**Technische Universität Chemnitz** Wintersemester 2004/05
**Fakultät für Mathematik**
C. Mehl 3. November 2004

# Numerische Lineare Algebra

**3. Übungsblatt zur Vorlesung**

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 10.11.2004

**Aufgabe 9 (Auschlussbedingung bei simultaner Unterraumiteration)**

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wobei $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Ferner sei $\mathcal{V}$ der invariante Unterraum assoziiert mit den Eigenwerten $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$.

a) Es sei

$$\mathcal{V} = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix}\right), \quad W = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad Z_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}, Z_2 \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m}.$$

Zeige:

$$\mathcal{R}(W) \cap \mathcal{V} = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad Z_1 \text{ ist nichtsingulär.}$$

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unreduzierte Hessenbergmatrix. Zeige $\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_m) \cap \mathcal{V} = \{0\}$. Was bedeutet diese Eigenschaft für den $QR$-Algorithmus mit Hessenbergreduktion?

**Aufgabe 10 (Householder-Transformationen)**

Zu $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $P = I - \frac{2}{v^Tv}vv^T$.

a) Zeige: $P$ ist symmetrisch und orthogonal.

b) Zu $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ suchen wir $v$, so dass $Px$ ein Vielfaches des Einheitsvektors ist. Zeige: der Ansatz $v = x + \alpha e_1$ liefert

$$v = x \pm \|x\|e_1 \quad \text{und} \quad Px = \mp\|x\|e_1.$$

c) Zu gegebenen $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ schreibe einen Algorithmus, der das Produkt $PB$ in $4nm$ flops berechnet.

d) Zeige: $P$ spiegelt einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ and der Hyperebene $\mathrm{Span}(v)^\perp$, also an der Hyperebene mit Normalenvektor $v$.

**Aufgabe 11 (Implizites $Q$-Theorem)**

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und seien $Q = [q_1, \dots, q_n]$, $U = [u_1, \dots, u_n]$ unitär, so dass $H = Q^*AQ = (h_{ij})$ und $G = U^*AU = (g_{ij})$ in Hessenbergform sind. Zeige: Falls $q_1 = u_1$ und falls $H$ unreduziert ist, so gilt

$$q_j = z_ju_j \text{ mit } |z_j| = 1 \quad \text{und} \quad |h_{j,j-1}| = |g_{j,j-1}|, \quad j = 2, \dots n.$$

(D.h. die Spalten der Matrix $Q$, die $A$ auf Hessenbergform bringt sind bis auf Multiplikation mit Konstanten vom Betrag Eins eindeutig bestimmt, sobald die erste Spalte von $Q$ festgelegt ist.)