Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 25.1.2005

Numerische Lineare Algebra

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 1.2.2005

Aufgabe 42 Hermitesche Linearisierungen

Gegeben sei das Matrixpolynom $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$, wobei M, C, K Hermitesch sind, sowie M invertierbar und K singulär. Finde eine (einfache) Hermitesche Linearisierung von $P(\lambda)$.

Aufgabe 43 Eigenwertberechnung

Berechne die Eigenwerte des Hermiteschen Büschels

$$\lambda E - A := \lambda \begin{bmatrix} 81 & 59 \\ 59 & 43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 220 & 163 \\ 163 & 116 \end{bmatrix}.$$

Gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass P^*EP und P^*AP diagonal sind?

Aufgabe 44 Ein spezielles verallgemeinertes Hermitesches Eigenwertproblem

Gegeben sei das Hermitesche Matrixbüschel

$$\lambda \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $B_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch positiv definit sind, sowie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Führe das verallgemeinerte Eigenwertproblem mit obigem Büschel auf ein Singulärwertproblem mit einer $m \times n$ Matrix zurück.

Aufgabe 45 Diagonalisierbarkeit von Hermiteschen Büscheln

Sei $\lambda G - H$ ein Matrixbüschel mit Hermiteschen Matrizen $G, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, dass es genau dann eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass U^*GU und U^*HU beide diagonal sind, wenn G und H kommutieren (d.h. $GH = HG$).

Aufgabe 46 Satz von Frobenius

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige:

a) Falls A, B ähnlich sind über $\mathbb{C}$, so auch über $\mathbb{R}$. (D.h., falls $A = S^{-1}BS$ für eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann gibt es $S_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $A = S_r^{-1}BS_r$.)

b) Es gibt symmetrische Matrizen $G, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, G invertierbar mit $A = GH$.