

Bulge Chasing

$$H = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Gegeben: Eine „Hessenbergmatrix mit Buckel“. Es sei $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und der Buckel habe die Größe $l + 2$.

Bulge Chasing

$$H = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Bestimme eine Householdermatrix $\hat{P}_1$, die den **roten** Vektor auf den ersten Einheitsvektor spiegelt. Bette $\hat{P}_1$ in eine $n \times n$ Matrix ein:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-l-2} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$H = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_1 von links beeinflusst nur die Zeilen $2, \dots, l+2$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-l-2} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_1 H = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_1 H = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_1 von rechts beeinflusst nur die Spalten $2, \dots, l+2$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-l-2} \end{bmatrix}$$

(Beachte: $P_1^{-1} = P_1^* = P_1$.)

Bulge Chasing

$$P_1 H P_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_1 H P_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Der Buckel ist auf der Diagonalen um eine Einheit nach unten gejagt worden.
Jage nun den Buckel weiter die Diagonale hinab!

Bulge Chasing

$$P_1 H P_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Bestimme nun eine Householdermatrix $\hat{P}_2$, die den **roten** Vektor auf den ersten Einheitsvektor spiegelt. Bette $\hat{P}_2$ in eine $n \times n$ Matrix ein:

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-l-3} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_1 H P_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_2 von links beeinflusst nur die Zeilen $3, \dots, l+3$.

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-l-3} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_2 P_1 H P_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_2 P_1 H P_1 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_2 von rechts beeinflusst nur die Spalten $3, \dots, l+3$.

$$P_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-l-3} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$P_2 P_1 H P_1 P_2 = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Nach $n - l - 2$ Schritten ist der Buckel am Rand der Matrix angekommen.
Jage den Buckel nun über die Diagonale hinaus.

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bestimme eine Householdermatrix $\hat{P}_{n-l-1}$, die den **roten** Vektor auf den ersten Einheitsvektor spiegelt. Bette $\hat{P}_{n-l-1}$ in eine $n \times n$ Matrix ein:

$$P_{n-l-1} = \begin{bmatrix} I_{n-l-1} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{n-l-1} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} & \color{red}{*} \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_{n-l-1} von links beeinflusst nur die Zeilen $n-l, \dots, n$

$$P_{n-l-1} = \begin{bmatrix} I_{n-l-1} & 0 \\ 0 & \color{red}{\hat{P}}_{n-l-1} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_{n-l-1} von rechts beeinflusst nur die Spalten $n-l, \dots, n$

$$P_{n-l-1} = \begin{bmatrix} I_{n-l-1} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{n-l-1} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Bestimme eine Householdermatrix $\hat{P}_{n-2}$, die den **roten** Vektor auf den ersten Einheitsvektor spiegelt. Bette $\hat{P}_{n-2}$ in eine $n \times n$ Matrix ein:

$$P_{n-2} = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{n-2} \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_{n-2} von links beeinflusst nur die Zeilen $n-1, n$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit P_{n-2} von rechts beeinflusst nur die Spalten $n-1, n$

Bulge Chasing

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

FERTIG! Der Buckel ist verschwunden. Beachte: Die erste Spalte der Transformationen P_k ist jeweils der erste Einheitsvektor, d.h. es gilt

$$P_k e_1 = e_1 \quad \text{für } k = 1, \dots, n-2.$$