**Technische Universität Chemnitz** Wintersemester 2004/05
**Fakultät für Mathematik**
C. Mehl 18.1.2005

# Numerische Lineare Algebra

**10. Übungsblatt zur Vorlesung**

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 25.1.2005

**Aufgabe 37 Invertierbarkeit von Matrixpolynomen mit konstanter Determinante**

Sei $E(\lambda)$ ein $n \times n$ Matrixpolynom mit konstanter, von Null verschiedener Determinante. Zeige:

a) $E(\lambda)^{-1}$ existiert und ist ein Matrixpolynom mit konstanter, von Null verschiedener Determinante.

b) $E(\lambda)$ ist ein Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen.

**Hinweis**: zu a): Betrachte $E(\lambda)$ als Matrix über dem Körper $K$ der rationalen Funktionen in einer Variablen:

$$K = \left\{ \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} : p(\lambda), q(\lambda) \text{ Polynome }, q(\lambda) \not\equiv 0 \right\}$$

zu b): Smithform. (Achtung: a) sollte nicht mit Hilfe von Sätzen der Vorlesung bewiesen werden, in deren Beweis die Aussage a) bereits selbst eingeht!)

**Aufgabe 38 Smithform und Elementarteiler**

Berechne die Smithform und Elementarteiler des Matrixpolynoms

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^4 - \lambda^3 \\ \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 \end{bmatrix}.$$

Berechne auch die Eigenwerte und Eigenvektoren von $P(\lambda)$.

**Aufgabe 39 Elementarteiler blockdiagonaler Matrixpolynome**

Seien $P_1(\lambda)$ und $P_2(\lambda)$ je ein $m_1 \times n_1$- bzw. $m_2 \times n_2$-Matrixpolynom, sowie

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} P_1(\lambda) & 0 \\ 0 & P_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Zeige: Die Menge der Elementarteiler von $P(\lambda)$ ist die Vereinigung der Menge der Elementarteiler von $P_1(\lambda)$ und $P_2(\lambda)$.

**Aufgabe 40 Die Companionform**

Zeige, dass die erste Companionform

$$\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & 0 & -I_n \\ A_0 & \cdots & A_{k-2} & A_{k-1} \end{bmatrix}$$

eine Linearisierung des folgenden Matrixpolynoms ist:

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j A_j$$

**Aufgabe 41 Polynomdivision mit Matrixpolynomen**

Zeige: Ist $P(\lambda)$ ein $n \times n$ Matrixpolynom und $\lambda E - A$ ein $n \times n$ Büschel mit $E$ invertierbar, so gibt es Matrizen $R_r, r_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und Matrixpolynome $Q_r(\lambda), Q_l(\lambda)$, so dass

$$P(\lambda) = Q_r(\lambda)(\lambda E - A) + R_r = (\lambda E - A)Q_l(\lambda) + R_l.$$