Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 7. Dezember 2004

Numerische Lineare Algebra

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 14.12.2004

Aufgabe 29 "Schlechte" Spektren

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$, Π_k der Vektorraum aller (komplexen) Polynome vom Grad kleiner gleich k, und $\widetilde{\Pi}_k$ der Unterraum von Π_k bestehend aus allen Polynomen p mit der Eigenschaft $p(0) = 1$. Ferner definiere für $p \in \Pi_k$ die Größe

$$\|p\|_S = \sup_{z \in S} |p(z)|.$$

a) Zeige: Hat S unendlich viele Elemente, so ist $\|\cdot\|_S$ eine Norm auf Π_k. Warum gilt das nicht, wenn S endlich ist?

b) Die konvexe Hülle von S enthalte den Nullpunkt 0 in ihrem Inneren, d.h. S ist in keiner offenen Halbebene von $\mathbb{C}$ enthalten. Zeige, dass es kein $p \in \widetilde{\Pi}_1$ gibt mit $\|p\|_S < 1$.

c) Sei A eine Matrix, deren Spektrum $S = \sigma(A)$ die in b) genannte Eigenschaft hat. Zeige: Es gibt kein $p \in \widetilde{\Pi}_1$ mit $\|p(A)\| < 1$

Aufgabe 30 CGN ist manchmal schneller als GMRES

Betrachte das Problem $Ax = b$ für $b \in \mathbb{R}^n$ und die zirkulante $n \times n$ Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Zeige: Die Singulärwerte von A sind alle 1 und das Verfahren CGN konvergiert nach einem Schritt.

b) Zeige: Die Eigenwerte von A sind die n-ten Einheitswurzeln und das Verfahren GMRES konvergiert i.A. erst nach n Schritten.

c) Die Matrix A hat soviel Struktur, dass man die Eigenwerte gar nicht erst zu betrachten braucht, um das Konvergenzverhalten von GMRES zu erklären. Erkläre mit elementaren Argumenten, warum GMRES für die rechte Seite $b = (1, 0, \ldots, 0)^T$ n Schritte bis zur Konvergenz benötigt.

Aufgabe 31 GMRES ist manchmal schneller als CGN

Betrachte wieder das Problem $Ax = b$ mit einer allgemeinen rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Konstruiere eine $n \times n$ Matrix A, für die GMRES bereits nach zwei Schritten konvergiert, für die CGN jedoch n Schritte bis zur Konvergenz benötigt.

Aufgabe 32 Tests mit GMRES

Implementiere eine einfache (nicht notwendig effiziente) Version von GMRES in MATLAB oder benutze die bereits in MATLAB implementierte Funktion `gmres` zur Lösung der folgenden Aufgabe. (Informationen zu dieser Funktion liefert die Eingabe `help gmres`. Führe zur Lösung von $Ax = b$ mit $b = (1, 1, \dots, 1)^T$ jeweils 15 Schritte von GMRES mit dem Startvektor $x_0 = 0$ aus und plotte die Größe $\|r_n\|/\|b\|$ über der Anzahl der Schritte aus für

a) die Matrix `m=200; A=2*eye(m)+0.5*randn(m)/sqrt(m);`. Berechne auch die Konditionszahl von A, sowie den Abstand zur Normalität (z.B. grob durch die Konditionszahl einer Matrix aus Eigenvektoren von A). Plotte das Spektrum von A und nutze das Polynom $p(t) = (1 - t/2)^k$ um eine theoretische obere Schranke für die Größe $\|r_n\|/\|b\|$ zu bekommen. Vergleiche dein theoretisches Ergebnis mit dem numerischen Experiment.

b) die Matrix $A + D$, wobei A aus a) ist und D eine Diagonalmatrix mit Einträgen

$$d_k = (-2 + 2\sin\theta_k) + i\cos\theta_k, \qquad \theta_k = \frac{k\pi}{200}, \quad k = 1, \dots, 200.$$

Betrachte wieder die Konditionszahl von A, den Abstand zur Normalität von A und das Spektrum von A. Wie sind die Unterschiede im Verhalten von GMRES zum Aufgabenteil a) zu erklären?