Technische Universität Chemnitz Wintersemester 2004/05
Fakultät für Mathematik
C. Mehl 18. Oktober 2004

Numerische Lineare Algebra

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblatts in der Übung am 27.10.2004

Aufgabe 1 (Normale Matrizen)

Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

i) A is normal, d.h. $AA^* = A^*A$.

ii) U^*AU ist normal für eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

iii) Für jede unitäre Matrix U mit $U^*AU = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, $B_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$, gilt $B_{12} = 0$.

iv) Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}^n$ invarianter Unterraum unter A, so auch $\mathcal{S}^\perp$.

v) Sei $H = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und $S = \frac{1}{2}(A - A^*)$. Dann gilt $SH = HS$.

vi) $AA^* - A^*A$ ist semi-definit.

vii) $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

viii) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^* = UA$.

Aufgabe 2 (Kronecker Produkte)

Seien $Y \in \mathbb{C}^{j\times k}$ und $Z \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dann heißt die $mj \times kn$ Matrix

$$Y \otimes Z = \begin{pmatrix} y_{11}Z & y_{12}Z & \dots & y_{1k}Z \\ y_{21}Z & y_{22}Z & \dots & y_{2k}Z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1}Z & y_{j2}Z & \dots & y_{jk}Z \end{pmatrix}$$

das *Kronecker-Produkt* oder *Tensor-Produkt* von Y und Z.

a) Seien W, X, Y, Z Matrizen, so dass die Produkte WX und YZ definiert sind. Zeige $(W \otimes Y)(X \otimes Z) = (WX) \otimes (YZ)$.

b) Seien S, G nichtsinguläre Matrizen. Zeige, dass auch $S \otimes G$ nicht-singulär ist und dass $(S \otimes G)^{-1} = S^{-1} \otimes G^{-1}$.

c) Zeige, wenn A und B, sowie C und D ähnliche Matrizen sind, dann sind auch $A \otimes C$ und $B \otimes D$ ähnlich.

d) Seien $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_m$. Zeige

$$\sigma(A \otimes B) = \{\lambda_i\mu_j \,|\, i = 1, \dots, k;\; j = 1, \dots, m\}.$$

Aufgabe 3 (Sylvester-Gleichung)

Seien $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{m\times k}$. A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Für $X = [x_1\ x_2 \cdots x_k]$ sei $\mathrm{vec}(X) = (x_1^T\ x_2^T \cdots x_k^T)^T \in \mathbb{C}^{mk}$ der Vektor, den man erhält indem man die Spaltenvektoren $x_1, \ldots, x_k$ der Reihe nach untereinander anordnet.

a) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $XA - BX = C$ äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem $Mw = b$ ist, wobei

$$M = A^T \otimes I_m - I_k \otimes B, \quad w = \mathrm{vec}(X), \quad b = \mathrm{vec}(C). \tag{1}$$

(I_p ist die $p \times p$ Einheitsmatrix.)

b) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $XA - BX = C$ genau dann eine eindeutige Lösung hat, falls A und B keine gemeinsamen Eigenwerte haben.

Aufgabe 4 (Kanonische Vektoren)

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ k-dimensionale Unterräume, sowie $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$ kanonische Vektoren. Zeige für $i \neq j$:

$$\langle x_i, y_j \rangle = 0.$$