Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 10. November 2004

Numerische Lineare Algebra

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 24.11.2004

Aufgabe 12 (Charakterisierung extremer Eigenwerte bei symmetrischen Matrizen)

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, wobei $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeige:

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad \text{und} \quad \lambda_n = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Aufgabe 13 (Zusammenhang zwischen Krylovräumen und dem Minimalpolynom)

Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ und sei $P(t) = t^m + \alpha_{m-1} t^{m-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$ das Minimalpolynom von x bzgl. A, d.h. das normierte Polynom kleinsten Grades m mit

$$P(A)x = A^m x + \alpha_{m-1} A^{m-1} x + \cdots + \alpha_1 A x + \alpha_0 x = 0.$$

Zeige:

a) $\dim \mathcal{K}_p(A, x) = p \iff p \leq m$.

b) $\mathcal{K}_m(A, x)$ ist A-invariant.

c) $\mathcal{K}_p(A, x) = \mathcal{K}_m(A, x)$ für alle $p \geq m$.

Aufgabe 14 (Zusammenhang zwischen Krylovräumen und Hessenbergmatrizen I)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $g_1 \in \mathbb{C}^n$, so dass $g_1, Ag_1, \ldots, A^{m-1} g_1$ linear unabhängig sind. Ferner sei $G = [g_1, g_2, \ldots, g_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nichtsingulär und

$$B = G^{-1} A G = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

bzw. $A[g_1, \ldots, g_n] = [g_1, \ldots, g_n] B$. Zeige:

a) Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$b_{jk} = 0 \text{ für } j = k+2, \ldots, n \iff A g_k \in \operatorname{Span}(g_1, \ldots, g_k)$$

b) $b_{jk} = 0$ für $k = 1, \ldots, m$ und $j = k+2, \ldots, n$
$\iff \operatorname{Span}(g_1, \ldots, g_p) = \mathcal{K}_p(A, g_1)$ für $p = 1, \ldots, m$.

Aufgabe 15 (Zusammenhang zwischen Krylovräumen und Hessenbergmatrizen II)

Ist in Aufgabe 14 $m = n$ und $\operatorname{Span}(g_1, \ldots, g_p) = \mathcal{K}_p(A, g_1)$ für $p = 1, \ldots, n$, so ist B nach 14b) insbesondere eine Hessenbergmatrix. Zeige, dass B dann unreduziert sein muss.