

## Numerische Lineare Algebra

### 8. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 14.12.2004

#### Aufgabe 29 “Schlechte” Spektren

Sei  $S \subseteq \mathbb{C}$ ,  $\Pi_k$  der Vektorraum aller (komplexen) Polynome vom Grad kleiner gleich  $k$ , und  $\tilde{\Pi}_k$  der Unterraum von  $\Pi_k$  bestehend aus allen Polynomen  $p$  mit der Eigenschaft  $p(0) = 1$ . Ferner definiere für  $p \in \Pi_k$  die Größe

$$\|p\|_S = \sup_{z \in S} |p(z)|.$$

- Zeige: Hat  $S$  unendlich viele Elemente, so ist  $\|\cdot\|_S$  eine Norm auf  $\Pi_k$ . Warum gilt das nicht, wenn  $S$  endlich ist?
- Die konvexe Hülle von  $S$  enthalte den Nullpunkt 0 in ihrem Inneren, d.h.  $S$  ist in keiner offenen Halbebene von  $\mathbb{C}$  enthalten. Zeige, dass es kein  $p \in \tilde{\Pi}_1$  gibt mit  $\|p\|_S < 1$ .
- Sei  $A$  eine Matrix, deren Spektrum  $S = \sigma(A)$  die in b) genannte Eigenschaft hat. Zeige: Es gibt kein  $p \in \tilde{\Pi}_1$  mit  $\|p(A)\| < 1$

#### Aufgabe 30 CGN ist manchmal schneller als GMRES

Betrachte das Problem  $Ax = b$  für  $b \in \mathbb{R}^n$  und die zirkulante  $n \times n$  Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

- Zeige: Die Singulärwerte von  $A$  sind alle 1 und das Verfahren CGN konvergiert nach einem Schritt.
- Zeige: Die Eigenwerte von  $A$  sind die  $n$ -ten Einheitswurzeln und das Verfahren GMRES konvergiert i.A. erst nach  $n$  Schritten.
- Die Matrix  $A$  hat soviel Struktur, dass man die Eigenwerte gar nicht erst zu betrachten braucht, um das Konvergenzverhalten von GMRES zu erklären. Erkläre mit elementaren Argumenten, warum GMRES für die rechte Seite  $b = (1, 0, \dots, 0)^T$   $n$  Schritte bis zur Konvergenz benötigt.

### Aufgabe 31 GMRES ist manchmal schneller als CGN

Betrachte wieder das Problem  $Ax = b$  mit einer allgemeinen rechten Seite  $b \in \mathbb{R}^n$ . Konstruiere eine  $n \times n$  Matrix  $A$ , für die GMRES bereits nach zwei Schritten konvergiert, für die CGN jedoch  $n$  Schritte bis zur Konvergenz benötigt.

### Aufgabe 32 Tests mit GMRES

Implementiere eine einfache (nicht notwendig effiziente) Version von GMRES in MATLAB oder benutze die bereits in MATLAB implementierte Funktion `gmres` zur Lösung der folgenden Aufgabe. (Informationen zu dieser Funktion liefert die Eingabe `help gmres`. Führe zur Lösung von  $Ax = b$  mit  $b = (1, 1, \dots, 1)^T$  jeweils 15 Schritte von GMRES mit dem Startvektor  $x_0 = 0$  aus und plote die Größe  $\|r_n\|/\|b\|$  über der Anzahl der Schritte aus für

- a) die Matrix  $m=200$ ;  $A=2*\text{eye}(m)+0.5*\text{randn}(m)/\text{sqrt}(m)$ ; . Berechne auch die Konditionszahl von  $A$ , sowie den Abstand zur Normalität (z.B. grob durch die Konditionszahl einer Matrix aus Eigenvektoren von  $A$ ). Plote das Spektrum von  $A$  und nutze das Polynom  $p(t) = (1 - t/2)^k$  um eine theoretische obere Schranke für die Größe  $\|r_n\|/\|b\|$  zu bekommen. Vergleiche dein theoretisches Ergebnis mit dem numerischen Experiment.
- b) die Matrix  $A + D$ , wobei  $A$  aus a) ist und  $D$  eine Diagonalmatrix mit Einträgen

$$d_k = (-2 + 2 \sin \theta_k) + i \cos \theta_k, \quad \theta_k = \frac{k\pi}{200}, \quad k = 1, \dots, 200.$$

Betrachte wieder die Konditionszahl von  $A$ , den Abstand zur Normalität von  $A$  und das Spektrum von  $A$ . Wie sind die Unterschiede im Verhalten von GMRES zum Aufgabenteil a) zu erklären?