Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 27. Oktober 2004

Numerische Lineare Algebra

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 3.11.2004

Aufgabe 5 (Abstand von Unterräumen)

Seien $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}^n$ nichttriviale k-dimensionale Unterräume.

a) Zeige $d(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = d(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{T}^\perp)$.

b) Sei $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nichtsingulär. Zeige $d(V^{-1}\mathcal{S}, V^{-1}\mathcal{T}) \leq \kappa(V) d(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Aufgabe 6 (Rayleigh-Quotient-Iteration I)

Sei $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\lambda_1 > \lambda_2$ und (x_j) mit $x_j = (c_j,\ s_j) \in \mathbb{R}^2$, $\|x_j\| = 1$ die Folge, die bei gegebenen $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|x_0\| = 1$, durch die Rayleigh-Quotient-Iteration erzeugt wird. Berechne c_{j+1} und s_{j+1} und folgere, dass (x_j) fast immer kubisch gegen den ersten oder zweiten Einheitsvektor e_1 bzw. e_2 konvergiert.

Aufgabe 7 (Rayleigh-Quotient-Iteration II)

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $q \in \mathbb{R}^n$ sei

$$r(q) = \frac{q^T A q}{q^T q}$$

wie üblich der Rayleigh-Quotient. Zeige

$$\operatorname{grad} r(q) = \frac{2}{q^T q}\Big(Aq - r(q)q\Big).$$

Folgere hiermit, dass für einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ von A gilt:

$$|r(q) - r(v)| = \mathcal{O}\Big(\|q - v\|^2\Big) \quad \text{für } q \to v$$

Das bedeutet, dass der Rayleigh-Quotient eine quadratisch genaue Näherung eines Eigenwerts liefert. Folgere damit, dass wenn die für den Startvektor q_0 durch die Rayleigh-Quotient-Iteration erzeugte Folge (q_j) konvergiert, diese Konvergenz zum Schluss kubisch ist, d.h. dass gilt:

$$\|q_{k+1} - (\pm v)\| = \mathcal{O}\Big(\|q_k - (\pm v)\|^3\Big) \quad \text{für } k \to \infty.$$

(Achtung: Damit ist noch nicht gezeigt, dass RQI für symmetrische Matrizen fast immer konvergiert, sondern nur, dass wenn das Verfahren konvergiert, die Konvergenz zum Schluss kubisch ist.)

Aufgabe 8 (Experimente mit der Potenzmethode)

Schreibe ein MATLAB-Skript `p1.m`, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einen Vektor $q_j \in \mathbb{C}^n$ einen Schritt der Potenzmethode ausführt und q_{j+1} und α_{j+1} gemäß der Vorlesung berechnet.

1. Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Wende die Potenzmethode auf A an mit dem Startvektor q_0. Führe wenigstens 10 Iterationen aus.

2. Berechne den dominanten Eigenvektor v mit `[V,D]=eig(A)` und skaliere ihn so, dass du ihn mit q_j vergleichen kannst. Berechne $|\lambda_2/\lambda_1|$ und vergleiche diesen Wert mit
$$\frac{\|q_{j+1} - v\|}{\|q_j - v\|}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

3. Wiederhole 1) und 2) jeweils mit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Was ist jeweils anders? Warum? Bei B vergleiche $|\lambda_2/\lambda_1|$ auch mit
$$\sqrt[j]{\frac{\|q_{j+1} - v\|}{\|q_0 - v\|}}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$