Technische Universität Berlin Sommersemester 2005
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 28. Juni 2005

Numerische Lineare Algebra

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Abgabe bis zum 6.7.2005

Aufgabe 20 Jacobi-Davidson und Arnoldi

Zeige: Löst man im Jacobi-Davidson-Algorithmus die Jacobi-Korrektor-Gleichung

$$P(A - \mu I)Pz = -r, \quad z \perp r$$

mit Hilfe der Approximation $P(A - \mu I)P = I$, so ist der entstehende Algorithmus formal äquivalent zum Arnoldi-Algorithmus, d.h. für die durch den Algorithmus erzeugten Vektoren $q_1, \dots, q_m$ bei m Schritten ohne Abbruch gilt:

$$\mathcal{K}_p(A, q_1) = \mathrm{Span}(q_1, \dots, q_p) \quad \text{für } p = 1, \dots, m.$$

Aufgabe 21 Jordanblöcke und Matrixpolynome

Es bezeichne $\mathcal{J}_n(\lambda)$ den $n \times n$ Jordanblock zum Eigenwert λ, d.h.

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I_n + \mathcal{N} \quad \text{mit dem nilpotenten Block } \mathcal{N} = \mathcal{J}_n(0).$$

Zeige

a) $\mathcal{J}_n(\lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \mathcal{N}^j$

b) Ist p ein Polynom, so gilt

$$p(\mathcal{J}_n(\lambda)) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} p^j(\lambda) \mathcal{N}^j,$$

wobei $p^j(\lambda)$ die j-te Ableitung von p bezeichnet.

Aufgabe 22 Konvergenz von Splittingmethoden

Zeige:

a) Gegeben sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Spektralradius $\varrho(X) < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} X^k = 0$.

b) Sei $A = M - N$ mit $A, M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nichtsingulär. Ist $\varrho(M^{-1}N) < 1$, so konvergiert die Iteration

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b$$

für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{C}n$ und jede rechte Seite $b \in \mathbb{C}^n$ gegen $\hat{x} = A^{-1}b$.

(*Hinweis* zu a): Benutze z.B. Aufgabe 21.)

Aufgabe 23 Ein Lemma aus der Vorlesung

Seien $A \in \mathbb{R}^n$ positiv definit, $x, b \in \mathbb{R}^n$ und $r = b - Ax$, sowie

$$\phi(y) := \frac{1}{2}y^T Ay - y^T b.$$

Zeige: Für $p \in \mathbb{R}^n$ mit $p \not\perp r$ hat die reellwertige Funktion einer Veränderlichen

$$\alpha \mapsto \phi(x + \alpha p)$$

in $\alpha = \dfrac{p^T r}{p^T Ap}$ ein globales Minimum.