

Numerische Lineare Algebra

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 10.11.2004

Aufgabe 9 (Ausschlussbedingung bei simultaner Unterraumiteration)

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wobei $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Ferner sei \mathcal{V} der invariante Unterraum assoziiert mit den Eigenwerten $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$.

a) Es sei

$$\mathcal{V} = \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \right), \quad W = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad Z_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}, Z_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}.$$

Zeige:

$$\mathcal{R}(W) \cap \mathcal{V} = \{0\} \iff Z_1 \text{ ist nichtsingulär.}$$

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine unreduzierte Hessenbergmatrix. Zeige $\text{Span}(e_1, \dots, e_m) \cap \mathcal{V} = \{0\}$. Was bedeutet diese Eigenschaft für den QR -Algorithmus mit Hessenbergreduktion?

Aufgabe 10 (Householder-Transformationen)

Zu $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$.

a) Zeige: P ist symmetrisch und orthogonal.

b) Zu $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ suchen wir v , so dass Px ein Vielfaches des Einheitsvektors ist. Zeige: der Ansatz $v = x + \alpha e_1$ liefert

$$v = x \pm \|x\| e_1 \quad \text{und} \quad Px = \mp \|x\| e_1.$$

c) Zu gegebenen $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ schreibe einen Algorithmus, der das Produkt PB in $4nm$ flops berechnet.

d) Zeige: P spiegelt einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ an der Hyperebene $\text{Span}(v)^\perp$, also an der Hyperebene mit Normalenvektor v .

Aufgabe 11 (Implizites Q -Theorem)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und seien $Q = [q_1, \dots, q_n]$, $U = [u_1, \dots, u_n]$ unitär, so dass $H = Q^* A Q = (h_{ij})$ und $G = U^* A U = (g_{ij})$ in Hessenbergform sind. Zeige: Falls $q_1 = u_1$ und falls H unreduziert ist, so gilt

$$q_j = z_j u_j \text{ mit } |z_j| = 1 \quad \text{und} \quad |h_{j,j-1}| = |g_{j,j-1}|, \quad j = 2, \dots, n.$$

(D.h. die Spalten der Matrix Q , die A auf Hessenbergform bringt sind bis auf Multiplikation mit Konstanten vom Betrag Eins eindeutig bestimmt, sobald die erste Spalte von Q festgelegt ist.)