

## Numerische Lineare Algebra

### 11. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 1.2.2005

#### Aufgabe 42 Hermitesche Linearisierungen

Gegeben sei das Matrixpolynom  $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ , wobei  $M, C, K$  Hermitesch sind, sowie  $M$  invertierbar und  $K$  singulär. Finde eine (einfache) Hermitesche Linearisierung von  $P(\lambda)$ .

#### Aufgabe 43 Eigenwertberechnung

Berechne die Eigenwerte des Hermiteschen Büschels

$$\lambda E - A := \lambda \begin{bmatrix} 81 & 59 \\ 59 & 43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 220 & 163 \\ 163 & 116 \end{bmatrix}.$$

Gibt es eine invertierbare Matrix  $P \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , so dass  $P^* E P$  und  $P^* A P$  diagonal sind?

#### Aufgabe 44 Ein spezielles verallgemeinertes Hermitesches Eigenwertproblem

Gegeben sei das Hermitesche Matrixbüschel

$$\lambda \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $B_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $B_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitesch positiv definit sind, sowie  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Führe das verallgemeinerte Eigenwertproblem mit obigem Büschel auf ein Singulärwertproblem mit einer  $m \times n$  Matrix zurück.

#### Aufgabe 45 Diagonalisierbarkeit von Hermiteschen Büscheln

Sei  $\lambda G - H$  ein Matrixbüschel mit Hermiteschen Matrizen  $G, H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Zeige, dass es genau dann eine unitäre Matrix  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gibt, so dass  $U^* G U$  und  $U^* H U$  beide diagonal sind, wenn  $G$  und  $H$  kommutieren (d.h.  $GH = HG$ ).

#### Aufgabe 46 Satz von Frobenius

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zeige:

- Falls  $A, B$  ähnlich sind über  $\mathbb{C}$ , so auch über  $\mathbb{R}$ . (D.h., falls  $A = S^{-1} B S$  für eine invertierbare Matrix  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , dann gibt es  $S_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar mit  $A = S_r^{-1} B S_r$ .)
- Es gibt symmetrische Matrizen  $G, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G$  invertierbar mit  $A = GH$ .