die im Nash-Gleichgewicht erzwungen werden soll.

Zu den linearen Programmen  $P_g$  und  $D_g$  lassen sich folgende Beobachtungen machen.

**Beobachtung 2.1** (Fleischer et al. [7]). *Sind  $f$  und  $(\tau, z)$  optimale Lösungen von  $P_g$  und  $D_g$ , dann ist  $f$  ein Nashfluss.*

*Beweis.* Nach dem Satz vom komplementären Schlupf (Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 72) gilt

$$f_p^i > 0 \Rightarrow z_i = \sum_{e \in p} \tau_e + \alpha_i l_p(g).$$

Die Variable  $z_i$  repräsentiert also die Kosten des von Gut  $i$  genutzten Pfades  $p$  und damit die Kosten jedes von Gut  $i$  genutzten Pfades. Da für alle nicht genutzten Pfade  $p'$  gilt

$$\sum_{e \in p'} \tau_e + \alpha_i l_{p'}(g) \stackrel{(D.1)}{\geq} z_i = \sum_{e \in p} \tau_e + \alpha_i l_p(g),$$

kann sich kein Nutzer durch alleinigen Routenwechsel verbessern und  $f$  ist damit ein Nashfluss.  $\square$

**Beobachtung 2.2** (Fleischer et al. [7]). *Ist  $g$  eine zulässige Auslastung, so haben  $P_g$  und  $D_g$  optimale Lösungen.*

*Beweis.*  $P_g$  hat mit Fluss  $f$ , der  $g$  induziert, eine zulässige Lösung. Definiere

$$\tau_e := 0 \quad \forall e \in E, \quad z_i := 0 \quad \forall i.$$

Dann ist  $(\tau, z)$  eine zulässige Lösung von  $D_g$ , weil gilt

$$\underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{l_p(g)}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{e \in p} \tau_e}_{=0} \geq 0 = z_i.$$

Also haben  $P_g$  und  $D_g$  beide zulässige und nach dem Satz über primal-duale Paare auch optimale Lösungen (Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 70).  $\square$

Mit Beobachtung 2.1 und 2.2 wissen wir nun, dass  $P_g$  eine optimale Lösung hat, sobald  $g$  eine zulässige Auslastung ist und diese optimale Lösung von  $P_g$  ein Nashfluss ist.

Des Weiteren lässt sich aus dem linearen Programm eine minimale Auslastung definieren, die das folgende Theorem und dessen Beweis vorbereitet.

**Definition 2.9.** *Eine Auslastung  $g$  heißt minimal genau dann, wenn das lineare Programm  $P_g$  eine optimale Lösung hat, in der die Ungleichung (P.1) für alle Kanten  $e \in E$  scharf ist.*

Zusätzlich formulieren wir folgende Definition für den späteren Beweis der Hauptaussage.

**Definition 2.10.** *Eine Auslastung  $g$  heißt minimal zulässig, wenn sie zulässig ist und für alle Auslastungen  $g'$  mit  $g'_e \leq g_e \forall e \in E$  und  $g'_e < g_e$  für mindestens eine Kante  $e$  gilt:  $g'$  ist nicht mehr zulässig.*

Eine minimal zulässige Auslastung kann also auf keiner Kante verringert werden, ohne dass sie ihre Zulässigkeit verliert.

**Theorem 2.1** (Fleischer et al. [7]). *Eine zulässige Auslastung  $g$  ist erzwingbar genau dann, wenn  $g$  minimal ist.*

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Sei  $g$  eine minimale Auslastung. Dann existiert eine optimale Lösung  $f$  von  $P_g$ , in der die Ungleichung (P.1) scharf ist für alle Kanten  $e$ . Daraus folgt  $f$  induziert  $g$ . Außerdem existiert eine optimale Lösung  $(\tau, z)$  von  $D_g$ , womit wir mit Beobachtung 2.1 wissen, dass  $f$  ein Nashfluss in  $G^\tau$  ist. Die Auslastung  $g$  wird also von einem Nashfluss in  $G^\tau$  induziert und ist mit Maut  $\tau$  erzwingbar.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $g$  erzwingbar. Dann existiert Maut  $\tau$ , sodass  $g$  vom Nashfluss  $f$  in  $G^\tau$  induziert wird. Da  $f$  Auslastung  $g$  induziert, gilt also

$$g_e = \sum_i \sum_{p \in P_i: e \in p} f_p^i \quad \forall e \in E,$$

das heißt Ungleichung (P.1) ist in  $f$  scharf für alle Kanten  $e$ . Da  $f$  ein Fluss ist, gilt außerdem

$$f_p^i \geq 0 \quad \forall i \forall p \in P_i$$

und Bedingung (P.3) ist damit erfüllt. Weiter gilt

$$\sum_{p \in P_i} f_p^i = d_i \quad \forall i,$$

das heißt Bedingung (P.2) gilt für  $f$ . Also ist  $f$  zulässig für  $P_g$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $f$  optimal für  $P_g$  ist. Da  $f$  ein Nashfluss in  $G^\tau$  ist, haben alle Pfade, die von Agenten des Typs  $i$  genutzt werden, den gleichen Nutzen, das heißt es gilt

$$\alpha_i l_p(g) + \tau_p = \alpha_i l_{p'}(g) + \tau_{p'} \quad \forall p, p' \in P_i : f_p^i, f_{p'}^i > 0.$$

Für alle  $i$  definieren wir  $z_i$  als die minimalen Kosten für Nutzertyp  $i$ :

$$z_i := \alpha_i l_p(g) + \tau_p \quad \text{mit } p \in P_i : f_p^i > 0.$$

Dann ist  $z_i$  wohldefiniert, da alle Agenten des Typs  $i$  Pfade mit gleichen Kosten nutzen. Da  $f$  ein Nashfluss ist, gilt außerdem

$$z_i = \alpha_i l_p(g) + \tau_p \leq \alpha_i l_{\hat{p}}(g) + \tau_{\hat{p}} \quad \forall i \quad \forall p \in P_i : f_p^i > 0, \quad \forall \hat{p} \in P_i : f_{\hat{p}}^i = 0$$

und damit Bedingung (D.1). Betrachten wir  $(\tau, z)$  als Lösung von  $D_g$ , so ist diese also zulässig. Damit sind  $f$  als Lösung von  $P_g$  und  $(\tau, z)$  als Lösung von  $D_g$  beide zulässig und erfüllen die Bedingungen des komplementären Schlupfes:

- Nach Definition von  $z_i$  gilt

$$f_p^i > 0 \Rightarrow z_i - \sum_{e \in p} \tau_e = \alpha_i l_p(g).$$

Und umgekehrt

$$z_i - \sum_{e \in p} \tau_e < \alpha_i l_p(g) \Leftrightarrow z_i < \alpha_i l_p(g) + \sum_{e \in p} \tau_e \Rightarrow f_p^i = 0,$$

da  $z_i$  die minimalen Kosten angibt und es somit mindestens einen günstigeren Pfad  $p$  für Nutzertyp  $i$  gibt.

- Weil  $g$  von  $f$  induziert wird, gilt

$$\sum_i \sum_{p \in P_i : e \in p} f_p^i = g_e \quad \forall e \in E,$$

also auch für  $e = e'$  mit  $\tau_{e'} > 0$ .

- Weil  $f$  ein Fluss in  $P_g$  ist, gilt

$$\sum_{p \in P_i} f_p^i = d_i \quad \forall i,$$

also auch für  $i = j$  mit  $z_j > 0$ .

Nach dem Satz vom komplementären Schlupf folgt also, dass  $f$  in  $P_g$  und  $(\tau, z)$  in  $D_g$  optimal sind. Also hat  $P_g$  eine optimale Lösung  $f$ , die Ungleichung (P.1) scharf macht für alle Kanten  $e$ , das heißt  $g$  ist minimal.  $\square$

Mit diesen Vorüberlegungen, können wir nun beweisen, dass das Systemoptimum durch Maut erzwingbar ist:

*Beweis von Korollar 2.1.* Sei  $g$  eine optimale Auslastung. Wir wollen diese zu einer minimal zulässigen Auslastung machen und zeigen, dass sie minimal ist. Über minimale Auslastungen wissen wir mit Theorem 2.1, dass sie erzwingbar sind. Also müssen wir zuletzt nur noch zeigen, dass bei der Veränderung der Auslastung die Optimalität nicht verloren geht.

Betrachten wir also zunächst die Kanten von  $G$  in einer beliebigen Reihenfolge  $e_1, e_2, \dots, e_{|E|}$ . Sei  $g^{(0)} := g$ . Für jede Kante  $e_i$  sei  $g^{(i)}$  die Auslastung mit

$$g_e^{(i)} = g_e^{(i-1)} \quad \forall e \neq e_i$$

und  $g_{e_i}^{(i)}$  sei der minimale Wert, sodass  $P_{g^{(i)}}$  noch eine zulässige Lösung hat.

$$g := g^{(0)} \rightarrow g^{(1)} \rightarrow g^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow g^{(|E|)} =: g^*$$



Dann ist  $g^{(|E|)} =: g^*$  minimal zulässig nach Definition.

Da  $g^*$  zulässig ist, hat  $P_{g^*}$  mit Beobachtung 2.2 eine optimale Lösung. Diese macht Ungleichung (P.1) scharf für alle Kanten, da  $g^*$  minimal zulässig ist. Nach Definition ist  $g^*$  somit minimal und mit Theorem 2.1 erzwingbar.

Es ist noch zu zeigen, dass  $g^*$  optimal ist: Es gilt

$$\sum_{e \in E} l_e(g^*)g_e^* \stackrel{g_e^* \leq g_e \ \forall e \in E}{\leq} \sum_{e \in E} l_e(g)g_e,$$

weil Latenzfunktionen nichtfallend sind. Also ist  $g^*$  optimal, weil  $g$  optimal ist.  $\square$

## 2.2 Charakterisierung erzwingbarer Auslastungen

In vielen Situationen ist es das Systemoptimum, welches man erzwingen möchte, aber das nächste Korollar zeigt, dass auch andere Auslastungen erzwingbar sind.

**Korollar 2.2** (Fleischer et al. [7]). *Ist  $w(g): \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  eine beliebige, in jedem Argument nichtfallende Funktion, dann existiert Maut, die eine Auslastung erzwingt, die  $w$  über alle zulässigen Auslastungen minimiert.*

*Beweis.* Der Beweis von Korollar 2.1 funktioniert auch, wenn man eine optimale Auslastung  $g$  als eine Auslastung definiert, die eine beliebige nichtfallende Funktion  $w$  minimiert:  $w(g) \leq w(g')$  für alle zulässigen Auslastungen  $g'$ .

Man muss nur den letzten Teil des Beweises anpassen, in dem gezeigt wird, dass  $g^*$  optimal ist. Es gilt

$$w(g^*) \stackrel{g_e^* \leq g_e \ \forall e \in E}{\leq} w(g),$$

da  $w$  nichtfallend ist. Also ist  $g^*$  optimal, weil  $g$  optimal ist.  $\square$

**Anwendungsbeispiel 2.1.** *Die Erzwingung einer Auslastung  $g$ , die*

$$\max_i \min_{p \in P_i} l_p(g)$$

*minimiert, stellt sicher, dass ein Notfallfahrzeug von jeder Quelle  $s_i$  das entsprechende Ziel  $t_i$  in kürzestmöglicher Zeit erreicht, da dieses den latenzminimalen Weg von  $s_i$  nach  $t_i$  wählt, Typ  $i$  dabei jedoch beliebig ist.*

Eine optimale Auslastung minimiert zwar die Gesamtlatenz, berücksichtigt dabei aber nicht die einzelnen Latenzsensitivitäten der Nutzer. So kann es sein, dass gerade die Nutzer mit einer hohen Latenzsensitivität im Systemoptimum längere Wege wählen müssen, damit die Gesamtlatenz niedrig bleibt. Es kann deshalb sinnvoll sein, Optimalität wie folgt zu definieren.

**Definition 2.11.** *Ein Fluss  $f$  ist gewichtet optimal, wenn er*

$$\sum_i \alpha_i \sum_{p \in P_i} l_p(f) f_p^i$$

*über alle zulässigen Flüsse minimiert.*

Ein gewichtet optimaler Fluss minimiert damit die gleiche Summe wie die Zielfunktion von  $P_g$ , welche der Gesamtlatenz ausgedrückt in Geldeinheiten entspricht. Wir werden sehen, dass gewichtet optimale Flüsse auch erzwingbar sind. Damit sind nicht nur die von einzelnen Nutzern unabhängigen Kantenbelastungen in Form von Auslastungen, sondern auch die Verteilungen der Nutzer auf Pfade in Form von Flüssen erzwingbar.

**Korollar 2.3** (Fleischer et al. [7]). *In jedem Mehrgüternetzwerk existiert Maut, die einen gewichtet optimalen Fluss  $f^*$  erzwingt.*

*Beweis.* Sei  $f^*$  der gewichtet optimale Fluss, der  $\sum_{e \in E} f_e^*$  minimiert. Wir wählen damit unter den gewichtet optimalen Flüssen den Fluss aus, bei dem jeder Nutzer den kantenminimalen Weg unter den ihm zur Auswahl stehenden Wegen wählt. Wir wollen zeigen, dass  $f^*$  bzw. dessen induzierte Auslastung minimal ist, um Theorem 2.1 anwenden zu können.

Angenommen  $f^*$  ist nicht minimal, dann existiert eine optimale Lösung  $f$  von  $P_{f^*}$ , für die die Ungleichung (P.1) für mindestens eine Kante  $e \in E$  nicht scharf ist. Es gilt also  $f_e \leq f_e^*$  für alle Kanten und  $f_e < f_e^*$  für mindestens eine Kante  $e \in E$  und damit  $\sum_{e \in E} f_e < \sum_{e \in E} f_e^*$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i \sum_{p \in P_i} l_p(f) f_p^i &\stackrel{l_p \text{ nichtfallend}}{\leq} \sum_i \alpha_i \sum_{p \in P_i} l_p(f^*) f_p^i \\ &\stackrel{f \text{ opt. in } P_{f^*}}{\leq} \sum_i \alpha_i \sum_{p \in P_i} l_p(f^*) f_p^{*i}. \end{aligned}$$

Da  $f^*$  gewichtet optimal ist, ist auch  $f$  gewichtet optimal, was ein Widerspruch dazu ist, dass wir  $f^*$  als gewichtet optimalen Fluss gewählt haben, der  $\sum_{e \in E} f_e^*$  minimiert.

Also ist  $f^*$  minimal und damit mit Theorem 2.1 erzwingbar.  $\square$

Im Beweis von Korollar 2.1 haben wir gesehen, dass wir aus einer zulässigen Auslastung durch Reduzierung der Kantenauslastungen eine erzwingbare Auslastung machen können. Die gleiche Konstruktion können wir nutzen, um zu zeigen, dass jede zulässige Auslastung erzwingbar im folgenden Sinn ist.

**Definition 2.12.** *Maut  $\tau$  erzwingt Auslastung  $g$  schwach, wenn es eine Auslastung  $g' < g$  gibt, die von  $\tau$  erzwungen wird.*

**Korollar 2.4** (Fleischer et al. [7]). *Jede zulässige Auslastung  $g$  ist schwach erzwingbar.*

*Beweis.* Sei  $g$  eine zulässige Auslastung. Wir betrachten die Kanten von  $G$  wie im Beweis zu Korollar 2.1 in einer beliebigen Reihenfolge  $e_1, \dots, e_m$ . Für jede Kante minimieren wir die Belastung auf ihr, sodass die Auslastung noch zulässig bleibt. Die resultierende Auslastung  $g'$  ist minimal zulässig nach Konstruktion und damit wie im Beweis von Korollar 2.1 minimal. Also ist  $g'$  mit Theorem 2.1 erzwingbar. Da  $g' \leq g$  gilt, ist  $g$  damit schwach erzwingbar.  $\square$

Dieses Korollar kann zum Beispiel angewendet werden, um die Maut zu berechnen, die nötig ist, damit eine festgelegte maximale Kantenbelastung nicht überschritten wird, ohne dass dabei ein bestimmter Fluss oder eine bestimmte Auslastung vorgegeben werden muss, die erzwungen werden soll.

### 3 Berechnung der Maut in polynomieller Zeit

Mithilfe des linearen Programms kann die Maut, die zur Erzwingung einer Auslastung  $g$  benötigt wird, berechnet werden. Momentan ist diese Berechnung exponentiell in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes, da der Fluss in  $P_g$  für alle exponentiell vielen Pfade angegeben wird. Wir können die Berechnung jedoch polynomiell machen, indem wir  $P_g$  so umformulieren, dass der Fluss für alle Kanten angegeben wird. Wir wollen also Variablen  $f_e^i \forall i \forall e \in E$  statt  $f_p^i \forall i \forall p \in P_i$  nutzen:

$$P'_g : \quad \min \sum_i \alpha_i \sum_{e \in E} l_e(g) f_e^i \quad (P'.1)$$

$$\text{sodass } \sum_i f_e^i \leq g_e \quad \forall e \in E \quad (P'.2)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(s_i)} f_e^i = d_i \quad \forall i \quad (P'.3)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(t_i)} f_e^i = d_i \quad \forall i \quad (P'.4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e^i - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e^i = 0 \quad \forall i \forall v \in V \setminus \{s_i, t_i\} \quad (P'.5)$$

$$f_e^i \geq 0 \quad \forall i \forall e \in E \quad (P'.6)$$

Bei der Umformulierung des linearen Programms entstehen Kapazitätsbeschränkungsbedingungen (P'.1) für alle Kanten  $e$  und Flusserhaltungsbedingungen (P'.4) für alle Knoten  $v$  des Netzwerkes und alle Güter  $i$ , wobei Quelle  $s_i$  und Ziel  $t_i$  mit Bedingung (P'.2) und (P'.3) gesondert betrachtet werden.  $P'_g$  ist nun polynomiell in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes.

Um das neu erhaltene lineare Programm  $P'_g$  leichter dualisieren zu können, formulieren wir es erneut um. Es lässt sich nachvollziehen, dass  $P'_g$  äquivalent zu folgendem linearen Programm in Matrixschreibweise ist.

$$P''_g : \quad \min (\alpha_i l_e(g))_{i=1, \dots, K, e \in E}^T \tilde{f} \quad (P''.1)$$

$$\text{sodass } J \tilde{f} \leq (g_{e^*})_{e^* \in E} \quad (P''.2)$$

$$I \tilde{f} = (D_{i,v})_{i=1, \dots, K, v \in V} \quad (P''.3)$$

$$\tilde{f} \geq 0 \quad (P''.4)$$

Dabei sei  $\tilde{f} = (f_e^i)_{i=1, \dots, K, e \in E}$  ein  $(Km)$ -dimensionaler Spaltenvektor, der alle Nutzertypen  $i$  durchläuft und für festes  $i$  auch alle Kanten  $e$  des Netzwerkes. Analog ist  $(\alpha_i l_e(g))_{i=1, \dots, K, e \in E}^T$  ein  $(Km)$ -dimensionaler Zeilenvektor. Weiter gilt mit  $E_m$  als  $(m \times m)$ -Einheitsmatrix für die Bedingung (P''.2) der Kapazitätsbeschränkung

$$J = \underbrace{(E_m, E_m, \dots, E_m)}_{k \text{ mal}}$$

das heißt  $J$  ist eine  $(m \times Km)$ -Matrix mit Einträgen

$$J_{e^*,(i,e)} = \begin{cases} 1 & e = e^* \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Bedingung  $(P''.3)$  der Flusserhaltung gilt

$$I_{(i,v),(i^*,e)} = \begin{cases} 1 & e \in \delta^+(v), i = i^* \\ -1 & e \in \delta^-(v), i = i^* \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sodass  $I$  eine  $(Kn \times Km)$ -Blockmatrix ist, bei der nur die Blöcke auf der Diagonalen besetzt sind. Des Weiteren ist  $(D_{i,v})_{i=1,\dots,K,v \in V}$  ein  $(Kn)$ -dimensionaler Spaltenvektor mit

$$D_{i,v} = \begin{cases} d_i & v = s_i \\ -d_i & v = t_i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

der alle Nutzertypen  $i$  durchläuft und für festes  $i$  auch alle Knoten  $v$  des Netzwerkes.

Auf das umformulierte lineare Programm  $P'_g$  können wir nun leicht die Dualisierungsregeln anwenden und erhalten das folgende duale Programm, in dem die Maut weiterhin als Variable  $\tau_e$  für alle Kanten  $e$  enthalten ist.

$$D''_g : \quad \max (D_{i,v})_{i=1,\dots,K,v \in V}^T z - (g_e)_{e \in E}^T \tau \quad (D''.1)$$

$$\text{sodass } I^T z - J^T \tau \leq (\alpha_i l_e(g))_{i=1,\dots,K,e \in E} \quad (D''.2)$$

$$\tau \geq 0 \quad (D''.3)$$

Um die Summenschreibweise aus  $P'_g$  wiederzuerlangen, formulieren wir  $D''_g$  erneut um und erhalten das äquivalente duale Programm  $D'_g$  zu  $P'_g$ , womit wir polynomiell in  $m$  bleiben:

$$D'_g : \quad \max \sum_i d_i (z_i^{s_i} - z_i^{t_i}) - \sum_{e \in E} g_e \tau_e \quad (D'.1)$$

$$\text{sodass } z_i^u - z_i^v - \tau_e \leq \alpha_i l_e(g) \quad \forall i \quad \forall e = (u, v) \in E \quad (D'.2)$$

$$\tau_e \geq 0 \quad \forall e \in E \quad (D'.3)$$

Mit einem LP-Löser können die polynomiellen linearen Programme  $P'_g$  und  $D'_g$  in polynomieller Zeit gelöst werden, womit die optimale Maut und der korrespondierende Nashfluss in polynomieller Zeit berechenbar sind.

Es kann vorkommen, dass es verschiedene Kantenmaturen gibt, mit denen die gleiche Auslastung erzwungen wird. Um aus der Menge dieser Maturen eine für unsere Anwendung beste Maut zu erhalten, formulieren wir das lineare Programm  $D_g$  weiter um: Da der optimale Wert der Zielfunktion nach dem Lösen des linearen Programms mit dem LP-Löser bekannt ist, können wir in  $D_g$  eine Ungleichung hinzufügen, die sicherstellt, dass dieser angenommen wird. Die Zielfunktion ist damit überflüssig und wir erhalten ein Gleichungssystem, das uns eine Charakterisierung der Menge der Maturen gibt, die  $g$  erzwingt. Mit einer neuen Zielfunktion kann nun eine Maut gefunden werden, die  $g$  erzwingt und zusätzlich optimal bezüglich eines anderen Kriteriums ist. Eine Anwendung ist die Minimierung der Summe der Kantenmaturen, um insgesamt möglichst wenig Maut einführen zu müssen. Sinnvoll ist jedoch auch die Minimierung der maximalen Kantenmatur, womit wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

## 4 Schranken an die Mauthöhe

In der Realität ist es nicht möglich, auf Straßen eine beliebig hohe Maut einzuführen. Um die bewiesenen Resultate trotzdem nutzen zu können, betrachten wir nun obere und untere Schranken an die Mauthöhe, um diese einzuzugrenzen.

### 4.1 Exponentielle obere Schranke an die Mauthöhe

Fleischer et al. gelingt in ihrer Arbeit der Beweis einer oberen Schranke an die Mauthöhe, den wir im Folgenden untersuchen wollen. Für ihre Arbeit macht diese obere Schranke den Übergang zum stetigen Modell und den zugehörigen Beweis der Existenz einer optimalen Maut möglich. Für uns bildet sie zusätzlich die Grundlage zu weiteren Untersuchungen an die maximale Mauthöhe.

Im Folgenden sei  $\alpha_{\max} := \max_i \alpha_i$  die maximale Latenzsensitivität und  $l_{\max} := \max_{e \in E} l_e(1)$  die maximale Latenz einer Kante.

**Theorem 4.1** (Fleischer et al. [7]). *Ist  $G$  ein Mehrgüternetzwerk und  $g$  eine erzwingbare Auslastung in  $G$ , dann ist  $g$  erzwingbar mit Maut  $\tau$ , sodass gilt:*

$$\tau_e \leq T \quad \forall e \in E,$$

wobei  $T$  eine Zahl ist, die nur von der maximalen Latenzsensitivität  $\alpha_{\max}$ , der maximalen Latenz einer Kante  $l_{\max}$  und exponentiell von der Anzahl der Kanten abhängt, nicht aber von der Anzahl der Güter.

*Beweis.* Betrachten wir eine zulässige Basislösung  $(\tau, z)$  des dualen Programms  $D_g$ .  $D_g$  hat  $K + m$  Variablen und damit  $K + m$  Ungleichungen, die in  $(\tau, z)$  scharf sind, also  $K + m$  Gleichungen mit eindeutiger Lösung  $(\tau, z)$ . Jedes  $z_i$  muss in mindestens einer dieser Gleichungen vorkommen, da  $(\tau, z)$  sonst keine eindeutige Lösung und damit keine Basislösung wäre. Also kann  $z_i$  zum Beispiel durch ein Einsetzungsverfahren eliminiert werden. Wir erhalten

$$z_i = \alpha_i l_{p'}(g) + \sum_{e \in p'} \tau_e$$

für ein  $p' \in P_i$  für das die Ungleichung scharf ist.

Nach Eliminierung aller  $z_i$  bleiben  $m$  Gleichungen übrig. Diese haben die Form

$$\tau_e = 0 \text{ oder } \sum_{e \in p} \tau_e + \alpha_i l_p(g) = z_i = \alpha_i l_{p'}(g) + \sum_{e \in p'} \tau_e.$$

Schreiben wir diese Gleichungen als Gleichungssystem  $A \tau = b$ , so erhalten wir eine  $(m \times m)$ -Matrix  $A$  mit Einträgen  $\pm 1, 0$  und einen  $m$ -dimensionalen Vektor  $b$  mit Einträgen 0 und

$$\underbrace{\alpha_i}_{\leq \alpha_{\max}} \underbrace{l_p(g)}_{\leq m l_{\max}} - \underbrace{\alpha_i l_{p'}(g)}_{\geq 0} \leq m \alpha_{\max} l_{\max}.$$

Die Menge aller  $(m \times m)$ -Matrizen mit Einträgen  $\pm 1, 0$  ist endlich und damit auch die Menge aller Inversen davon. Somit wird das Maximum über alle möglichen Einträge von diesen inversen Matrizen angenommen. Bezeichnen wir dieses als  $S$ .  $S$  ist endlich und hängt nur von  $m$  und nicht von  $K$  ab. Also gilt

$$\begin{aligned} \tau = A^{-1}b &\Rightarrow \tau_e \leq m S \alpha_{\max} m l_{\max} \\ &= m^2 S \alpha_{\max} l_{\max} =: T \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit dieser Schranke von der Anzahl der Nutzer ist gegeben, weil in Definition 2.1 eines diskreten Mehrgüternetzwerkes o. B. d. A. angenommen wurde, dass sich der Bedarf  $d_i$  aller Nutzer zu eins aufsummiert, das heißt, dass  $\sum_i d_i = 1$  gilt.  $\square$

## 4.2 Untersuchung der oberen Schranke an die Mauthöhe

In der Ausarbeitung von Fleischer et al. wird offen gelassen, ob die bewiesene obere Schranke an die Mauthöhe in Mehrgüternetzwerken scharf ist und dies nur für allgemeine Auslastungsspiele gezeigt (siehe Kapitel 6.2). Dieser Problemstellung wollen wir uns in diesem Abschnitt widmen und Untersuchungen zur oberen Schranke an die Mauthöhe in Mehrgüternetzwerken anstellen.

Zunächst lässt sich feststellen, dass die Abhängigkeit der Schranke von der maximalen Latenz einer Kante  $l_{\max}$  und der maximalen Latenzsensitivität  $\alpha_{\max}$  in jedem Fall nötig ist. Dazu betrachten wir das in Abbildung 6 dargestellte diskrete Mehrgüternetzwerk.

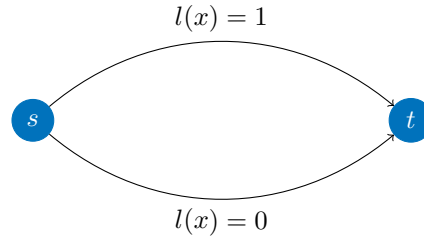


Abbildung 6: Beispiel für ein Mehrgüternetzwerk, in dem zur Erzwingung der gewünschten Auslastung eine Maut  $\tau_e = \alpha_{\max} l_{\max}$  nötig ist

**Beispiel 4.1.** Gegeben sei das abgebildete Mehrgüternetzwerk mit den Knoten  $s$  und  $t$  und zwei parallelen Kanten. Die Latenzfunktion der unteren Kante sei die Nullfunktion  $l(x) = 0$ , die der oberen Kante sei die konstante Latenzfunktion  $l(x) = 1 = l_{\max}$ . Wollen wir in diesem Netzwerk mit infinitesimal kleinen Nutzern mit Gesamtgröße  $d = 1$ , die alle Start  $s$ , Ziel  $t$  und die gleiche Latenzsensitivität  $\alpha_{\max}$  haben, eine Gleichverteilung erzwingen, so ist eine Maut  $\alpha_{\max} l_{\max}$  auf der unteren Kante nötig, um die Attraktivität beider Kanten für alle Nutzer auszugleichen. Da die Kosten einer Kante  $e$  für Nutzer  $i$  definiert sind als  $\alpha_i l_e + \tau_e$ , betragen die Kosten beider Kanten nach Einführung der Maut  $\alpha_{\max} l_{\max}$ , weshalb sich die gewünschte Gleichverteilung ergibt.

Wenn eine der beiden Größen  $l_{\max}$  und  $\alpha_{\max}$  exponentiell in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes ist, lässt sich also nicht vermeiden, dass auch die benötigte Maut exponentiell in der Anzahl der Kanten ist. Um die bewiesene obere Schranke zu verbessern, müssen wir also versuchen, den maximalen Eintrag  $S$  der inversen Matrix von  $A$  im Beweis zu Theorem 4.1 besser abzuschätzen. Dazu untersuchen wir diesen zunächst für den allgemeinen Fall eines Mehrgüternetzwerkes genauer.

**Theorem 4.2.** *Der maximale Eintrag  $S$  der Inversen von  $A$  im Beweis von Theorem 4.1 ist höchstens exponentiell in der Anzahl der Kanten  $m$  des Netzwerkes im Sinne der Fakultät. Es gilt*

$$S \leq (m-1)!.$$

Für die auf einer beliebigen Kante  $e$  nötige Maut gilt damit

$$\tau_e \leq m^2(m-1)! l_{\max} \alpha_{\max}.$$

*Beweis.* Erinnern wir uns an den Beweis von Theorem 4.1, so haben wir dort das Gleichungssystem  $A\tau = b$  betrachtet. Die Matrix  $A$  hat dabei nur Einträge 1, -1 und 0. Außerdem ist  $A$  invertierbar, da  $A\tau = b$  eindeutig lösbar ist. Durch Vertauschen von Zeilen kann für die Determinante von  $A$  erreicht werden, dass  $\det A > 0$  gilt. Also kann  $\det A \geq 1$  erreicht werden. Dabei müssen  $\tau$  und  $b$  im System mitgetauscht werden, um weiterhin das gleiche Netzwerk abzubilden. Des Weiteren gilt nach der Leibnizformel (Bosch [4], S. 141)

$$\det A = \sum_{\pi \in S_m} \underbrace{\text{sgn} \pi}_{\pm 1} \cdot \underbrace{a_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\pi(m),m}}_{\pm 1 \text{ oder } 0} \leq m!,$$

da es  $m!$  viele Permutationen in  $S_m$  gibt, wobei  $S_m$  die symmetrische Gruppe aller Permutationen einer  $m$ -elementigen Menge sei. Mit der Cramerschen Regel (Bosch [4], S. 151ff.) folgt

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(A_{\text{adj}})_{ij}}{\det A} \leq (A_{\text{adj}})_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ji} \leq (m-1)!,$$

wobei  $A_{\text{adj}}$  die adjungierte Matrix von  $A$  (Bosch [4], S. 152) und  $A'_{ji}$  die Matrix  $A$  nach Streichung der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte ist.  $\square$

Die am Ende der Ausarbeitung von Fleischer et al. gegebene untere Schranke an die Mauthöhe in allgemeinen Auslastungsspielen (siehe Kapitel 6.2) zeigt nur die exponentielle Abhängigkeit von  $m$  im Sinne der Zweierpotenz  $2^m$ . Da  $2^m < m!$  für  $m > 3$  besteht eine Lücke zwischen beiden exponentiellen Größen, auf die Fleischer et al. in ihrer Ausarbeitung nicht eingehen. Es ist also möglich, dass es ein Beispiel für allgemeine Auslastungsspiele gibt, in dem die benötigte Maut noch größer ist als in dem von Fleischer et al. gegebenen Beispiel, oder dass man die eben untersuchte obere Schranke an die Mauthöhe besser einschränken kann. Im allgemeinen Fall eines Mehrgüternetzwerkes müssen wir diese Frage hier unbeantwortet lassen. Im Spezialfall eines Mehrgüternetzwerkes, in dem jeder Weg maximal aus  $k$  Kanten besteht, können wir die allgemeine obere Schranke jedoch verbessern, indem wir den maximalen Eintrag  $S$  der Inversen von  $A$  aus dem Beweis von Theorem 4.1 besser abschätzen:

**Theorem 4.3.** *Ist  $G$  ein Netzwerk, in dem jeder Weg aus maximal  $k$  Kanten besteht und  $g$  eine erzwingbare Auslastung in  $G$ , dann ist  $g$  erzwingbar mit Maut  $\tau$ , sodass gilt:*

$$\tau_e \leq mk(2k)^{m-2} \alpha_{\max} l_{\max} =: T_k \quad \forall e \in E.$$

$T_k$  ist damit wie die obere Schranke  $T$  aus Theorem 4.1 eine Zahl, die nur von der maximalen Latenzsensitivität  $\alpha_{\max}$ , der maximalen Latenz einer Kante  $l_{\max}$  und exponentiell von der Anzahl der Kanten abhängt, nicht aber von der Anzahl der Güter.

*Beweis.* Hat jeder Weg maximal  $k$  Kanten, so besitzt die Matrix  $A$  aus dem Gleichungssystem  $A\tau = b$  aus dem Beweis von Theorem 4.1 pro Zeile maximal  $2k$  Nicht-Null-Einträge, da die Zeilen von  $A$  entweder aus einer Gleichung  $\tau_e = 0$  oder aus

$$\sum_{e \in p} \tau_e - \sum_{e \in p'} \tau_e = \alpha_i l_{p'}(g) - \alpha_i l_p(g)$$

entstehen und damit im ersten Fall nur eine Eins für die Kante  $e$  auf der keine Maut nötig ist und sonst Nullen enthalten und im zweiten Fall maximal  $k$ -mal den Wert 1 für die Kanten des Weges  $p$ , maximal  $k$ -mal den Wert -1 für die Kanten des Weges  $p'$  und sonst Nullen enthalten. Somit kann die Determinante von  $A$  mithilfe der Laplaceentwicklung nach einer beliebigen  $i$ -ten Zeile (Bosch [4], S. 153), wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A'_{ij}) \\ &\leq 2k \det(A'_{ij}), \end{aligned}$$

wobei  $A'_{ij}$  wieder die Matrix ist, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte hervorgeht. Diese Abschätzung gilt auch für Matrizen, die aus  $A$  durch Streichung von beliebig vielen Zeilen und Spalten hervorgehen, da diese weiterhin maximal  $2k$  Nicht-Null-Einträge pro Zeile haben. Dabei erhält man bei jedem Schritt eine um eine Dimension kleinere quadratische Untermatrix von  $A$ . Zuletzt gilt für die Unterdeterminante einer  $(1 \times 1)$ -Matrix  $A_1$  die Abschätzung  $\det A_1 \leq 1$ , sodass für die Determinante von  $A$  folgt

$$\det A \leq (2k)^{m-1} \det A_1 \leq (2k)^{m-1}.$$

Da wie im Beweis von Theorem 4.2 durch Vertauschen von Zeilen erreicht werden kann, dass  $\det A \geq 1$ , gilt mit der Cramerschen Regel

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(A_{\text{adj}})_{ij}}{\det A} \leq (A_{\text{adj}})_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ji} \leq (2k)^{m-2}$$

und damit

$$S = \max_{i,j} (A^{-1})_{ij} \leq (2k)^{m-2}.$$

Da jeder Weg aus maximal  $k$  Kanten besteht, gilt außerdem

$$\max_i b_i \leq \underbrace{\alpha_i}_{\leq \alpha_{\max}} \underbrace{l_{p'}(g)}_{\leq k l_{\max}} - \underbrace{\alpha_i l_p(g)}_{\geq 0} \leq k \alpha_{\max} l_{\max}.$$

Somit folgt für die Maut für alle Kanten  $e \in E$

$$\begin{aligned} \tau_e &= (A^{-1}b)_e = \sum_{k=1}^m (A^{-1})_{ek} b_k \leq \sum_{k=1}^m S \max_i b_i \\ &\leq mk(2k)^{m-2} \alpha_{\max} l_{\max} =: T_k, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □



Diese Abschätzung ist für festes  $k$  asymptotisch besser als die Abschätzung aus Theorem 4.2, da für die Fakultät mit der Stirling Formel (Königsberger [9], S. 227f.) für  $m \rightarrow \infty$  gilt

$$(m-1)! \approx \sqrt{2\pi(m-1)} \left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1}.$$

Im Folgenden wollen wir genauer untersuchen, wann  $T_k \leq T$  gilt.

**Beobachtung 4.1.** *Besteht in einem Mehrgüternetzwerke jeder Weg aus maximal  $k \leq \frac{m}{6}$  Kanten, so ist die in Theorem 4.3 gegebene obere Schranke  $T_k$  eine bessere Abschätzung an die Mauthöhe, als die Schranke  $T$  aus Theorem 4.2.*

*Beweis.* Da mit der Stirling Formel insbesondere gilt

$$T = m^2(m-1)! \alpha_{\max} l_{\max} > m^2 \sqrt{2\pi(m-1)} \left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1} \alpha_{\max} l_{\max},$$

untersuchen wir, für welche  $k$

$$\begin{aligned} T_k &\leq m^2 \sqrt{2\pi(m-1)} \left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1} \alpha_{\max} l_{\max} \\ \Leftrightarrow (2k)^{m-2} &\leq \frac{m}{k} \sqrt{2\pi(m-1)} \left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1} \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{m-2}}}_{\geq 1} (2\pi(m-1))^{\frac{1}{2(m-2)}} \underbrace{\left(\frac{m-1}{e}\right)^{\frac{m-1}{m-2}}}_{> \frac{m-1}{e} \text{ für } m > 3} \end{aligned}$$

gilt. Man kann nachprüfen, dass die rechte Seite nach unten abgeschätzt werden kann durch

$$\frac{1}{2} (2\pi(m-1))^{\frac{1}{2(m-2)}} \left(\frac{m-1}{e}\right) \geq \frac{m}{6}.$$

Somit gilt  $T_k \leq T$ , falls jeder Weg im gegebenen Mehrgüternetzwerk maximal  $k \leq \frac{m}{6}$  Kanten hat.  $\square$

Da in jedem Mehrgüternetzwerk die maximale Weglänge durch die Anzahl  $n$  der Knoten beschränkt ist, kann Theorem 4.3 mit  $k = n$  auf jedes Mehrgüternetzwerk angewendet werden. Gilt dabei für das Netzwerk  $n \leq \frac{m}{6}$ , also  $m \geq 6n$ , so ist diese Abschätzung besser als die in Theorem 4.2 gegebene obere Schranke an die Mauthöhe.

Für  $k = 1$ , das heißt Mehrgüternetzwerke, in denen jeder Weg genau aus einer Kante besteht, gilt mit der Abschätzung aus Theorem 4.3 für die optimale Maut  $\tau_e \leq T_k = m2^{m-2} \alpha_{\max} l_{\max} \forall e \in E$ . Für diesen Spezialfall finden wir jedoch noch eine bessere Abschätzung. Um dies zu zeigen, erinnern wir uns zunächst an den Begriff der totalen Unimodularität.

**Definition 4.1** (Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 316). *Eine Matrix  $A$  heißt total unimodular, wenn jede quadratische, invertierbare Teilmatrix von  $A$  unimodular ist, das heißt, wenn jede Unterdeterminante von  $A$  den Wert  $\pm 1$  oder 0 hat.*

Mit dieser Definition lässt sich leicht nachvollziehen, dass für eine total unimodulare Matrix  $A$  auch ihre Transponierte  $A^T$  total unimodular ist. Das nächste Theorem liefert uns ein Kriterium, um die totale Unimodularität einer Matrix nachzuweisen.

**Theorem 4.4** (Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 317). *Eine Matrix  $A$  ist total unimodular, falls eine disjunkte Aufteilung  $I_1, I_2$  der Zeilen von  $A$  existiert, für die folgende vier Bedingungen gelten:*

1. *Jeder Eintrag in  $A$  hat den Wert 0, 1 oder -1.*
2. *Jede Spalte von  $A$  enthält maximal zwei Nicht-Null-Einträge.*
3. *Wenn zwei Nicht-Null-Einträge in einer Spalte von  $A$  das gleiche Vorzeichen haben, so ist die zugehörige Zeile des einen Eintrages in  $I_1$  und die andere in  $I_2$ .*
4. *Wenn zwei Nicht-Null-Einträge in einer Spalte von  $A$  das entgegengesetzte Vorzeichen haben, so sind die zugehörigen Zeilen der Einträge beide in  $I_1$  oder beide in  $I_2$ .*

**Theorem 4.5.** *Sei  $G$  ein Netzwerk, in dem jeder Weg genau aus einer Kante besteht (zum Beispiel ein Netzwerk mit parallelen Kanten) und  $g$  eine erzwingbare Auslastung in  $G$ . Dann ist  $g$  erzwingbar mit Maut  $\tau$ , sodass gilt:*

$$\tau_e \leq m\alpha_{\max}l_{\max} =: T_1 \quad \forall e \in E.$$

$T_1$  ist damit eine Zahl, die nur von der maximalen Latenzsensitivität  $\alpha_{\max}$ , der maximalen Latenz einer Kante  $l_{\max}$  und linear von der Anzahl der Kanten abhängt, nicht aber von der Anzahl der Güter.

*Beweis.* Wir betrachten wieder das Gleichungssystem  $A\tau = b$  aus dem Beweis von Theorem 4.1 und wollen zunächst mithilfe von Theorem 4.4 zeigen, dass  $A^T$  und damit auch  $A$  total unimodular sind, wenn jeder Weg genau aus einer Kante besteht.

Bedingung 1 aus Theorem 4.4 gilt für  $A^T$  auch schon im allgemeinen Fall von Theorem 4.1, da  $A$  nur Einträge  $\pm 1$  und 0 enthält.

Bedingung 2 gilt für  $A^T$ , da jede Zeile von  $A$  maximal zwei Nicht-Null-Einträge enthält. Dies gilt, da jeder Weg im Netzwerk aus einer Kante besteht und damit die Zeilen von  $A$  entweder aus einer Gleichung  $\tau_e = 0$  oder aus

$$\begin{aligned} \sum_{e \in p} \tau_e - \sum_{e \in p'} \tau_e &= \alpha_i l_{p'}(g) - \alpha_i l_p(g) \\ \Leftrightarrow \tau_e - \tau_{e'} &= \alpha_i l_{e'}(g) - \alpha_i l_e(g) \end{aligned}$$

entstehen und damit im ersten Fall nur eine Eins für die Kante  $e$  auf der keine Maut nötig ist und sonst Nullen enthalten und im zweiten Fall genau einmal den Wert 1 für die Kante des Weges  $p$ , einmal den Wert -1 für die Kante des Weges  $p'$  und sonst Nullen enthalten. Jede Spalte von  $A^T$  hat also maximal zwei Nicht-Null-Einträge.

Der Fall von Bedingung 3 tritt nicht ein, da  $A$  pro Zeile maximal eine 1 und eine -1 enthält und somit in  $A^T$  nie zwei Nicht-Null-Einträge in einer Spalte das gleiche Vorzeichen haben. Somit ist Bedingung 3 trivialerweise erfüllt.

Wählt man  $I_2 = \emptyset$ , so ist auch Bedingung 4 erfüllt, da dann  $I_1$  alle Zeilen von  $A^T$  enthält und somit zugehörige Zeilen zu zwei Nicht-Null-Einträgen mit entgegengesetztem Vorzeichen in einer Spalte von  $A^T$  zwingend in der gleichen Menge sind.

Wir haben also gezeigt, dass  $A^T$  total unimodular ist, womit auch  $A$  total unimodular ist. Jede Unterdeterminante von  $A$  hat also den Wert  $\pm 1$  oder  $0$ . Nach der Cramerschen Regel gilt wie im Beweis von Theorem 4.2

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(A_{\text{adj}})_{ij}}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} \det A'_{ji}}{\underbrace{\det A}_{=\pm 1}} = \begin{cases} \pm 1 & \text{wenn } \det A'_{ji} = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei  $A'_{ji}$  die Matrix  $A$  nach Streichung der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte ist. Für den maximalen Eintrag  $S$  der Inversen von  $A$  gilt damit

$$S = \max_{i,j} (A^{-1})_{ij} \leq 1.$$

Da jeder Weg nur aus einer Kante besteht, kann auch der maximale Eintrag in  $b$  besser abgeschätzt werden. Es gilt

$$\max_i b_i \leq \underbrace{\alpha_i}_{\leq \alpha_{\max}} \underbrace{l_{e'}(g)}_{\leq l_{\max}} - \underbrace{\alpha_i l_e(g)}_{\geq 0} \leq \alpha_{\max} l_{\max},$$

womit für die Maut für alle Kanten  $e \in E$  folgt

$$\begin{aligned} \tau_e &= (A^{-1}b)_e = \sum_{k=1}^m (A^{-1})_{ek} b_k \leq \sum_{k=1}^m S \max_i b_i \\ &\leq m \alpha_{\max} l_{\max} =: T_1. \end{aligned}$$

Die benötigte Maut ist damit linear in  $m$  und wie in Theorem 4.1 weiterhin abhängig von  $\alpha_{\max}$  und  $l_{\max}$ .  $\square$

Die soeben bewiesene Schranke gilt für Mehrgüternetzwerke, in denen jeder Weg genau eine Kante besitzt. Betrachtet man als Spezialfall davon Netzwerke mit parallelen Kanten, so gibt es nur einen Quell- und einen Zielknoten, sodass diese Netzwerke spezielle Eingüternetzwerke darstellen. Für Eingüternetzwerke hat Fleischer [6] in einer Ausarbeitung von 2005 eine bessere Abschätzung der Mauthöhe gezeigt. Sie hat bewiesen, dass eine in der maximalen Pfadlatenz  $L := \max_{p \in P} l_p(1)$  und der maximalen Latenzsensitivität  $\alpha_{\max}$  lineare Maut

$$\tau_e \leq 1 + \alpha_{\max} L \leq 1 + n \alpha_{\max} l_{\max} \quad \forall e \in E$$

für heterogene Nutzer hinreichend und notwendig ist, um das Systemoptimum zu erzwingen, wobei  $n$  die Anzahl der Knoten des Netzwerkes ist. Da die maximale Latenz eines Pfades im Fall von Netzwerken mit parallelen Kanten der maximalen Latenz einer Kante entspricht, gilt somit als Abschätzung für die optimale Maut in diesem Spezialfall  $\tau_e \leq 1 + \alpha_{\max} l_{\max}$  für alle Kanten  $e$ , was eine Verbesserung bezüglich unserer Abschätzung bedeutet.

## 5 Das stetige Modell

Im diskreten Modell haben alle Agenten des Typs  $i$  die gleiche Latenzsensitivität  $\alpha_i$ . Um die Realität besser abbilden zu können, wollen wir unterschiedliche Latenzsensitivitäten für Agenten eines Typs zulassen. Dazu definieren wir das stetige Modell eines Mehrgüternetzwerkes wie folgt:

**Definition 5.1.** *Ein Mehrgüternetzwerk im stetigen Modell besteht wie im diskreten Modell aus*

- einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$ ,
- einer nichtfallenden, stetigen Latenzfunktion  $l_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  für alle Kanten  $e \in E$ ,
- $K$  Gütern  $\{(s_i, t_i, d_i)\}_{i=1}^K$ , wobei o. B. d. A.  $\sum_i d_i = 1$  gelte.

Im Unterschied zum diskreten Modell bekommt jeder infinitesimal kleine Agent vom Typ  $i$  eine reelle Zahl  $a \in [0, d_i]$  zugeordnet. O. B. d. A. seien die Agenten dabei aufsteigend nach ihrer Latenzsensitivität geordnet. Wählt man als Sensitivitätsfunktion  $\alpha_i: [0, d_i] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Abbildung, die jedem Agenten bzw. der ihm zugeordneten Zahl  $a$  die zugehörige Latenzsensitivität zuordnet, so erhält man nichtfallende Sensitivitätsfunktionen  $\alpha_i$  für alle Güter  $i$ .

**Definition 5.2.** *Ein Mehrgüterfluss im stetigen Modell bezeichnet eine Menge  $(f^i)_{i=1, \dots, K}$  lebesgue-messbarer Funktionen  $f^i: [0, d_i] \rightarrow P_i$ .*

Bei einem Mehrgüterfluss im stetigen Modell wird also jedem Agent ein Pfad zugeordnet.

Um wie im diskreten Modell zu beschreiben, wie viel Belastung Gut  $i$  auf Pfad  $p$  schickt, definieren wir den Flussanteil  $f_p^i$ , welcher der Größe der Agenten vom Typ  $i$  entspricht, die Pfad  $p$  wählen:

**Definition 5.3.** *Der Flussanteil  $f_p^i$  von Gut  $i$  auf Pfad  $p \in P_i$  ist definiert als die Lebesguegröße der Menge  $\{a \in [0, d_i] : f^i(a) = p\}$ .*

Alle anderen im diskreten Modell eingeführten Definitionen, wie zum Beispiel die von einem Fluss induzierte Auslastung oder die Latenz eines Pfades gelten im stetigen Modell weiterhin. Auch die Kosten eines Pfades  $p \in P_i$  für Agent  $a \in [0, d_i]$  des Typs  $i$  entsprechen im stetigen Modell weiterhin der Summe

$$\alpha_i(a)l_p(f) + \tau_p,$$

wobei hier nur zu beachten ist, dass die Latenzsensitivität im Unterschied zum diskreten Modell keine Konstante mehr ist.

### 5.1 Existenz von optimaler Maut im stetigen Modell

Unser Ziel ist es, die im diskreten Modell bewiesenen Resultate auf das stetige Modell zu übertragen. Um die Existenz von Maut, die eine optimale Auslastung erzwingt, im stetigen Modell mithilfe von Korollar 2.1 zu beweisen, wollen wir die Sensitivitätsfunktionen  $\alpha_i$  durch Treppenfunktionen approximieren, die in einzelne Güter aufgeteilt werden können, sodass wir das stetige Modell in ein diskretes Modell überführen. Zunächst benötigen wir jedoch folgende zwei Hilfslemmata.

**Lemma 5.1** (Fleischer et al. [7]). *Für alle  $i$  seien  $\alpha_i$  Treppenfunktionen mit einer beschränkten Stufenanzahl. Dann existiert Maut, die eine optimale Auslastung erzwingt.*

*Beweis.* Sei  $r_i$  die Anzahl der Stufen in der Funktion  $\alpha_i$ . Wir ersetzen jedes Gut  $i$  durch  $r_i$  Güter, jedes zugehörig zu einem Schritt in  $\alpha_i$ . Dann hat jedes dieser neuen Güter konstante Latenzsensitivität, die dem Wert der Funktion  $\alpha_i$  im entsprechenden Intervall bzw. Schritt entspricht. Die Nachfrage bzw. Größe jedes Gutes entspricht der Länge des zugehörigen Intervalls.

Das entstandene Netzwerk ist äquivalent zum Ausgangsnetzwerk in dem Sinne, dass ein Nashfluss im Ausgangsnetzwerk einem Nashfluss im entstandenen Netzwerk entspricht. Zusätzlich entspricht das entstandene Netzwerk einem Netzwerk im diskreten Modell, weshalb Korollar 2.1 anwendbar ist und somit Maut in diesem Netzwerk (und damit auch im Ausgangsnetzwerk) existiert, die eine optimale Auslastung erzwingt.  $\square$

**Lemma 5.2** (Fleischer et al. [7]). *Für jedes Mehrgüternetzwerk im stetigen Modell und jede zulässige Maut gibt es einen Nashfluss  $f$ , sodass die Menge  $\{a \in [0, d_i] : f^i(a) = p\}$  und damit die Menge aller Agenten des Typs  $i$ , die Pfad  $p$  wählen, für alle  $i$  und  $p \in P_i$  zusammenhängend ist.*

*Beweis.* Sei  $f$  Nashfluss im stetigen Modell. Es kann gezeigt werden, dass für zwei beliebige Agenten  $a, b \in [0, d_i]$  gilt:

$$a < b \Rightarrow l_{f^i(a)}(f) \geq l_{f^i(b)}(f),$$

das heißt, wenn  $a$  eine niedrigere Latenzsensitivität hat als  $b$ , ist die Pfadlatenz seines Pfades höher als die von  $b$ .

Sei dazu  $a < b$ . Dann gilt  $\alpha_a \leq \alpha_b$ , weil die Agenten aufsteigend nach ihrer Latenzsensitivität sortiert sind. Da  $f$  ein Nashfluss ist, können sich Agent  $a$  und  $b$  durch Routenwechsel nicht verbessern, das heißt es gilt

$$\alpha_a l_{f^i(a)} + \tau_{f^i(a)} \leq \alpha_a l_{f^i(b)} + \tau_{f^i(b)}$$

und

$$\alpha_b l_{f^i(b)} + \tau_{f^i(b)} \leq \alpha_b l_{f^i(a)} + \tau_{f^i(a)}.$$

Daraus folgt

$$\alpha_a (l_{f^i(a)} - l_{f^i(b)}) + \tau_{f^i(a)} - \tau_{f^i(b)} \leq 0$$

und

$$\alpha_b (l_{f^i(b)} - l_{f^i(a)}) + \tau_{f^i(b)} - \tau_{f^i(a)} \leq 0.$$

Addiert man beide Ungleichungen, erhält man

$$l_{f^i(a)}(\alpha_a - \alpha_b) - l_{f^i(b)}(\alpha_a - \alpha_b) \leq 0 \Leftrightarrow (l_{f^i(a)} - l_{f^i(b)})(\alpha_a - \alpha_b) \leq 0.$$

Da  $\alpha_a \leq \alpha_b$  gilt, folgt

$$l_{f^i(a)} - l_{f^i(b)} \geq 0 \Leftrightarrow l_{f^i(a)} \geq l_{f^i(b)},$$

womit die Teilaussage bewiesen ist.

Dieses Resultat und die Lebesgue-Messbarkeit von  $f^i$  kann genutzt werden, um  $f^i$  so zu verändern, dass  $f$  immer noch Nashfluss ist, aber die Bedingungen des Lemmas erfüllt. Wir vertauschen dazu nur noch die Pfade der Agenten des gleichen Typs, die gleich lange Wege wählen, sodass alle Agenten des Typs  $i$ , die den gleichen Pfad wählen, in  $[0, d_i]$  nebeneinander liegen.  $\square$

Mit Lemma 5.2 wissen wir, dass alle Agenten des Typs  $i$ , die den gleichen Pfad nehmen, im Intervall  $[0, d_i]$  nebeneinander liegen und die gleiche Latenzsensitivität  $\alpha_i$  haben, da die Kosten jedes Agenten im Nashfluss gleich sind. Also können die Agenten immer in Stufen aufgeteilt werden, deren Anzahl durch die Gesamtanzahl an möglichen Pfaden im Netzwerk beschränkt ist. Zusammen mit Lemma 5.1, welches den Übergang vom diskreten zum stetigen Modell möglich macht, wenn eine Treppenfunktion als Sensitivitätsfunktion vorhanden ist, können wir nun die Existenz von optimaler Maut im stetigen Modell und damit das Gegenstück zu Korollar 2.1 beweisen.

**Theorem 5.1** (Fleischer et al. [7]). *Für jedes Mehrgüternetzwerk im stetigen Modell existiert Maut, die eine optimale Auslastung erzwingt.*

*Beweis.* Wir schätzen für jedes Gut  $i$  die Funktion  $\alpha_i$  durch eine Folge  $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots$  von Treppenfunktionen mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^k = \alpha_i$  ab. Sei  $G^k$  das Netzwerk, in dem  $\alpha_i$  für alle  $i$  durch  $\alpha_i^k$  ersetzt wurde. Mit Lemma 5.1 gilt für alle  $k$ , dass eine Maut  $\tau^k$  existiert, die eine optimale Auslastung in  $G^k$  erzwingt. Sei  $f^{(k)}$  der Nashfluss in  $G^k$  bezüglich der Maut  $\tau^k$ , der die Bedingung aus Lemma 5.2 erfüllt. Dann kann die Funktion  $f^{(k)i}$ , die den Fluss von Gut  $i$  als Teil des Gesamtflusses  $f^{(k)}$  darstellt, für alle  $i$  repräsentiert werden durch die Endpunkte der Intervalle  $A_p^i := \{a \in [0, d_i] : f^{(k)i}(a) = p\}$ , auf denen sie konstant ist:

$$f^{(k)i}_p = \text{Lebesguegröße der Menge } A_p^i = \max A_p^i - \min A_p^i.$$

Also kann der Nashfluss  $f^{(k)}$  wie ein diskreter Mehrgüterfluss durch eine Folge von höchstens  $|P| = |\bigcup_i P_i|$  Zahlen in  $[0, 1]$  repräsentiert werden, was der Anzahl der Pfade im Netzwerk entspricht, wobei  $d_i \leq 1$ , da  $\sum_i d_i = 1$ .

Da  $G^k$  diskret ist, gilt mit Theorem 4.1 unabhängig von  $k$ :

$$\tau_e^k \leq T \quad \forall e \in E.$$

Zusammen gilt somit

$$(\tau^k, f^{(k)}) \in [0, T] \times [0, 1]^{|P|}.$$

Das Tupel  $(\tau^k, f^{(k)})$  ist also Element einer kompakten, da abgeschlossenen, beschränkten und endlich dimensional Menge. Somit existiert nach Bolzano-Weierstraß (Königsberger [9], S. 89) eine konvergente Teilfolge  $k_1, k_2, \dots$ , sodass für diese Teilfolge gilt

$$(\tau^k, f^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\tau, f) \in [0, T] \times [0, 1]^{|P|}.$$

Der resultierende Nashfluss  $f$  ist damit als diskreter Mehrgüterfluss darstellbar und die resultierende Maut  $\tau$  ist weiterhin beschränkt durch  $T$ . Da Maut  $\tau^k$  Fluss  $f^{(k)}$  in  $G^k$  erzwingt, erzwingt Maut  $\tau$  Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $G$  mit originalen Latenzsensitivitätsfunktionen  $\alpha_i$ , was dem originalen Netzwerk entspricht, da außer diesen nichts verändert wurde. Da  $f^{(k)}$  eine optimale Auslastung in  $G^k$  induziert, induziert  $f$  eine optimale Auslastung in  $G$ . Maut  $\tau$  erzwingt also eine optimale Auslastung in  $G$ .  $\square$

Wie wir in diesem Beweis gesehen haben, kann die optimale Maut und der zugehörige Nashfluss im stetigen Modell als Grenzwert von optimalen Mauten

und zugehörigen Nashflüssen im diskreten Modell dargestellt werden. Damit gilt die obere Schranke an die Mauthöhe aus Theorem 4.1 auch im stetigen Modell. Aber auch die anderen Resultate aus dem diskreten Modell, wie die polynomielle Berechnung der Maut, können auf das stetige Modell übertragen werden, weil der Nashfluss und die Latenzsensitivitäten wie im diskreten Modell darstellbar und damit die linearen Programme  $P_g$  und  $D_g$  benutzbar sind. Somit sind auch die Korollare 2.2 bis 2.4 auf das stetige Modell übertragbar.

## 6 Allgemeine Auslastungsspiele

Bevor wir die für Mehrgüternetzwerke bewiesenen Resultate auf allgemeine Auslastungsspiele übertragen, führen wir zunächst die von Fleischer et al. benutzte Notation für allgemeine Auslastungsspiele ein:

**Definition 6.1.** Ein allgemeines Auslastungsspiel besteht aus  $N$  Nutzertypen und  $M$  Ressourcen. Jeder Nutzertyp  $i$  wird beschrieben durch

- eine Gesamtgröße  $d_i$  von infinitesimal kleinen Nutzern,
- eine konstante Latenzsensitivität  $\alpha_i \geq 0$ ,
- eine Strategiemenge  $S_i$ .

Wie in Mehrgüternetzwerken gelte o. B. d. A.  $\sum_i d_i = 1$ . Jede Ressource  $j$  wird beschrieben durch

- eine Anzahl der Nutzer, die diese benutzen,
- eine nichtfallende Latenzfunktion  $l_j: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , die für eine Auslastung der Ressource die zugehörige Latenz angibt, die die Nutzer aufbringen müssen, um die Ressource zu nutzen.

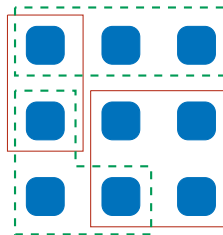


Abbildung 7: Beispiel eines Auslastungsspiels mit neun Ressourcen und zwei Nutzertypen mit den Strategiemengen  $S_1$  und  $S_2$

Der Unterschied zu Mehrgüternetzwerken ist, dass in allgemeinen Auslastungsspielen die Netzwerkstruktur nicht mehr vorhanden ist. Die Latenzsensitivitäten  $\alpha_i$  sind jedoch pro Nutzertyp  $i$  wie im diskreten Modell eines Mehrgüternetzwerkes konstant. Möchte man ein Mehrgüternetzwerk als Auslastungsspiel beschreiben, so entspricht die Menge der Ressourcen im Auslastungsspiel der Menge an Kanten im Mehrgüternetzwerk. Statt der Menge der Pfade  $P_i$  betrachtet man in allgemeinen Auslastungsspielen die Menge der Strategien  $S_i$ ,

die Nutzertyp  $i$  wählen kann. Eine Strategie ist dabei eine Kombination von Ressourcen. Mit allgemeinen Auslastungsspielen können also allgemeinere Situationen, denen kein Netzwerk zugrunde liegt, modelliert werden. Im Folgenden werden wir sehen, dass die bewiesenen Resultate auf allgemeine Auslastungsspiele übertragbar sind.

**Definition 6.2.** *Als eine Auslastung in allgemeinen Auslastungsspielen bezeichnen wir einen Vektor in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^M$ , der die Benutzung jeder Ressource beschreibt.*

Ein Auslastung gibt wie in Mehrgüternetzwerken an, wieviele infinitesimal kleine Nutzer die einzelnen Ressourcen gewählt haben. Aus ihr ist damit nicht das Verhalten der einzelnen Nutzertypen rekonstruierbar.

**Definition 6.3.** *Eine Auslastung  $v$  heißt zulässig, wenn es eine Möglichkeit gibt, jeden Nutzer zufriedenzustellen, ohne eine Ressource  $j$  mehr zu benutzen als  $v_j$  angibt. Eine Auslastung  $v$  heißt minimal zulässig, wenn sie auf keiner Ressource reduziert werden kann, ohne dass die Zulässigkeit verloren geht.*

## 6.1 Existenz von optimaler Maut in allgemeinen Auslastungsspielen

Um eine bestimmte Benutzung der Ressourcen zu erzwingen, wollen wir diese bemaufen. Sei  $\tau_j$  die Maut auf Ressource  $j$ . Wir gehen weiterhin davon aus, dass die Kosten bei Benutzung einer Strategie der Summe der Ressourcenkosten entsprechen, die diese Strategie enthält. Nutzer vom Typ  $i$  wählen also eine Strategie  $S \in S_i$ , die

$$\alpha_i \sum_{j \in S} l_j(v_j) + \sum_{j \in S} \tau_j := \alpha_i l_S(v) + \tau_S$$

minimiert, wobei  $v$  die aktuelle Auslastung sei. Das Nash-Gleichgewicht in allgemeinen Auslastungsspielen ist wie in Definition 2.7 definiert als die Auslastung, bei der sich kein Nutzer durch alleinigen Strategienwechsel verbessern kann, was formal der Auslastung  $v_{\text{Nash}}$  entspricht, für die für alle  $i$  und alle Strategien  $S \in S_i$ , die von mindestens einem Nutzer benutzt werden, gilt

$$\alpha_i l_S(v_{\text{Nash}}) + \tau_S \leq \alpha_i l_{S'}(v_{\text{Nash}}) + \tau_{S'} \quad \forall S' \in S_i.$$

Damit können wir Erzwingbarkeit einer Auslastung wie in Mehrgüternetzwerken definieren:

**Definition 6.4.** *Eine Auslastung  $v$  ist erzwingbar, wenn eine Maut  $\tau$  existiert, sodass  $v$  als Nash-Gleichgewicht im mit Maut  $\tau$  ausgestatteten Auslastungsspiel entsteht.*

Auch in allgemeinen Auslastungsspielen können wir bestimmte Auslastungen erzwingen:

**Theorem 6.1** (Fleischer et al. [7]). *Sei  $v$  eine minimal zulässige Auslastung. Dann existiert nichtnegative Maut, die  $v$  erzwingt.*



*Beweis.* Sei  $x_{iS}$  die Größe bzw. Anzahl der Nutzer des  $i$ -ten Typs, die Strategie  $S$  gewählt haben. Sei weiter

$$l_{iS} := \alpha_i \sum_{j \in S} l_j(v_j) = \alpha_i l_S(v)$$

die Latenz der Strategie  $S$  für Nutzertyp  $i$  in Geldeinheiten ausgedrückt. Wir beweisen das Theorem wie für Mehrgüternetzwerke mithilfe linearer Programme. Betrachten wir dazu zunächst das folgende lineare Programm:

$$P_v : \quad \min \sum_i \sum_{S \in S_i} l_{iS} x_{iS} \quad (P_v.1)$$

$$\text{sodass } \sum_i \sum_{S \in S_i; j \in S} x_{iS} \leq v_j \quad \forall j \quad (P_v.2)$$

$$\sum_{S \in S_i} x_{iS} \geq d_i \quad \forall i \quad (P_v.3)$$

$$x_{iS} \geq 0 \quad \forall i \quad \forall S \in S_i \quad (P_v.4)$$

Dieses lineare Programm minimiert für die aus  $x_{iS}$  entstehende Auslastung die Gesamtkosten in Geldeinheiten ausgedrückt. Dabei gilt die Nebenbedingung (P<sub>v</sub>.2), dass die Auslastung  $v$  nicht überschritten wird, was erfüllt werden kann, sobald  $v$  zulässig ist. Außerdem soll für jeden Nutzertyp  $i$  mit Bedingung (P<sub>v</sub>.3) mindestens der geforderte Bedarf  $d_i$  verschickt werden und  $x_{iS}$  mit Bedingung (P<sub>v</sub>.4) als Auslastung zulässig sein. Da  $v$  in unserem Fall zulässig ist, existiert somit nach Definition immer eine zulässige Lösung für  $P_v$ . Um die Maut zu erhalten, die  $v$  erzwingt, wollen wir  $P_v$  dualisieren. Dazu formulieren wir das lineare Programm zunächst um und erhalten

$$P'_v : \quad \min (l_{iS})_{i=1, \dots, N, S \in S_i}^T x \quad (P'_v.1)$$

$$\text{sodass } Vx \leq (v_j)_{j=1, \dots, M} \quad (P'_v.2)$$

$$-Dx \leq -(d_i)_{i=1, \dots, N} \quad (P'_v.3)$$

$$x \geq 0 \quad (P'_v.4)$$

Dabei sei  $x$  der  $s$ -dimensionale Spaltenvektoren mit den Einträgen  $x_{iS}$ , wobei  $s := |\bigcup_i S_i|$  die Anzahl aller möglichen Strategien sei. (In Mehrgüternetzwerken entspricht  $x$  dem Fluss aus Definition 2.2, aus dem man im Gegensatz zur Auslastung das Verhalten der einzelnen Nutzertypen rekonstruieren kann.) Des Weiteren sei  $V$  eine  $(M \times s)$ -Matrix mit Einträgen

$$V_{j,S} = \begin{cases} 1 & j \in S \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und  $D$  eine  $(N \times s)$ -Matrix mit Einträgen

$$D_{i,S} = \begin{cases} 1 & S \in S_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das duale Programm von  $P'_v$  entspricht dann

$$D'_v : \max (d_i)_{i=1,\dots,N}^T z - (v_j)_{j=1,\dots,M}^T \tau \quad (D'_v.1)$$

$$\text{sodass } D^T z - V^T \tau \leq (l_{iS})_{i=1,\dots,N,S \in S_i} \quad (D'_v.2)$$

$$z \geq 0 \quad (D'_v.3)$$

$$\tau \geq 0 \quad (D'_v.4)$$

mit  $z = (z_i)_{i=1,\dots,N}$  und  $\tau = (\tau_j)_{j=1,\dots,M}$ , was ausformuliert dem folgenden dualen Programm entspricht:

$$D_v : \max \sum_i d_i z_i - \sum_j v_j \tau_j \quad (D_v.1)$$

$$\text{sodass } z_i \leq l_{iS} + \sum_{j \in S} \tau_j \quad \forall i \quad \forall S \in S_i \quad (D_v.2)$$

$$z_i \geq 0 \quad \forall i \quad (D_v.3)$$

$$\tau_j \geq 0 \quad \forall j \quad (D_v.4)$$

Wir wollen  $\tau_j$  als die Maut der Ressource  $j$  interpretieren, weshalb Bedingung  $(D_v.2)$  aussagt, dass  $z_i$  nicht größer als die Kosten von Strategie  $S$  für Nutzer des Typs  $i$  werden darf. Da  $z_i$  mit positivem Koeffizienten in der Kostenfunktion vorkommt, soll es maximiert werden und entspricht damit im Optimum den geringsten Kosten, die ein Nutzer vom Typ  $i$  haben kann, um seinen Bedarf abzudecken.

Da  $l_{iS}$  positiv ist, hat  $D_v$  mit  $z_i = 0 \quad \forall i$  und  $\tau_j = 0 \quad \forall j$  eine zulässige Lösung.  $P_v$  und  $D_v$  haben nach dem Satz über primal-duale Paare also beide optimale Lösungen (Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 70). Nach dem Satz vom komplementären Schlupf (Papadimitriou und Steiglitz [11], S. 72) gilt für eine primale optimale Lösung  $x$  und eine dual optimale Lösung  $(\tau, z)$ :

$$x_{iS} > 0 \Rightarrow z_i = l_{iS} + \sum_{j \in S} \tau_j.$$

Das heißt, wird Strategie  $S$  von Nutzern des Typs  $i$  genutzt, so entsprechen die Kosten für die Nutzung der Ressource  $S$  von Nutzern des Typs  $i$  den kleinstmöglichen Kosten. Jeder Nutzer wählt damit die günstigste Strategie für sich.  $x$  entspricht also dem Nash-Gleichgewicht im Auslastungsspiel mit Maut  $\tau$  und ergibt die Auslastung  $v$ , wenn diese minimal zulässig ist, da dann die Nebenbedingungen  $(P_v.2)$  und  $(P_v.3)$  für alle zulässigen Lösungen  $x_{iS}$  von  $P_v$  nach Definition scharf sind. Die minimal zulässige Auslastung  $v$  ist damit mit nicht-negativer Maut erzwingbar. Das Finden der entsprechenden Maut  $\tau$  läuft wie bei Mehrgüternetzwerken auf das Lösen der linearen Programme hinaus.  $\square$

Dieses Theorem liefert uns das gleiche Resultat wie Korollar 2.1 im diskreten Modell eines Mehrgüternetzwerkes, nämlich die Existenz von Maut, die eine (system-)optimale Auslastung  $v$  erzwingt.

**Korollar 6.1** (Fleischer et al. [7]). *Sei  $v$  eine optimale Auslastung, das heißt es gelte*

$$\sum_i \sum_{S \in S_i} l_{iS}(v) v_{iS} \leq \sum_i \sum_{S \in S_i} l_{iS}(v') v'_{iS}$$

*für alle zulässigen Auslastungen  $v'$ , dann ist  $v$  mit Maut erzwingbar.*

*Beweis.* Wie im Beweis von Korollar 2.1 konstruieren wir aus  $v$  eine minimal zulässige Auslastung  $v^* \leq v$ . Dann ist  $v^*$  erzwingbar mit Theorem 6.1. Da Latenzfunktionen nichtfallend sind und  $v_{iS}^* \leq v_{iS} \forall i \forall S \in S_i$  gilt, folgt

$$\sum_i \sum_{S \in S_i} l_{iS}(v^*) v_{iS}^* \leq \sum_i \sum_{S \in S_i} l_{iS}(v) v_{iS}.$$

Weil  $v$  optimal ist, haben wir mit  $v^*$  eine optimale Auslastung erzwungen.  $\square$

Analog zu Mehrgüternetzwerken können wir in allgemeinen Auslastungsspielen den Begriff der schwachen Erzwingbarkeit definieren und das zugehörige Resultat von den Mehrgüternetzwerken übernehmen.

**Definition 6.5.** *Maut  $\tau$  erzwingt die Auslastung  $v$  schwach, wenn eine Auslastung  $v' \leq v$  existiert, die von  $\tau$  erzwungen wird.*

**Korollar 6.2** (Fleischer et al. [7]). *Sei  $v$  eine zulässige Auslastung. Dann ist  $v$  mit Maut schwach erzwingbar.*

*Beweis.* Der Beweis funktioniert analog zu dem Beweis von Korollar 2.4: Wir konstruieren aus  $v$  eine minimal zulässige Auslastung  $v^* \leq v$ . Diese ist erzwingbar mit Theorem 6.1. Die Auslastung  $v$  ist damit schwach erzwingbar.  $\square$

## 6.2 Schranken an die Mauthöhe in allgemeinen Auslastungsspielen

Da die Struktur der linearen Programme  $P_v$  und  $D_v$ , welche die optimale Maut in allgemeinen Auslastungsspielen beschreiben, die gleiche ist wie die der linearen Programme  $P_g$  und  $D_g$  der Mehrgüternetzwerke, ist die exponentielle obere Schranke an die Mauthöhe aus Theorem 4.1 auf allgemeine Auslastungsspiele übertragbar. Für allgemeine Auslastungsspiele haben Fleischer et al. zusätzlich ein Beispiel gefunden, in dem eine exponentielle Maut in der Anzahl der Ressourcen nötig ist, um die gewünschte Auslastung zu erzwingen. Dieses Beispiel, welches in Abbildung 8 dargestellt ist, zeigt damit, dass die gegebene exponentielle Schranke an die Mauthöhe scharf ist.

**Beispiel 6.1** (Fleischer et al. [7]). *Betrachten wir das Auslastungsspiel mit*

- $k$  Nutzertypen,
- $2(k+1)$  Ressourcen  $a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k$ ,
- gleicher Latenzsensitivität für alle Nutzer,
- Strategiemengen  $S_i = \{\{a_{i-1}, b_{i-1}\}, \{a_i\}, \{b_i\}\}$  für alle Nutzertypen  $i$ ,
- Latenz eins bei Benutzung von  $a_0$  und  $b_0$ ,
- Latenz null bei Benutzung aller anderen Ressourcen.

*Die Auslastung, die erzwungen werden soll, habe*

- auf  $a_0, b_0, a_k$  und  $b_k$  eine Belastung von  $\frac{1}{3}$ ,
- auf allen anderen Ressourcen eine Belastung von  $\frac{2}{3}$ .

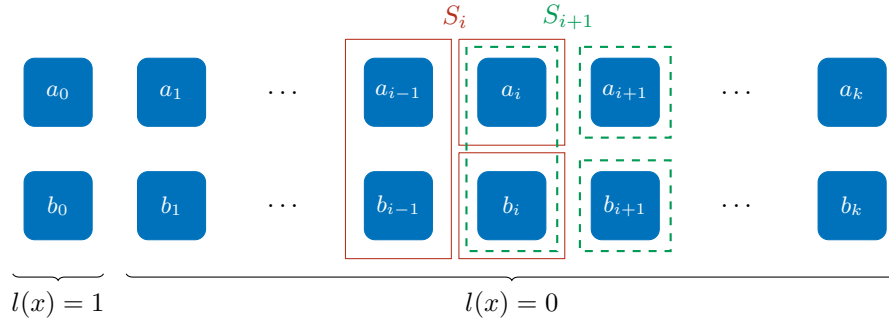


Abbildung 8: Beispiel eines Auslastungsspielles, bei dem eine exponentiell hohe Maut nötig ist, um die gewünschte Auslastung zu erzwingen

Wie sieht die Maut aus, die diese Auslastung erzwingt? Betrachten wir Nutzertyp 1 mit der Strategiemenge  $S_1 = \{\{a_0, b_0\}, \{a_1\}, \{b_1\}\}$ . Da kein anderer Nutzertyp die Ressourcen  $a_0$  und  $b_0$  zur Verfügung hat, muss bei Nutzertyp 1 für die gewünschte Belastung von  $\frac{1}{3}$  auf dieser Resource gesorgt werden. Betrachtet man die Strategiemenge  $S_2$ , so stellt man außerdem fest, dass Nutzertyp 2 die Ressourcen  $a_1$  und  $b_1$  nur mit gleicher Auslastung belasten kann. Um auf ihnen die gewünschte Belastung von  $\frac{2}{3}$  zu erhalten, muss also auch Nutzertyp 1 beide Strategien  $\{a_1\}$  und  $\{b_1\}$  ausgewogen belasten, also jeweils mit  $\frac{1}{3}$ . Führt man nach diesem Prinzip fort, stellt man fest, dass, um die gewünschte Auslastung zu erzwingen, für alle Nutzertypen eine Gleichverteilung auf die drei möglichen Strategien erzwungen werden muss. Die Maut müssen wir also so einführen, dass die Kosten aller Strategien für jeden Nutzertypen gleich hoch sind und sich damit die gewünschte Gleichverteilung ergibt. Im Folgenden bezeichne  $c(s)$  für eine Strategie  $s \in S_i$  die Kosten der Strategie für Nutzertyp  $i$ . Für Nutzertyp 1 gilt ohne Maut  $c(a_0, b_0) = 2$ ,  $c(a_1) = c(b_1) = 0$ . Damit alle drei Strategien gleiche Kosten haben, führen wir für die Ressourcen  $a_1$  und  $b_1$  eine Maut von 2 Einheiten ein. Damit erhalten wir die Strategiekosten  $c(a_0, b_0) = c(a_1) = c(b_1) = 2$ . Für Nutzertyp 2 gilt damit  $c(a_1, b_1) = 4$ ,  $c(a_2) = c(b_2) = 0$ , weshalb wir zusätzlich für die Ressourcen  $a_2$  und  $b_2$  eine Maut von 4 Einheiten einführen müssen. Man sieht schnell, dass insgesamt folgende Maut nötig ist:

$$\tau_{a_i} = \tau_{b_i} = \tau_{a_{i-1}} + \tau_{b_{i-1}} \quad \forall i > 1$$

$$\tau_{a_1} = \tau_{b_1} = 2.$$

Die Maut ist also exponentiell in der Anzahl der Nutzertypen  $k$  und damit in der Anzahl der Ressourcen. Hier ist die Unabhängigkeit der Mauthöhe von der Anzahl der Nutzertypen nicht möglich, da diese von der Anzahl der Ressourcen abhängt.

Da dieses Beispiel nicht auf Mehrgüternetzwerke übertragbar ist, lässt die Ausarbeitung von Fleischer et al. offen, ob die bewiesene exponentielle Schranke auch in Mehrgüternetzwerken scharf ist.

### 6.3 Verallgemeinerungen

Betrachten wir noch einmal die Herleitung des linearen Programms im Beweis von Satz 6.1, so können wir feststellen, dass wir Veränderungen an der Variable  $l_{iS} = \alpha_i \sum_{j \in S} l_j(v_j)$  vornehmen können, ohne dass sich die Struktur des linearen Programms oder die Beweise der Resultate verändern. Genauer gelten die bewiesenen Resultate aus Kapitel 6.1 weiterhin für folgende aufeinander aufbauende Verallgemeinerungen:

- Die Latenz einer Ressource kann vom Nutzertyp  $i$  abhängen. Dies ist beispielsweise bei Straßen mit Busspuren der Fall, die Busse und Taxen bei Stau schneller passieren können als PKW. Die Latenzfunktion lässt sich in diesem Fall umformulieren als nichtfallende Funktion  $l_{ji}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^N$ , welche für eine gegebene Auslastung der Ressource  $j$  angibt, welche Latenz von Nutzertyp  $i$  bei Benutzung dieser Ressource aufgebracht werden muss. Dabei kann die Latenzsensitivität  $\alpha_i$  schon in die Latenzfunktion  $l_{ji}$  aufgenommen werden, sodass diese die Latenz in Geldeinheiten angibt. Es würde also gelten  $l_{iS} = \sum_{j \in S} l_{ji}(v_j)$ .
- Die Latenz einer Ressource kann von der Gesamtauslastung aller Ressourcen abhängen, statt nur von der Ressource selbst. Mit dieser Verallgemeinerung sind zum Beispiel Abhängigkeiten zwischen den Ressourcen abbildbar. Die Latenzfunktion ergibt sich dabei als  $l_{ji}: \mathbb{R}_{\geq 0}^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^N$  und gibt für eine gegebene Auslastung aller Ressourcen an, welche Latenz in Geldeinheiten Nutzer des Typs  $i$  aufbringen müssen, um die Ressource  $j$  zu nutzen. Es folgt  $l_{iS} = \sum_{j \in S} l_{ji}(v)$ .
- Die Latenz eines Weges kann eine beliebige Funktion abhängig von seinen Kantenlatenzen darstellen und muss nicht mehr zwingend die Summe der Kantenlatenzen sein. Somit könnte man beispielsweise Schwachstellen im Netz über die maximale Kantenlatenz untersuchen. Die Latenzfunktion lässt sich dann endgültig schreiben als  $l_{iS}: S_i \times \mathbb{R}_{\geq 0}^M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Sie gibt für eine gegebene Gesamtauslastung aller Ressourcen und eine Strategie  $S \in S_i$  an, wie viel Latenz in Geldeinheiten Nutzer des Typs  $i$  für die Benutzung der Strategie  $S$  aufbringen müssen.

## 7 Fazit

Fleischer, Jain und Mahdian haben nicht nur gezeigt, dass das Resultat von Beckman von 1956 vollständig auf heterogene Nutzer erweiterbar ist, sondern sich auch weiterführende Fragen zum Realitätsbezug gestellt und beantwortet. Besonders hervorzuheben ist, dass ihnen ein konstruktiver Beweis der Existenz der optimalen Maut gelungen ist, sodass nicht nur deren Existenz, sondern auch deren Berechnung mithilfe der linearen Programme möglich ist.

Mithilfe der Resultate der Arbeit von Fleischer et al. lässt sich also für ein beliebiges Mehrgüternetzwerk mit heterogenen Nutzern die optimale Maut finden, welche das Systemoptimum erzwingt. Obwohl sich diese optimale Maut in der Realität nicht ohne Weiteres durch eine separate Bemautung aller Kanten des Netzwerkes umsetzen lässt, kann man die gewonnenen Informationen nutzen, um den Preis der Anarchie durch eine vereinfachte Maut zu reduzieren.

Eine Möglichkeit der Vereinfachung wäre beispielsweise die konstante Bema-  
 tung eines begrenzten Gebietes, wie es in London durchgeführt wird, womit  
 sich die Datenerfassung zur Abrechnung der Maut, sowie die Information der  
 Nutzer über die Tarifstruktur im Vergleich zur separaten Kantenmaut enorm  
 vereinfacht. Aber auch kompliziertere Abrechnungssysteme werden umgesetzt.  
 Der deutschen LKW-Maut liegt beispielsweise ein System zugrunde, welches eine  
 sehr differenzierte Abrechnung der Maut erlaubt. Bei diesem, von der Firma Toll  
 Collect entwickelten System, können die Nutzer zwischen einer satellitengesteu-  
 erten und automatischen Buchungsvariante per Fahrzeuggerät und einer ma-  
 nuellen Buchungsvariante per Mautstellen-Terminal oder Internet wählen (Toll  
 Collect GmbH [14]). Dabei wird die Maut nach der gefahrenen Strecke und  
 der Art des Fahrzeuges berechnet. Bemautes werden momentan Autobahnen  
 und ausgewählte Abschnitte einzelner Bundesstraßen. Da im bemautesen Stre-  
 ckenetz jedoch nur vereinzelt Kontrollpunkte nötig sind, um Fahrzeuge ohne  
 Fahrzeuggerät zu erfassen, die keine Maut gezahlt haben, ist eine Ausweitung  
 des bemautesen Streckennetzes mit geringem Aufwand möglich. Mautpflichtig  
 sind LKW ab 12 Tonnen. Das System könnte man aber auch auf andere Ver-  
 kehrsmittel ausweiten und so eine kantenbasierte Maut, wie wir sie in dieser  
 Arbeit modellierten, in die Realität umsetzen.

Eine Vereinfachung der Maut, zum Beispiel durch eine Einschränkung der  
 Anzahl bemauteser Kanten, bleibt jedoch trotzdem attraktiv. Aus diesem  
 Grund haben sich andere Ausarbeitungen weitergehend mit dem Thema ausein-  
 ander gesetzt. Hoefler et al. [8] befassen sich beispielsweise mit der Frage, ob die  
 Erzwingung des Systemoptimums möglich ist, wenn die Menge der bemautesen  
 Straßen des Netzwerkes beliebig eingegrenzt wird. Sie zeigen, dass das Finden  
 einer optimalen Maut für den allgemeinen Fall NP-schwer ist. Weiterführend  
 stellten sich deshalb Bonifaci et al. [2] die Frage, wie stark die durch Maut er-  
 zwingbare Auslastung für ein gegebenes bemauteses Teilnetzwerk vom Syste-  
 moptimum abweicht. Sie zeigten, dass der Preis der Anarchie bei polynomiellen  
 Latenzfunktionen auch für eingeschränkte Maut noch wesentlich reduziert wer-  
 den kann, solange die Einschränkungen der Maut auf Kanten mit hochgradigen  
 Latenzfunktionen nicht zu stark sind.

Hat man die Existenz der optimalen Maut gezeigt und deren Berechnung  
 ermöglicht, ist ein weiteres Ziel die Minimale der optimalen Mauten zu be-  
 stimmen, was die Frage aufwirft, wie groß diese minimale Maut werden kann.  
 Fleischer et al. haben in ihrer Ausarbeitung nur eine, in der Anzahl der Kan-  
 ten des Netzwerkes allgemein exponentielle, obere Schranke an die Mauthöhe in  
 Mehrgüternetzwerken bewiesen, die zusätzlich linear von der maximalen Latenz-  
 sensitivität der Nutzer und der maximalen Latenz der Kanten abhängt. Mit den  
 zusätzlichen Untersuchungen der oberen Schranke an die Mauthöhe in Kapitel  
 4.2 wollten wir deshalb in dieser Bachelorarbeit der Frage nach der maximal  
 nötigen Maut näher auf den Grund gehen. Im Fall von Mehrgüternetzwerken  
 konnten wir mit Theorem 4.2 zeigen, dass die optimale Maut maximal exponen-  
 tiell im Sinne der Fakultät von der Anzahl der Kanten des Netzwerkes abhängt  
 und damit die allgemeine obere Schranke von Fleischer et al. konkretisieren.  
 Da Fleischer et al. in Beispiel 6.1 für die untere Schranke an die Mauthöhe in  
 allgemeinen Auslastungsspielen nur die Exponentialität der nötigen Maut im  
 Sinne der Zweierpotenz zeigen, bleibt damit die Frage offen, ob sich für allge-  
 meine Auslastungsspiele ein Beispiel finden lässt, wo die benötigte Maut noch  
 größer ist als im gegebenen Beispiel oder ob die in Theorem 4.1 bewiesene obere

Schranke verbessert werden kann. Um zu untersuchen, ob die obere Schranke von Fleischer et al. reduzierbar ist, haben wir zunächst mit Beispiel 4.1 gezeigt, dass die Abhängigkeit von der maximalen Latenzsensitivität der Nutzer und der maximalen Latenz der Kanten nicht einmal im einfachsten Fall eines Netzwerkes mit zwei parallelen Kanten vernachlässigbar ist. Die Abhängigkeit von der Anzahl der Kanten des Netzwerkes konnten wir jedoch für Spezialfälle reduzieren: Für den Spezialfall eines Netzwerkes, in dem jeder Weg aus maximal  $k$  Kanten besteht, konnten wir mit Theorem 4.3 eine bessere Abschätzung an die Mauthöhe finden, solange  $k \leq \frac{m}{6}$ . In diesem Fall ist die benötigte Maut exponentiell in der Anzahl  $m$  der Kanten des Netzwerkes im Sinne der Potenz  $(2k)^{m-2}$ , was für festes  $k$  asymptotisch besser ist als die Fakultät  $(m-1)!$ . Da in jedem Mehrgüternetzwerk die maximale Weglänge durch die Anzahl  $n$  der Knoten beschränkt ist, kann Theorem 4.3 mit  $k = n$  auf jedes Mehrgüternetzwerk angewendet werden. Gilt dabei für das Netzwerk  $n \leq \frac{m}{6}$ , also  $m \geq 6n$ , so ist diese obere Schranke an die Mauthöhe im Sinne der Potenz  $(2n)^{m-2}$  besser als die in Theorem 4.2 gegebene Abschätzung im Sinne der Fakultät  $(m-1)!$ . Ist  $k = 1$ , so konnten wir die obere Schranke an die Mauthöhe noch weiter reduzieren. Für diese speziellen Mehrgüternetzwerke, in denen jeder Weg aus genau einer Kanten besteht (was Netzwerke mit parallelen Kanten einschließt), konnten wir mit Theorem 4.5 zeigen, dass nur eine lineare Maut in der Anzahl der Kanten des Netzwerkes nötig ist.

## Literatur

- [1] BECKMAN, M. ; MCGUIRE, C. B. ; WINSTEN, C. B.: *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, 1956
- [2] BONIFACI, V. ; SALEK, M. ; SCHÄFER, G.: Efficiency of restricted tolls in non-atomic network routing games. In: *Proceedings of the 4th international conference on Algorithmic game theory*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2011, S. 302–313
- [3] BORDER, K. C.: *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press, 1985
- [4] BOSCH, S.: *Lineare Algebra*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008
- [5] COLE, R. ; DODIS, Y. ; ROUGHGARDEN, T.: Pricing network edges for heterogeneous selfish users. In: *STOC 2003*, 2003, S. 521–530
- [6] FLEISCHER, L.: Linear tolls suffice: New bounds and algorithms for tolls in single source networks. In: *Theoretical Computer Science, 348(2-3)*, 2005, S. 217–225
- [7] FLEISCHER, L. ; JAIN, K. ; MAHDIAN, M.: Tolls for heterogeneous selfish users in multicommodity networks and generalized congestion games. In: *Foundations of Computer Science, 2004. Proceedings. 45th Annual IEEE Symposium on*, 2004, S. 277 – 285
- [8] HOEFER, M. ; OLBRICH, L. ; SKOPALIK, A.: Taxing Subnetworks. In: *Internet and network economics : 4th International Workshop, WINE, 2008*, S. 286–294
- [9] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 1*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2004
- [10] KOUTSOPIAS, E. ; PAPADIMITRIOU, C.: Worst-case equilibria. In: *Computer Science Review 3(2)*, 2009, S. 65–69
- [11] PAPADIMITRIOU, C. H. ; STEIGLITZ, K.: *Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1982
- [12] PIGOU, A. C.: *The Economics of Welfare*. Macmillan, 1920
- [13] ROUGHGARDEN, T.: *Selfish routing and the price of anarchy*. Cambridge, Massachusetts : MIT Press, 2005
- [14] TOLL COLLECT GMBH: *Pressemitteilungen*. 2012. – URL <http://www.toll-collect.de/presse>. – Zugriffsdatum: 27.02.2013