Mathematik und Schach und Schönheit

Christian Hesse

Das Ministerium für Bildung und Forschung richtet seit dem Jahr 2000 die Wissenschaftsjahre aus. Nach dem Jahr der Geisteswissenschaften 2007 wurde 2008 zum Jahr der Mathematik ausgerufen. Außerdem fanden 2008 in Deutschland sowohl eine Schach-Weltmeisterschaft (erstmals wieder nach 74 Jahren) als auch eine Schach-Olympiade (erstmals wieder nach 48 Jahren) statt. Man kann also 2008 rückblickend auch als das Jahr des Schachs in Deutschland auffassen. Für uns Grund genug, einmal einige Probleme in der Schnittmenge dieser beiden intellektuellen Aktivitäten zu betrachten. Konkret geht es uns darum, einerseits mit mathematischen Denkwerkzeugen Schachprobleme zu lösen und andererseits mit schachlichen Accessoires – nämlich mit Schachbrett und Figuren – mathematische Probleme nicht-schachlicher (!) Art zu lösen, beides vor dem Hintergrund intellektueller Schönheit.

Viele Mathematiker haben sich durch das Schachspiel zu interessanten Fragestellungen inspirieren lassen, und nicht wenige Schachspieler begeistern sich umgekehrt auch für mathematische Rätsel und Probleme. In der Sprache der mathematischen Spieltheorie ist Schach ein Zwei-Personen nicht-zufälliges Nullsummenspiel mit vollständiger Information. Dabei beschreibt der Begriff Nullsummenspiel im Kontext zweier Personen ganz allgemein Konkurrenzsituationen, in denen des einen Vorteil stets des anderen Nachteil ist. So genannte „Win-Win"-Situationen, von denen beide Akteure profitieren, gibt es darin nicht. Der Zusatz „mit vollständiger Information" bedeutet, dass beiden Spielern prinzipiell stets alle möglichen Folgen aller denkbaren Handlungsmöglichkeiten gänzlich bekannt sind. Schon 1912 hat der Mathematiker Ernst Zermelo bewiesen, dass solche Spiele (wie außer Schach z. B. noch Mühle, Dame, Tic-Tac-Toe) determiniert sind. Damit ist gemeint, dass eine der folgenden drei Aussagen wahr ist:

A: Weiß besitzt eine Strategie, die den Sieg garantiert.
B: Weiß besitzt eine Strategie, die mindestens ein Remis garantiert, aber keine Strategie wie in A.
C: Schwarz besitzt eine Strategie, die den Sieg garantiert.

Wegen der über-astronomisch hohen Zahl möglicher Zugfolgen ist es offen, ob Aussage A oder B oder C auf das Schach zutrifft. G. H. Hardy hat geschätzt, dass es $10^{10^{50}}$ (also 10 hoch 10 hoch 50) verschiedene Spielverläufe gibt. Eine unfassbare Zahl, selbst noch im Vergleich mit den geschätzten „nur" 10^{80} für die Anzahl der Teilchen im Universum. Zermelos Resultat ist ein reines Existenzresultat. Es beweist die Existenz einer Strategie, die entweder A oder B oder C zu einer wahren Aussage macht, gibt aber nicht an, wie diese Strategie konkret aussieht und welche der drei konkurrierenden Aussagen richtig ist.

Prinzipiell kann man durch die mathematische Methode der rückschreitenden Induktion diese Strategie für perfektes Spiel im Schach konstruieren. Ausgangspunkt ist dabei eine Datenbank mit allen Positionen, in denen Schwarz matt ist. Daraus wird eine Teildatenbank mit allen Positionen erzeugt, in denen Weiß einzügig matt setzen kann, dann eine Teildatenbank mit Positionen, in denen Schwarz am Zug das Mattsetzen des Weißen im nächsten Zug nicht verhindern kann, anschließend eine Teildatenbank mit Positionen, aus denen Weiß immer eine Stellung erreichen kann, in der Schwarz am Zuge das Mattsetzen des Weißen im nächsten Zug nicht verhindern kann.

Dieser Prozeß wird stufenweise fortgesetzt: Bei jedem Schritt entfernt man sich einen Halbzug weiter vom Matt bis hin zu Positionen mit allen 32 Figuren und Weiß am Zug. Danach wird die Menge W all dieser 32-Steiner durch den kürzesten Pfad in der konstruierten Folge von Teildatenbanken mit einer Mattstellung verbunden. Jeweils ausgehend von einem dieser 32-Steiner zeigt der zugehörige Pfad die Züge für beiderseits perfektes Spiel: Wenn Weiß am Zug ist, so gibt es keine Alternative, die schneller zum Matt führt. Wenn Schwarz am Zug ist, so gibt es keine andere Verteidigung, die das Matt länger hinauszögert. Die Menge W umfaßt alle Positionen mit 32 Figuren, in denen Weiß am Zuge zwingend gewinnen kann.

Nun kann man Analoges auch aus der Sicht von Schwarz durchführen, beginnend mit der Datenbank aller möglichen Stellungen, in denen Weiß matt ist. Schließlich erhält man so die Menge S aller 32-Steiner, in denen, mit Weiß am Zuge, Schwarz zwingend gewinnen kann. Alle übrigen 32-Steiner, also alle außer jenen in den Mengen W und S, führen bei bestem Spiel beider Seiten zum Remis. Diese Menge der Remispositionen sei mit R bezeichnet. Dann kommt es darauf an, in welcher dieser drei Mengen die Anfangsstellung im Schach liegt, in W oder R oder S. Davon hängt es ab, ob die Aussage A oder B oder C auf das Schachspiel zutrifft. Doch der Spielbaum beim Schach ist so groß, dass selbst die leistungsfähigsten Computer ihn nicht bewältigen können. Bei Mühle, Dame und Tic-Tac-Toe ist das anders; diese Spiele sind inzwischen ausanalysiert. Alle drei führen bei bestem Spiel beider Seiten zu einem Unentschieden.

Schach und Mathematik besitzen eine ganze Reihe struktureller und anderer Ähnlichkeiten. Schach ist ebenso abstrakt wie Mathematik. Nur zur vereinfachten Darstel-

MDMV 17 / 2009 | 156–161

lung spielt man es mit Figuren auf einem Brett. Doch letztlich muss man sich nur 64 aufeinander bezogene Raumpunkte und die Wirkung von Kraftfeldern auf diesen Raumpunkten vorstellen, denn die Figuren sind nur Verkörperungen von Kräften, und diese benötigen kein physisch ausgedehntes Standfeld.

Schach unterliegt Regeln. Diese sind willkürlich und von Menschen geschaffen, ebenso wie die Axiome in der Mathematik. Sie legen fest, was es bedeutet, Schach zu spielen oder Mathematik zu treiben.

Beim Schach sind Figurenmuster – ihre Erkennung, Analyse und Bewertung - von entscheidender Bedeutung. Die Mathematik andererseits ist nach einer möglichen Definition die Wissenschaft von den Mustern. Eines der ältesten Teilgebiete, die Geometrie, studiert Muster von Punktmengen in Ebene und Raum. Die nicht anspruchslose intellektuelle Provinz der Zahlentheorie jongliert mit Mustern in den ganzen Zahlen. Die moderne Domäne der Stochastik untersucht Muster in Zufallsvorgängen.

Und nicht zuletzt und hier vor allem: Mathematik und Schach sind beides Quellen stark empfundener Schönheit. Das Empfinden von etwas Schönem ist fundamental mit dem Gefühl des Wohlgefallens verbunden. Als Grundvoraussetzung für ein ästhetisches Erlebnis benötigt man mithin etwas, das die Sinne, das Herz oder den Verstand in positiver Weise berührt: ein formvollendetes Bauwerk, eine betörende Symphonie, einen farbenprächtigen Sonnenuntergang, ein sympathisches Gesicht, eine ausgefeilte Gedankenkonstruktion.

Es ist vergleichsweise leicht, Schönheit über die Sinne zu erfahren. Um dagegen intellektuelle Schönheit zu spüren, bedarf es als Grundvoraussetzung einer Schulung des Geistes. Das betrifft Schach und Mathematik gleichermaßen. Doch die intellektuell empfundene Schönheit ist nicht weniger intensiv als die sinnlich empfundene. Und um an diese letzte Aussage sogleich anzuknüpfen: Ein wichtiger Grund, sich mit Mathematik und Schach zu befassen, liegt in der dabei erlebbaren Schönheit.

Was die Ästhetik der Mathematik betrifft: Die nahtlose Passform, mit der ein Ensemble von Einzelüberlegungen und kleinen Gedankensplittern sich zu einer stringenten Argumentationslinie formiert, wie sie ähnlich der Rädchen eines Uhrwerks ineinander greifen und das größere Ganze eines geglückten mathematischen Beweises liefern, hat etwas ungemein Elegantes, Harmonisches und schlichtweg Schönes. Die gelungensten Ausprägungen dieses Genres lösen bisweilen wahre Feuerwerke auf der Großhirnrinde aus. Die Ästhetik der Mathematik steckt in der Ausstrahlung geistreich verknüpfter Ideen. Mathematik ist „Ideologie“, die Lehre von den Ideen. Der Bestseller-Autor Simon Singh nennt sie „the sexiest discipline on the planet“. Und die Mathematiker sind die Ingenieure in dieser wunderbaren Welt der Ideen.

Korolkow, 1957. Wer setzt in einem Zug Matt?

Mathematische Denkwerkzeuge bei Schachproblemen

Mathematische Methoden sind umfassend einsetzbar, auch im Schach. Wir betrachten einmal obiges Beispiel, das auf eindrucksvolle Weise die Wirksamkeit und Schönheit auch einfacher mathematischer Ideen bei der Lösung von Schachproblemen demonstriert.

Die Problemstellung ist klar, doch eine Antwort scheint unmöglich. Wäre Weiß am Zug, so könnte er mit 1. Sxc7 Matt setzen. Mit Schwarz am Zug wäre 1 … Sxc2 Matt. Die Fragestellung läuft also darauf hinaus zu ermitteln, wer in obiger Stellung am Zug ist. Doch wie soll dies allein aus der Diagrammstellung heraus entschieden werden? Immerhin können die Springer, Türme und Könige beider Seiten eine beliebige Anzahl von Zügen ausgeführt haben und scheinbar kann deshalb sowohl Weiß als auch Schwarz jetzt am Zug sein. Dem ist aber bei genauerer Analyse mit höherer Feineinstellung nicht so. Die Antwort basiert auf dem einfachen Konzept der *Parität*. Der Ausdruck Parität wird in der Mathematik verwendet, um bei Zahlen zwischen gerade und ungerade zu unterscheiden. Wenn zwei ganze Zahlen beide gerade oder beide ungerade sind, so haben sie dieselbe Parität. Wenn eine gerade und die andere ungerade ist, so haben sie unterschiedliche Parität. Es gibt viele geniale Überlegungen, die auf einfachen Paritätsbetrachtungen beruhen.

Die Lösung des obigen Schachproblems ist bei Verwendung des Paritätsprinzips als Werkzeug tatsächlich recht einfach und gleichzeitig ausgesprochen elegant: Ein Springer wechselt bei jedem Zug die Farbe seines Standfeldes. Anfangs stehen die beiden Springer eines Teams auf Feldern verschiedener Farbe. Im obigen Diagramm aber stehen die beiden weißen Springer auf Feldern gleicher Farbe und haben deshalb insgesamt eine ungerade Zahl von Zügen ausgeführt. Wie viele Züge das sind ist unbekannt, aber es ist eine ungerade Zahl. Die beiden weißen Türme und der weiße König zusammen haben eine gerade Zahl von Zügen absolviert, außerdem ist exakt ein weißer Bauernzug geschehen. Alle anderen weißen Figuren haben nicht gezogen. Also ist eine gerade Zahl von weißen Zügen geschehen. Mit ähnlichem Argument zeigt man, dass die Anzahl der schwarzen Züge ungeradzahlig ist. Mehr Information brauchen wir nicht. Da Weiß begonnen hat, ist also Schwarz am Zug und kann mit 1... Sxc2 Matt setzen.

Der berühmteste Mathematiker unter den Schachspielern (und umgekehrt) war wohl der Niederländer Max Euwe (1901–1981), Schachweltmeister von 1935–37 und ab 1954 Professor für Mathematik.

Zu Euwes Zeiten wurden seitens des Weltschachbundes mehrere Regeln diskutiert, welche die Beendigung einer jeden Schachpartie in endlich vielen Zügen erzwingen sollten. Eine dieser Regeln lautete wie folgt: „Eine Schachpartie endet Remis, wenn dieselbe Folge von Zügen, mit allen Figuren auf genau denselben Feldern, dreimal hintereinander vorkommt.“ Es ist dabei ganz gleichgültig, aus wie vielen Zügen diese Zugfolge besteht. Konkret fragte sich Euwe gegen Ende der 1920er Jahre, ob diese Regel Schach zu einem Spiel macht, das nach einer endlichen Anzahl von Zügen zwingend beendet ist.

Umgekehrt: Gibt es unendliche, sinnlose Partien, bei denen sie nicht anwendbar ist? Ist es möglich, dass ein Schachspiel ewig weitergeht, ohne dass irgendeine – beliebig lange – Folge von Zügen dreimal in unmittelbarer Folge vorkommt?

In seiner Abhandlung *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel,* Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 32, 633–642 (1929), beantwortet Euwe diese Frage mit Ja.

Euwe hat dazu eine Partie konstruiert, die auf einer bekannten Zahlenfolge basiert, der Thue-Morse-Folge. Sie besteht nur aus Nullen und Einsen. Mit folgendem Rezept kann sie leicht konstruiert werden: Beginne mit einer 0. Hänge dann immer an das schon vorhandene Teilstück der Folge die komplementäre Sequenz an. Das ist die Sequenz, bei der 0 und 1 vertauscht sind. Das Anfangsstück der Folge ist also 0110100110010110...

Formal kann man die Thue-Morse-Folge (a_n) schreiben als $a_0 = 0$ und für alle natürlichen Zahlen k dann $a_{2k} = a_k$ sowie $a_{2k+1} = a_k*$, wobei für ein Folgenglied x das Glied $x* = 1 - x$ das binäre Komplement zu x bezeichnet. Sind die ersten 2^k Folgenglieder gebildet, so erhält man mit dieser Rekursionsformel die nächsten 2^k also insgesamt 2^{k+1} Glieder. Zwei Aussagen sind offensichtlich:

Tatsache 1: Die Folge besteht nur aus Viererblöcken, die entweder die Form 0110 oder 1001 haben.

Tatsache 2: Die Folge verändert sich wegen $a_{2k} = a_k$ nicht, wenn man jedes Folgenglied mit ungeradem Index streicht:

$$0\ \cancel{1}\ 1\ \cancel{0}\ 1\ \cancel{0}\ 0\ \cancel{1}\ 1\ \cancel{0}\ 0\ \cancel{1}\ 0\ \cancel{1}\ 1\ \cancel{0}\ 1\ \cancel{0}\ 0\ \cancel{1}\ 0\ \cancel{1}\ 1\ \cancel{0}\ 0\ \cancel{1}\ 1\ \cancel{0}\ 1\ \cancel{0}\ 0\ \cancel{1}$$
$$0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0$$

Euwe konnte nun beweisen, dass die Thue-Morse-Folge *tripelfrei* ist. Damit ist gemeint, dass es keinen Abschnitt in der Folge gibt, der dreimal hintereinander auftritt. Das geht so:

Wir nehmen an, die Folge sei nicht tripelfrei. Es gibt also einen Folgenabschnitt von m Folgengliedern (einen m-Abschnitt), der dreimal hintereinander auftritt. Wir zeigen, dass dies aber für kein natürliches m sein kann.

Für $m = 1$ würde dies 3-Abschnitte der Form 000 oder 111 erfordern, was Tatsache 1 widerspricht. Daraus leitet man sofort auch die Unmöglichkeit für $m = 2$ ab, denn wegen Tatsache 2 würde das Auftreten dreier gleicher 2-Abschnitte direkt hintereinander dasselbe auch für drei gleiche 1-Abschnitte nach sich ziehen.

Für $m = 3$ sei xyz ein 3-Abschnitt. Für das Aussehen von drei aufeinanderfolgenden dieser 3-Abschnitte gibt es nach gegenwärtigem Stand unserer Diskussion die sechs Möglichkeiten: 100100100 oder 010010010 oder 001001001 oder 110110110 oder 101101101 oder 011011011. Alle diese Segmente sind wegen Tatsache 1 aber unmöglich.

Der Fall $m = 4$ ist wegen Tatsache 2 ebenfalls unmöglich, denn das Auftreten dreier 4-Abschnitte hintereinander würde das Auftreten dreier 2-Abschnitte nach sich ziehen, was wir bereits ausgeschlossen haben.

Bleiben noch die Fälle $m > 4$. Davon kann man die ungeraden m so ausschließen: Der m-Abschnitt muß wegen Tatsache 1 ein Paar 11 oder ein Paar 00 enthalten und das erste Glied eines jeden Paares muss stets einen ungeraden Index haben. Wäre m aber ungerade, so würde bei der ersten Wiederholung des m-Abschnittes das erste Glied des Paares bei einem geraden Index liegen. Auf alle geraden m kann man die Argumentation wie bei $m = 2$ und $m = 4$ anwenden, bis man durch diese Reduktion auf ein ungerades m oder ein $m < 5$ kommt. QED.

Was hat die Thue-Morse-Folge mit Schach und der Möglichkeit unendlicher Partien zu tun? Euwe konstruierte aus dieser Folge eine Schachpartie durch die einfache Vorschrift:

Ersetze jede 0 durch die Zugfolge Sb1–c3 Sb8–c6 Sc3–b1 Sc6–b8.
Ersetze jede 1 durch die Zugfolge Sg1–f3 Sg8–f6 Sf3–g1 Sf6–g8.

Dann entspricht der Thue-Morse-Folge die unendliche, inhaltsarme Partie 1. Sc3 Sc6 2. Sb1 Sb8 3. Sf3 Sf6 4. Sg1 Sg8 5. Sf3 Sf6 6. Sg1 Sg8 ...

Wegen der Tripelfreiheit der Zahlenfolge gibt es keine noch so kurze oder lange Zugfolge, die sich dreimal unmittelbar wiederholt. Die angedachte Regel erlaubt also bei dieser „Partie“ keine Remisreklamation. Euwes Analyse veranlasste den Weltschachbund denn auch, diese Regel nicht einzuführen.

Mathematik mit Schachbrett und Figuren

„Geht Dir in der Bar das Geld aus? … Lass Deinen Freund bezahlen!“ schreibt Greg Gutfeld in der Zeitschrift *Men’s Health*:

> Lass ihn zwei Kartenspiele mischen und nebeneinander legen. Erkläre, dass Du gleichzeitig immer je eine Karte von jedem Stapel von oben nehmen wirst. Und wette darauf, dass irgendwann ein Paar identischer Karten erscheinen wird.

Intuitiv scheint es recht unwahrscheinlich zu sein, dass in zwei gemischten Kartenspielen identische Karten in identischen Positionen auftreten. Aber die Intuition kann täuschen. Ist es wirklich unwahrscheinlich?

Zwecks Arbeitserleichterung gehen wir zu einer anderen aber äquivalenten Art der Darstellung über. Dazu schreiben wir die Zahlen $1, 2, \ldots, 52$ in dieser Reihenfolge nebeneinander. Dann notieren wir eine rein zufällige Verwürfelung, also Permutation, der Zahlen 1 bis 52 in die Reihe direkt darunter, generiert etwa durch wiederholtes Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne. Wie wahrscheinlich ist es, zwei gleiche Zahlen in derselben Position in den beiden Reihen anzutreffen? Dies ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines Fixpunktes bei einer Zufalls-Permutation.

Anders gewendet fällt die Aufgabenstellung in den Kontext von Problemen, die nach der Anzahl von Permutationen mit verbotenen Positionen fragen.

Eine anderes Beispiel für diesen Problemtyp ist das folgende:

In einem Institut gibt es vier Dozenten und vier zu haltende Vorlesungen. Die Dozenten haben Spezialisierungen und Vorlieben, können deshalb bestimmte Vorlesungen halten (+) bzw. nicht halten (–).

	Vorlesung			
Dozent	Algebra	Geometrie	Stochastik	Topologie
Adler	+	+	–	–
Bauer	–	–	+	+
Conrad	–	+	+	+
Dorfmann	+	+	+	–

Jeder Dozent muss genau eine Vorlesung anbieten, und jede Vorlesung muss genau einmal angeboten werden. Auf wie viele verschiedene Arten können die Dozenten den Vorlesungen zugeordnet werden?

Jede mögliche Zuweisung der Dozenten zu Vorlesungen bedeutet die Auswahl genau eines Symbols + aus jeder Zeile und jeder Spalte. Dies kann in eine Sprache des Schachs übersetzt werden. Ein Turm beim Schach greift ja bekanntlich eine Figur an, die in derselben Reihe oder derselben Spalte wie der Turm steht. Die Zuordnung von Dozenten zu Vorlesungen ist deshalb gleichbedeutend mit der Platzierung von vier sich nicht angreifenden Türmen auf die nicht durchgestrichenen Felder des folgenden 4×4-Schachbretts:

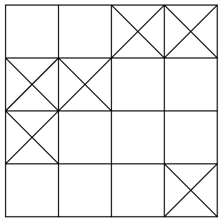

Abbildung 1. *4×4-Schachbrett mit verbotenem Bereich*

Die durchgestrichenen Felder zusammengenommen seien mit V bezeichnet und bilden den verbotenen Bereich. Es ist eine Teilmenge von Feldern des nxn-Schachbretts S. Auch jede Permutation f von n Zahlen ist auf einem nxn-Schachbrett darstellbar: Die Spalten bezeichnen etwa $i = 1, 2, \ldots, n$ und die Reihen bezeichnen die $f(i), i = 1, 2, \ldots, n$. Jede Permutation entspricht dann einer teilweisen Färbung des Schachbrettes, bei der in jeder Reihe und jeder Spalte genau ein Feld $(i, f(i))$ gefärbt ist. Wir nennen die Menge der gefärbten Felder das *Muster* der Permutation f. Analog kann man sagen: Jede Permutation entspricht der Platzierung von n sich nicht angreifenden Türmen auf einem nxn-Schachbrett.

Sei nun N_j die Anzahl der Permutationen, bei denen exakt j der Einträge $(i, f(i)), i = 1, 2, \ldots, n$, in den verbotenen Bereich V fallen. Das ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, n sich nicht angreifende Türme so auf das Schachbrett S mit verbotenem Bereich V zu stellen, dass genau j auf den in V enthaltenen Feldern stehen. Sei ferner $t_k(S)$ oder kurz t_k die Anzahl der Möglichkeiten, k sich nicht angreifende Türme auf das Schachbrett S zu stellen, so dass alle im verbotenen Bereich V stehen. Nach diesen Festsetzungen definieren wir nun das *Polynom*

$$N_n(x) = N_0 + N_1 x^1 + N_2 x^2 + \cdots + N_n x^n$$

Wir sind auf der Suche nach dem Wert des Koeffizienten N_0, der Anzahl verschiedener Permutationen ohne verbotene Positionen. Das ist der Wert des Polynoms $N_n(x)$ ausgewertet an der Stelle 0. Dieses Polynom gehorcht der folgenden Beziehung:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} t_k (n-k)!(x-1)^k$$

Als Begründung mag diese Überlegung dienen: Sei m_k die Anzahl der Paare (f, B), wobei f eine Permutation und B eine aus k Feldern bestehende Teilmenge des Musters von f geschnitten mit dem verbotenen Bereich V bezeichnet. Man kann die Zahlen m_k auf zwei verschiedene Arten ermitteln:

1. Für jedes j kann man die Permutation f auf N_j Arten so wählen, dass j Einträge in die Menge V fallen, und anschließend gibt es $\binom{j}{k}$ Möglichkeiten, die Teilmenge B festzulegen. Damit ist
$$m_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} N_j$$
2. Es gibt t_k Möglichkeiten, die Teilmenge B zu wählen und anschließend jeweils $(n-k)!$ Möglichkeiten, jedes B zu einer Permutation f zu erweitern. Damit ist
$$m_k = t_k(n-k)!$$

Beides zusammen genommen ergibt
$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} N_j = t_k(n-k)!$$
und mit Summation über k gelangen wir zu
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} N_j y^k = \sum_{k=0}^{n} t_k(n-k)! y^k$$
Die linke Seite dieser Beziehung lässt sich aber leicht weiterverarbeiten zu
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} N_j y^k &= \sum_{j=0}^{n} N_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} y^k \\ &= \sum_{j=0}^{n} N_j (y+1)^j \\ &= N_n(y+1)\end{aligned}$$
Setzt man darin $y = x - 1$, so erhält man das Gewünschte
$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} t_k(n-k)!(x-1)^k$$
Diese Gleichung erfüllt ein Übersoll. Alles, was wir benötigen ist:
$$N_0 = N_n(0) = \sum_{k=0}^{n} t_k(n-k)!(-1)^k$$
und dies ist die gesuchte Anzahl der Permutationen ohne verbotene Einträge.

Der Vorteil dieses Zugangs besteht darin, dass die Zahlen N_j einschließlich N_0 in der Regel ausgesprochen schwer zugänglich sind, die Zahlen t_k dagegen leicht über ihr Polynom ermittelt werden können: Für ein gegebenes Schachbrett S mit verbotenem Bereich definieren wir mit den Zahlen t_k = t_k(S) (den verschiedenen Möglichkeiten, k sich nicht angreifende Türme auf die Felder von S so zu platzieren, dass alle im verbotenen Bereich stehen) das sogenannte *Turm-Polynom* von S:
$$t(S,x) = 1 + t_1x^1 + t_2x^2 + \cdots + t_nx^n$$
Selbst für komplizierte Schachbretter S nebst verbotenen Bereichen sind Turm-Polynome mit verhältnismäßig geringem Aufwand zu berechnen, da es gewisse vereinfachende Operationen gibt, die man auf das Brett anwenden kann. Zunächst können die Reihen sowie auch die Spalten des Schachbretts beliebig vertauscht werden, ohne dass sich für das neu entstehende Brett das Turm-Polynom ändert.

Ferner, wenn das Schachbrett S einschließlich verbotenem Bereich zerlegt werden kann in der Form
$$\begin{matrix} S_1 L_1 \\ L_2 S_2 \end{matrix}$$
wobei L_1, L_2 geeignet dimensionierte Rechtecke nichtverbotener Felder sind, so gilt die erfreulich einfache Produktformel für Turm-Polynome
$$t(S,x) = t(S_1,x) \cdot t(S_2,x).$$
Der Grund dafür ist folgender: Man kann i Türme auf S_1 und $k-i$ Türme auf S_2 platzieren. Dafür gibt es $t_i(S_1) \cdot t_{k-i}(S_2)$ Möglichkeiten.. Dann muss man alle Fälle addieren, also über alle i summieren. So erhält man
$$t_k(S) = \sum_{i=0}^{k} t_i(S_1) \cdot t_{k-i}(S_2)$$
mit $t_0(S_i) = 1$. Daraus ergibt sich die Produktformel durch Multiplikation mit x^k, Summation über $k = 0$ bis $k = n$ und Sortierung der Summanden.

Schließlich sei hier noch ein Entwicklungssatz notiert. Für jedes gegebene Feld P aus dem verbotenen Bereich eines Schachbretts S kann man die t_k(S) möglichen Arrangements von Türmen in zwei Klassen einteilen. Jene *mit* einem Turm auf P und jene *ohne* einen Turm auf P. Wenn ein Turm auf P steht, kann sich kein anderer Turm in der Reihe oder Spalte von P befinden. Dieses um die Reihe und Spalte von P reduzierte Teilbrett sei mit S_r bezeichnet, und es gibt darauf $t_{k-1}(S_r)$ Turm-Arrangements. Im zweiten Fall muss nur das Feld P entfernt werden. Dieses um das Feld P verminderte Teilbrett nennen wir S_e. Also
$$t_k(S) = t_{k-1}(S_r) + t_k(S_e)$$
und daraus ergibt sich analog zur Produktformel der Entwicklungssatz
$$t(S,x) = xt(S_r,x) + t(S_e,x)$$
Wendet man diese leicht zu handhabenden Regeln auf das Dozentenbeispiel an, so erhalten wir zunächst, dass das Turm-Polynom vom Schachbrett in Abbildung 1 mit dem dortigen verbotenen Bereich dasselbe ist wie das Turm-Polynom des folgenden Brettes:

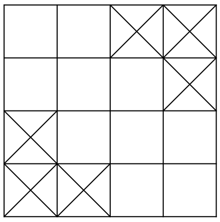

Abbildung 2. *4×4-Schachbrett mit äquivalentem verbotenem Bereich*

Der Übergang erklärt sich durch Vertauschung der 2. und 4. Reihe des ursprünglichen Brettes. Das Turm-Polynom dieses neuen Brettes kann berechnet werden aus den Turm-Polynomen der beiden einfachen 2×2-Teilbretter S_1 und S_2 mit verbotenen Bereichen wie markiert:

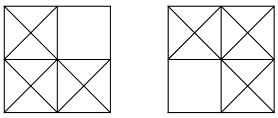

Abbildung 3. *Dekomposition des Brettes von Abbildung 2 in 2x2-Teilbretter S_1 und S_2*

Es ist nämlich ganz offensichtlich

$$t(S_1, x) = t(S_2, x) = 1 + 3x + x^2$$

und somit

$$\begin{aligned} t(S, x) &= t(S_1, x) \cdot t(S_2, x) = (1 + 3x + x^2)^2 \\ &= 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4 \end{aligned}$$

Durch Ablesen der Koeffizienten erhält man für dieses Brett die Anzahlen $t_1(S) = 6$, $t_2(S) = 11$, $t_3(S) = 6$, $t_4(S) = 1$ nebst $t_0(S) = 1$.

Zusammenfassend ergibt sich dann die gewünschte Lösung

$$N_0 = 4! - 6 \cdot 3! + 11 \cdot 2! - 6 \cdot 1! + 1 \cdot 0! = 5$$

Bei der Anwendung dieser Überlegungen auf das Kartenlegeproblem ist $n = 52$. Und die verbotenen Positionen auf dem zugehörigen 52×52-Schachbrett sind alle Felder entlang der Diagonalen von oben links nach unten rechts. Wie viele Möglichkeiten t_k gibt es, k sich nicht angreifende Türme auf dieser Diagonalen zu platzieren? Offensichtlich ist t_k gleich der Anzahl der Möglichkeiten, k der 52 Diagonalfelder auszuwählen, also ganz einfach

$$t_k = \binom{52}{k}$$

Das führt uns sofort zu

$$\begin{aligned} N_0 &= \sum_{k=0}^{52} \binom{52}{k} (52-k)!(-1)^k \\ &= 52!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{52!}) \approx 52! e^{-1} \end{aligned}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit p, dass das Kartenaufdecken ohne Fixpunkt abläuft, der Quotient aus der Zahl der Permutationen ohne verbotene Einträge und der Gesamtzahl aller möglichen Permutationen:

$$p \approx \frac{52! e^{-1}}{52!} = e^{-1} = 0,3679$$

Und die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fixpunkt beträgt

$$1 - p \approx 0,6321$$

Das ist eine doch recht hohe Wahrscheinlichkeit von knapp ⅔ für dieses anfangs als nicht sehr wahrscheinlich eingeschätzte Ereignis. Es ist also günstig, auf das Ereignis gleicher Karten in gleicher Position zu wetten.

Dieser Problemtyp ist nur eine von vielen schönen Anwendungen von Turm-Polynomen in der Mathematik. Sie erweisen sich nicht nur bei kombinatorischen Problemen als äußerst nützliche Hilfsmittel, sondern auch in der Gruppentheorie und in vielen Bereichen der Zahlentheorie.

Auszüge aus dem Eröffnungsvortrag bei der Schacholympiade Dresden 2008 und einem Festvortrag an der Universität Stuttgart 2009.

Prof. Dr. Christian Hesse, Universität Stuttgart, Institut für Stochastik und Anwendungen, Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart.
christian.hesse@mathematik.uni-stuttgart.de

Der Harvard-Absolvent Christian Hesse ist Professor für Mathematik an der Universität Stuttgart. Die Forschungsschwerpunkte des nach seiner Berufung 1991 jüngsten Professors der Bundesrepublik liegen im Bereich der Stochastik. Neben zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten und einigen Lehrbüchern veröffentlichte er 2006 das Schachbuch *Expeditionen in die Schachwelt*, vom Wiener Standard als „eines der geistreichsten und lesenswertesten Bücher, das je über das Schachspiel verfasst wurde" gerühmt. Er wurde zusammen mit den Klitschko-Brüdern, mit Fußballtrainer Felix Magath, dem Film-Produzenten Artur Brauner, der Schauspielerin und Sängerin Vaile und dem Ex-Weltmeister Anatoli Karpov zum internationalen Botschafter der Schacholympiade Dresden 2008 ernannt. Im Mai 2009 ist sein neuestes Buch erschienen: *Das kleine Einmaleins des klaren Denkens – 22 Denkwerkzeuge für ein besseres Leben.*