Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 14. Dezember 2004

Numerische Lineare Algebra

9. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 4.1.2005

Aufgabe 33 Weierstraß Normalform

Sei

$$\lambda E - A := \lambda \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

das Matrixbüschel zur Schaltkreissimulation aus der Vorlesung, wobei $C, L \neq 0$.
Zeige: $\lambda E - A$ hat die Weierstraß Normalform

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und bestimme λ_1 und λ_2.

Aufgabe 34 Lösung von DAE's

Betrachte die differentiel-algebraische Gleichung

$$E\dot{x} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = Ax + f = \begin{bmatrix} \mathcal{J} & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

wobei $\lambda E - A$ in Weierstraß-Normalform ist. Es sei $\nu \in \mathbb{N}$ der Nilpotenzindex von N, d.h. die kleinste natürliche Zahl mit $N^\nu = 0$, sowie $f_1 \in \mathcal{C}\Big([t_0, t_1], \mathbb{C}^m\Big)$ und $f_2 \in \mathcal{C}^\nu\Big([t_0, t_1], \mathbb{C}^{n-m}\Big)$.
Zeige: x ist genau dann eine Lösung, wenn x_1 eine Lösung von $\dot{x}_1 = \mathcal{J}x + f_1$ ist und falls x_2 die Form

$$x_2 = -\sum_{j=0}^{\nu-1} N^j f_2^{(j)}$$

hat. Gibt es für jedes $x_0 \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung x von (1) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$?

Aufgabe 35 Invariante Unterräume

Sei $\lambda E - A$ ein (nicht notwendig reguläres) $n \times n$-Matrixbüschel, sowie $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ ein k-dimensionaler Unterraum. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. $\mathcal{U}$ ist invariant für $\lambda E - A$.

2. es gibt einen Unterraum $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim \mathcal{V} \leq k$ und $E\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ und $A\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

3. es gibt $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar mit $\mathrm{Span}(p_1, \ldots, p_k) = \mathcal{U}$ (wobei $p_1, \ldots, p_k$ die ersten k Spalten von P bezeichnen), so dass

$$Q^*(\lambda E - A)P = \lambda \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

   wobei $E_{11}, A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ und $A_{22}, E_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$.

Aufgabe 36 Singuläre Matrixbüschel

Sei $\lambda E - A$ ein $n \times n$-Matrixbüschel und

$$U^* E V = \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung von E. Ferner sei $U = [U_1, U_2]$ und $V = [V_1, V_2]$ mit $U_1, V_1 \in \mathbb{C}^{n \times k}$. Zeige: Ist $\lambda E - A$ singulär, so ist die Matrix $U_2^* A V_2$ singulär. Gilt auch die Umkehrung?