Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 24. November 2004

Numerische Lineare Algebra

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 1.12.2004

Aufgabe 19 Breakdown des unsymmetrischer Lanczos

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Gib Startvektoren x_1, y_1 an, für die der unsymmetrische Lanczos-Algorithmus ohne Information über invariante Unterräume abbricht.

Aufgabe 20 Auswertung von Matrixpolynomen

Gegeben seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$ und $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{m-1}t^{m-1} + t^m$. Angenommen, wir wollen $p(A)b$ berechnen. Wie man aus der Numerik I (vielleicht) weiß, ist die Auswertung von Polynomen mittels des Horner-Schemas

$$p(t) = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + \cdots + t(a_{m-1} + t)\cdots)) \tag{1}$$

schneller als die herkömmliche Methode, die die Potenzen t^k auswertet und dann mit den Koeffizienten multipliziert und die entstehenden Terme dann addiert.

a) Schreibe einen Algorithmus, der $p(A)$ auf der Basis von (1) berechnet und dann mit b multipliziert. Bestimme die Anzahl der flops (bzw. den dominanten Term in der Anzahl der flops), die dieser Algorithmus benötigt.

b) Vergleiche die Anzahl der flops mit der entsprechenden Anzahl der flops, die die „herkömmliche Methode“ benötigt.

c) Finde einen Algorithmus zur Berechnung von $p(A)b$, der signifikant schneller ist als die Algorithmen in A und b.

Aufgabe 21 Details zum implizit neugestarteten Arnoldi-Algorithmus

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $q_1 \in \mathbb{C}^n$, so dass der Arnoldi-Algorithmus für A mit Startvektor q_1 in den ersten m Schritten nicht abbricht, d.h. es gibt $Q_m = [q_1, \dots, q_m] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ isometrisch und eine Hessenbergmatrix $H_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$, so dass

$$AQ_m = Q_m H_m + h_{m+1,m} q_{m+1} e_m^T \quad \text{mit } h_{m+1,m} \neq 0.$$

Ferner seien U und R die Matrizen, die man nach l Schritten des QR-Algorithmus mit Shifts $\nu_1, \dots, \nu_l$ für A erhält (vgl. Vorlesung), sowie $p(t) = (t-\nu_1)\cdots(t-\nu_l)$, $1 \le l \le m$. Zeige (durch Induktion nach l):

a) $p(H_m) = UR$.

b) $p(A)Q_m = Q_m p(H_m) + F_m$, wobei

$$F_m = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} {\scriptstyle m-l} & {\scriptstyle l} \end{array} \\ {\scriptstyle n} & \begin{bmatrix} 0 & \tilde{F}_m \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad Q_m^* F_m = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} {\scriptstyle m-l+1} & {\scriptstyle l-1} \end{array} \\ {\scriptstyle n} & \begin{bmatrix} 0 & \hat{F}_m \end{bmatrix} \end{array}.$$

Aufgabe 22 Arnoldi und Polynomapproximation

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $q_1 \in \mathbb{C}^n$, so dass der Arnoldi-Algorithmus für A mit Startvektor q_1 in den ersten m Schritten nicht abbricht, d.h. es gibt $Q_m = [q_1, \dots, q_m] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ isometrisch und eine Hessenbergmatrix $H_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$, so dass

$$AQ_m = Q_m H_m + h_{m+1,m} q_{m+1} e_m^T \quad \text{mit } h_{m+1,m} \neq 0.$$

Zeige: Das charakteristische Polynom p_m von H_m ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom vom Grad kleiner gleich m, so dass

$$\|p_m(A)q_1\| = \min\left\{\|p(A)q_1\| : p \in \Pi_m, p \text{ normiert}\right\}.$$

(Hinweis: Beobachte, dass $p(A)q_1 = A^m q_1 - Q_m y$ für $y \in \mathbb{C}^m$, d.h. $p(A)q_1$ ist der Abstand von $A^m q_1$ zum Punkt $Q_m y$ im Unterraum $\mathcal{K}_m(A, q_1)$. Was bedeutet die Minimalitätsaussage geometrisch? Ferner könnte Aufgabe 21b) bei der Lösung der Aufgabe weiterhelfen.)

Aufgabe 23 Jacobi-Davidson und Arnoldi

Zeige: Löst man im Jacobi-Davidson-Algorithmus die Jacobi-Korrektor-Gleichung

$$P(A-\mu I)Pz = -r, \quad z \perp r$$

mit Hilfe der Approximation $P(A-\mu I)P = I$, so ist der entstehende Algorithmus formal äquivalent zum Arnoldi-Algorithmus, d.h. für die durch den Algorithmus erzeugten Vektoren $q_1, \dots, q_m$ bei m Schritten ohne Abbruch gilt:

$$\mathcal{K}_p(A, q_1) = \operatorname{Span}(q_1, \dots, q_p) \quad \text{für } p = 1, \dots, m.$$