Technische Universität Berlin Sommersemester 2005
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 19. April 2005

Numerische Lineare Algebra

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 29.4.2005

Aufgabe 1 (Normale Matrizen)

Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

i) A is normal, d.h. $AA^* = A^*A$.

ii) U^*AU ist normal für jede unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

iii) Für jede unitäre Matrix U mit $U^*AU = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, $B_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$, gilt $B_{12} = 0$.

iv) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass U^*AU diagonal ist.

v) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A^* = UA$.

vi) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Zu leicht? Dann zeige doch noch, dass i)-vii) zu folgender Bedingung äquivalent sind:

vii) $AA^* - A^*A$ ist positiv semidefinit (d.h. $x^*(AA^* - A^*A)x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$).

Aufgabe 2 (Isometrische Matrizen und Singulärwerte)

Seien $U_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ und $U_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$, $k \leq \frac{n}{2}$, so dass

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

isometrisch ist. U_1 habe die Singulärwerte $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$, U_2 die Singulärwerte $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_k$. Zeige, dass für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt:

$$\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1.$$

Aufgabe 3 (Polarzerlegung)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Eine Zerlegung $A = UH$ heißt *Polarzerlegung* von A, falls $U \in \mathbb{C}^{m \times n}$ isometrisch und $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitesch und positiv semidefinit ist. (Insbesondere folgt damit $m \leq n$ per Definition von isometrischen Matrizen.) Zeige, dass jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Polarzerlegung besitzt.

Aufgabe 4 (Kanonische Vektoren)

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ k-dimensionale Unterräume, sowie $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{U}$ und $y_1, \ldots, y_k \in \mathcal{V}$ kanonische Vektoren. Zeige für $i \neq j$:

$$\langle x_i, y_j \rangle = 0.$$

Aufgabe 5 (Bilddatenkompression mit SVD)

Schreibe ein MATLAB-Programm, welches eine Matrix mit Bilddateninformation einliest, eine beste Approximation vom Rang k an diese Matrix berechnet, sowie den Approximationsfehler (in der 2-Norm), das Original und das komprimierte Bild darstellt (benutze `subplot`), sowie den für das Original und das komprimierte Bild benötigten Arbeitsspeicher ausgibt. Teste das Programm für die in MATLAB verfügbaren Bilder (`clown, gatlin, durer, mandrill, earth`) und verschiedene Werte von k. Ermittle (empirisch) fúr jedes Bild die beste Kompression, so dass das approximierte Bild noch „verlustfrei“ dargestellt werden kann.

Hinweis: Die MATLAB-Bilder erhält man mit dem `load`-Befehl. Z.B. erhält man mit

```
>> load clown
```

eine Bilddatenmatrix `X` (eine 200×320-Matrix in diesem Fall, also hat das Clown-Bild 200×320 Bildpunkte) sowie eine Matrix `map`, in der die Information über das verwendete Farbmodell gespeichert ist. Um nun das Clown-Bild anzuzeigen, kann man die Befehle

```
>> colormap(map)
>> image(X)
```

ausführen.