Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 18.1.2005

Numerische Lineare Algebra

10. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 25.1.2005

Aufgabe 37 Invertierbarkeit von Matrixpolynomen mit konstanter Determinante

Sei $E(\lambda)$ ein $n \times n$ Matrixpolynom mit konstanter, von Null verschiedener Determinante. Zeige:

a) $E(\lambda)^{-1}$ existiert und ist ein Matrixpolynom mit konstanter, von Null verschiedener Determinante.

b) $E(\lambda)$ ist ein Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen.

Hinweis: zu a): Betrachte $E(\lambda)$ als Matrix über dem Körper K der rationalen Funktionen in einer Variablen:

$$K = \left\{ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} : p(\lambda), q(\lambda) \text{ Polynome }, q(\lambda) \not\equiv 0 \right\}$$

zu b): Smithform. (Achtung: a) sollte nicht mit Hilfe von Sätzen der Vorlesung bewiesen werden, in deren Beweis die Aussage a) bereits selbst eingeht!)

Aufgabe 38 Smithform und Elementarteiler

Berechne die Smithform und Elementarteiler des Matrixpolynoms

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^4 - \lambda^3 \\ \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 \end{bmatrix}.$$

Berechne auch die Eigenwerte und Eigenvektoren von $P(\lambda)$.

Aufgabe 39 Elementarteiler blockdiagonaler Matrixpolynome

Seien $P_1(\lambda)$ und $P_2(\lambda)$ je ein $m_1 \times n_1$- bzw. $m_2 \times n_2$-Matrixpolynom, sowie

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} P_1(\lambda) & 0 \\ 0 & P_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Zeige: Die Menge der Elementarteiler von $P(\lambda)$ ist die Vereinigung der Menge der Elementarteiler von $P_1(\lambda)$ und $P_2(\lambda)$.

Aufgabe 40 Die Companionform

Zeige, dass die erste Companionform

$$\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & 0 & -I_n \\ A_0 & \cdots & A_{k-2} & A_{k-1} \end{bmatrix}$$

eine Linearisierung des folgenden Matrixpolynoms ist:

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j A_j$$

Aufgabe 41 Polynomdivision mit Matrixpolynomen

Zeige: Ist $P(\lambda)$ ein $n \times n$ Matrixpolynom und $\lambda E - A$ ein $n \times n$ Büschel mit E invertierbar, so gibt es Matrizen $R_r, r_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und Matrixpolynome $Q_r(\lambda), Q_l(\lambda)$, so dass

$$P(\lambda) = Q_r(\lambda)(\lambda E - A) + R_r = (\lambda E - A)Q_l(\lambda) + R_l.$$