

## Numerische Lineare Algebra

### 6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 1.12.2004

#### Aufgabe 19 Breakdown des unsymmetrischer Lanczos

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Gib Startvektoren  $x_1, y_1$  an, für die der unsymmetrische Lanczos-Algorithmus ohne Information über invariante Unterräume abbricht.

#### Aufgabe 20 Auswertung von Matrixpolynomen

Gegeben seien  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{C}^n$  und  $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1} + t^m$ . Angenommen, wir wollen  $p(A)b$  berechnen. Wie man aus der Numerik I (vielleicht) weiß, ist die Auswertung von Polynomen mittels des Horner-Schemas

$$p(t) = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + \dots + t(a_{m-1} + t) \dots)) \quad (1)$$

schneller als die herkömmliche Methode, die die Potenzen  $t^k$  auswertet und dann mit den Koeffizienten multipliziert und die entstehenden Terme dann addiert.

- Schreibe einen Algorithmus, der  $p(A)$  auf der Basis von (1) berechnet und dann mit  $b$  multipliziert. Bestimme die Anzahl der flops (bzw. den dominanten Term in der Anzahl der flops), die dieser Algorithmus benötigt.
- Vergleiche die Anzahl der flops mit der entsprechenden Anzahl der flops, die die „herkömmliche Methode“ benötigt.
- Finde einen Algorithmus zur Berechnung von  $p(A)b$ , der signifikant schneller ist als die Algorithmen in A und b.

### Aufgabe 21 Details zum implizit neugestarteten Arnoldi-Algorithmus

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $q_1 \in \mathbb{C}^n$ , so dass der Arnoldi-Algorithmus für  $A$  mit Startvektor  $q_1$  in den ersten  $m$  Schritten nicht abbricht, d.h. es gibt  $Q_m = [q_1, \dots, q_m] \in \mathbb{C}^{n \times m}$  isometrisch und eine Hessenbergmatrix  $H_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , so dass

$$AQ_m = Q_m H_m + h_{m+1,m} q_{m+1} e_m^T \quad \text{mit } h_{m+1,m} \neq 0.$$

Ferner seien  $U$  und  $R$  die Matrizen, die man nach  $l$  Schritten des  $QR$ -Algorithmus mit Shifts  $\nu_1, \dots, \nu_l$  für  $A$  erhält (vgl. Vorlesung), sowie  $p(t) = (t - \nu_1) \cdots (t - \nu_l)$ ,  $1 \leq l \leq m$ . Zeige (durch Induktion nach  $l$ ):

a)  $p(H_m) = UR$ .

b)  $p(A)Q_m = Q_m p(H_m) + F_m$ , wobei

$$F_m = \begin{matrix} & m-l & l \\ n & \left[ \begin{array}{cc} 0 & \tilde{F}_m \end{array} \right] \end{matrix} \quad \text{und} \quad Q_m^* F_m = \begin{matrix} & m-l+1 & l-1 \\ n & \left[ \begin{array}{cc} 0 & \hat{F}_m \end{array} \right]. \end{matrix}$$

### Aufgabe 22 Arnoldi und Polynomapproximation

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $q_1 \in \mathbb{C}^n$ , so dass der Arnoldi-Algorithmus für  $A$  mit Startvektor  $q_1$  in den ersten  $m$  Schritten nicht abbricht, d.h. es gibt  $Q_m = [q_1, \dots, q_m] \in \mathbb{C}^{n \times m}$  isometrisch und eine Hessenbergmatrix  $H_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , so dass

$$AQ_m = Q_m H_m + h_{m+1,m} q_{m+1} e_m^T \quad \text{mit } h_{m+1,m} \neq 0.$$

Zeige: Das charakteristische Polynom  $p_m$  von  $H_m$  ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom vom Grad kleiner gleich  $m$ , so dass

$$\|p_m(A)q_1\| = \min \{ \|p(A)q_1\| : p \in \Pi_m, p \text{ normiert} \}.$$

(Hinweis: Beobachte, dass  $p(A)q_1 = A^m q_1 - Q_m y$  für  $y \in \mathbb{C}^m$ , d.h.  $p(A)q_1$  ist der Abstand von  $A^m q_1$  zum Punkt  $Q_m y$  im Unterraum  $\mathcal{K}_m(A, q_1)$ . Was bedeutet die Minimalitätsaussage geometrisch? Ferner könnte Aufgabe 21b) bei der Lösung der Aufgabe weiterhelfen.)

### Aufgabe 23 Jacobi-Davidson und Arnoldi

Zeige: Löst man im Jacobi-Davidson-Algorithmus die Jacobi-Korrektor-Gleichung

$$P(A - \mu I)Pz = -r, \quad z \perp r$$

mit Hilfe der Approximation  $P(A - \mu I)P = I$ , so ist der entstehende Algorithmus formal äquivalent zum Arnoldi-Algorithmus, d.h. für die durch den Algorithmus erzeugten Vektoren  $q_1, \dots, q_m$  bei  $m$  Schritten ohne Abbruch gilt:

$$\mathcal{K}_p(A, q_1) = \text{Span}(q_1, \dots, q_p) \quad \text{für } p = 1, \dots, m.$$