Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
C. Mehl

Wintersemester 2004/05

30. November 2004

Numerische Lineare Algebra

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 7.12.2004

Aufgabe 24 Jordanblöcke und Matrixpolynome

Es bezeichne $\mathcal{J}_n(\lambda)$ den $n \times n$ Jordanblock zum Eigenwert λ, d.h.

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} = I_n + \mathcal{N} \quad \text{mit dem nilpotenten Block } \mathcal{N} = \mathcal{J}_n(0).$$

Zeige

a) $\mathcal{J}_n(\lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \mathcal{N}^j$

b) Ist p ein Polynom, so gilt

$$p(\mathcal{J}_n(\lambda)) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} p^j(\lambda) \mathcal{N}^j,$$

wobei $p^j(\lambda)$ die j-te Ableitung von p bezeichnet.

Aufgabe 25 Konvergenz von Splittingmethoden

Zeige:

a) Gegeben sei $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Spektralradius $\varrho(X) < 1$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} X^k = 0$.

b) Sei $A = M - N$ mit $A, M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nichtsingulär. Ist $\varrho(M^{-1}N) < 1$, so konvergiert die Iteration

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b$$

für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{C}n$ und jede rechte Seite $b \in \mathbb{C}^n$ gegen $\hat{x} = A^{-1}b$.

Aufgabe 26 Details zur Herleitung von CG

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen der Vorlesung zeige $p_{k+1} \in \mathrm{Span}(p_k, r_k)$.
(Hinweis: Zeige $p_{k+1} = cr_k + ds_k$ für $c, d \in \mathbb{R}$ und $s_k = r_{k-1} - AP_{k-1}w_{k-1}$ für ein $w_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1}$. Zeige weiter, dass r_k und s_k orthogonal sind und nutze das Lemma aus der Vorlesung.)

Aufgabe 27 Konvergenz von CG in Spezialfällen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. Zeige:

a) Falls $A = I_n + B$, wobei $\operatorname{rang}(B) = r$, so liefert CG nach spätestens $r+1$ Schritten die exakte Lösung.

b) Falls A nur r verschiedene Eigenwerte hat, so liefert CG nach spätestens $r+1$ Schritten die exakte Lösung.

(Hinweis: Nutze dein Wissen über Krylovräume.)

Aufgabe 28 Konvergenz von CG in der 2-Norm

Zeige mit Hilfe des Satzes über die Konvergenz von CG in der A-Norm, dass für die durch CG mit dem Startwert x_0 erzeugte Iterationsfolge (x_k) gilt:

$$\|x_k - A^{-1}b\|_2 \leq 2\sqrt{\kappa}\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k \|x_0 - A^{-1}b\|_2,$$

wobei $\kappa = \kappa_2(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ die Konditionszahl von A ist.