Hessenberg-Reduktion

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Sei a_1 die erste Spalte von A.

Hessenberg-Reduktion

$$PA = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Wir können eine Householder-Matrix bestimmen, die a_1 auf den ersten Einheitsvektor spiegelt.

Hessenberg-Reduktion

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Machen wir aber eine Ähnlichkeitstransformation mit P, so ist PAP^{-1} wieder voll.

Hessenberg-Reduktion

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ {\color{red}*} & * & * & * & * & * \\ {\color{red}*} & * & * & * & * & * \\ {\color{red}*} & * & * & * & * & * \\ {\color{red}*} & * & * & * & * & * \\ {\color{red}*} & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Daher bestimme eine Householder-Matrix ${\color{red}\hat{P}_1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, die nur den **roten** Spaltenvektor auf den Einheitsvektor spiegelt und betrachte

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {\color{red}\hat{P}_1} \end{bmatrix}.$$

Hessenberg-Reduktion

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_1 beeinflusst nur den **roten** Bereich der Matrix.

Hessenberg-Reduktion

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Analog beeinflusst Multiplikation mit P_1^{-1} von rechts nur **diesen roten** Bereich der Matrix.

Hessenberg-Reduktion

$$P_1 A P_1^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & {\color{red}*} & * & * & * & * \\ 0 & {\color{red}*} & * & * & * & * \\ 0 & {\color{red}*} & * & * & * & * \\ 0 & {\color{red}*} & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bestimme nun eine Householder-Matrix ${\color{red}\hat{P}_2} \in \mathbb{C}^{n-2 \times n-2}$, die den unteren **roten** Teil der zweiten Spalte auf den ersten Einheitsvektor spiegelt und betrachte

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & {\color{red}\hat{P}_2} \end{bmatrix}.$$

Hessenberg-Reduktion

$$P_2 P_1 A P_1^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_2 hat nur Einfluss auf den **roten** Teil der Matrix.

Hessenberg-Reduktion

$$P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} \\ * & * & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} \\ 0 & * & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} \\ 0 & 0 & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} \\ 0 & 0 & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} \\ 0 & 0 & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} & {\color{red}*} \end{bmatrix}$$

Analog beeinflusst Multiplikation mit P_2^{-1} von rechts nur **diesen roten** Bereich der Matrix.

Hessenberg-Reduktion

$$P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & {\color{red}*} & * & * & * \\ 0 & 0 & {\color{red}*} & * & * & * \\ 0 & 0 & {\color{red}*} & * & * & * \end{bmatrix}$$

und so weiter...

$$P_3 = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & {\color{red}\hat{P}_3} \end{bmatrix}.$$

Hessenberg-Reduktion

$$P_3 P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

und so weiter...

Hessenberg-Reduktion

$$P_3 P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

und so weiter...

Hessenberg-Reduktion

$$P_3 \cdots P_1 A P_1^{-1} \cdots P_3^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{*} & * & * \end{bmatrix}$$

und so weiter...

$$P_4 = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & \color{red}{\hat{P}_4} \end{bmatrix}.$$

Hessenberg-Reduktion

$$P_4 \cdots P_1 A P_1^{-1} \cdots P_3^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

und so weiter...

Hessenberg-Reduktion

$$P_4 \cdots P_1 A P_1^{-1} \cdots P_4^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

FERTIG!

Hessenberg-Reduktion

$$P_4 \cdots P_1 A P_1^{-1} \cdots P_4^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Fazit: Der Algorithmus berechnet in endlich vielen Schritten eine zu einer $n \times n$ Matrix A ähnliche Hessenbergmatrix.

Kosten: ca. $\frac{10}{3}n^3$ flops

Falls auch $Q = P_{n-2} \cdots P_1$ explizit berechnet wird: noch einmal $\frac{4}{3}n^3$ flops