Technische Universität Berlin Sommersemester 2005
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 24. Mai 2005

Numerische Lineare Algebra

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 8.6.2005

Aufgabe 9 (Unterräume und Matrixdarstellungen)

Es sei

$$\mathcal{V} = \mathcal{R}\left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ I_{n-m} \end{array}\right]\right), \quad W = \left[\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array}\right], \quad Z_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}, Z_2 \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m},$$

wobei $\operatorname{Rang}(W) = m$. Zeige:

$$\mathcal{R}(W) \cap \mathcal{V} = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad Z_1 \text{ ist nichtsingulär.}$$

Aufgabe 10 (Auschlussbedingung bei simultaner Unterraumiteration)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unreduzierte Hessenbergmatrix, sowie $1 \leq k \leq n-1$ und $x \neq 0$ ein Vektor aus $\mathcal{S} = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

a) Zeige: Jeder A-invariante Unterraum, der x enthält, hat mindestens die Dimension $n-k+1$.

b) Folgere aus a), dass wenn $\mathcal{U}$ der invariante Unterraum von A assoziiert mit den $n-k$ betragskleinsten Eigenwerten $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ ist, dann ist die Bedingung $\mathcal{S} \cap \mathcal{U} = \{0\}$ erfüllt, d.h. $\mathcal{S}$ kann als Start-Unterraum bei der simultanen Unterraumiteration verwendet werden.

Aufgabe 11 (Householder-Transformationen)

Zu $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$.

a) Zeige: P ist symmetrisch und orthogonal.

b) Zu $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ suchen wir v, so dass Px ein Vielfaches des Einheitsvektors ist. Zeige: der Ansatz $v = x + \alpha e_1$ liefert

$$v = x \pm \|x\| e_1 \quad \text{und} \quad Px = \mp \|x\| e_1.$$

c) Zu gegebenen $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ schreibe einen Algorithmus, der das Produkt PB in ca. $4nm$ flops berechnet.

d) Zeige: P spiegelt einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ and der Hyperebene $\operatorname{Span}(v)^\perp$, also an der Hyperebene mit Normalenvektor v.

Aufgabe 12 (Implizites Q-Theorem)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und seien $Q = [q_1, \ldots, q_n]$, $U = [u_1, \ldots, u_n]$ unitär, so dass $H = Q^*AQ = (h_{ij})$ und $G = U^*AU = (g_{ij})$ in Hessenbergform sind. Zeige: Falls $q_1 = u_1$ und falls H unreduziert ist, so gilt

$$q_j = z_j u_j \text{ mit } |z_j| = 1 \quad \text{und} \quad |h_{j,j-1}| = |g_{j,j-1}|, \quad j = 2, \ldots n.$$

(**Hinweis**: Setze $W = [w_1, \ldots, w_n] = U^*Q$. Dann gilt $WH = GW$. Zeige per Induktion, dass $w_j \in \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Was folgt damit für die Struktur der unitären Matrix W?)