

## Numerische Lineare Algebra

### 4. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 22.6.2005

#### Aufgabe 13 (Charakterisierung extremer Eigenwerte bei symmetrischen Matrizen)

Die symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , wobei  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Zeige:

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad \text{und} \quad \lambda_n = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

#### Aufgabe 14 (Zusammenhang zwischen Krylovräumen und dem Minimalpolynom)

Seien  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$  und sei  $P(t) = t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$  das Minimalpolynom von  $x$  bzgl.  $A$ , d.h. das normierte Polynom kleinsten Grades  $m$  mit

$$P(A)x = A^m x + \alpha_{m-1} A^{m-1} x + \dots + \alpha_1 A x + \alpha_0 x = 0.$$

Zeige:

- $\dim \mathcal{K}_p(A, x) = p \iff p \leq m$ .
- $\mathcal{K}_m(A, x)$  ist  $A$ -invariant.
- $\mathcal{K}_p(A, x) = \mathcal{K}_m(A, x)$  für alle  $p \geq m$ .

#### Aufgabe 15 (Zusammenhang zwischen Krylovräumen und Hessenbergmatrizen I)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $g_1 \in \mathbb{C}^n$ , so dass  $g_1, Ag_1, \dots, A^{m-1}g_1$  linear unabhängig sind. Ferner sei  $G = [g_1, g_2, \dots, g_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  nichtsingulär und

$$B = G^{-1}AG = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

bzw.  $A[g_1, \dots, g_n] = [g_1, \dots, g_n]B$ . Zeige:

- Für jedes  $k = 1, \dots, n-2$  gilt:

$$b_{jk} = 0 \text{ für } j = k+2, \dots, n \iff Ag_k \in \text{Span}(g_1, \dots, g_{k+1})$$

- $b_{jk} = 0$  für  $k = 1, \dots, m-1$  und  $j = k+2, \dots, n$   
 $\iff \text{Span}(g_1, \dots, g_p) = \mathcal{K}_p(A, g_1)$  für  $p = 1, \dots, m$ .

#### Aufgabe 16 (Zusammenhang zwischen Krylovräumen und Hessenbergmatrizen II)

Ist in Aufgabe 15  $m = n$  und  $\text{Span}(g_1, \dots, g_p) = \mathcal{K}_p(A, g_1)$  für  $p = 1, \dots, n$ , so ist  $B$  nach 15b) insbesondere eine Hessenbergmatrix. Zeige, dass  $B$  dann unreduziert ist.