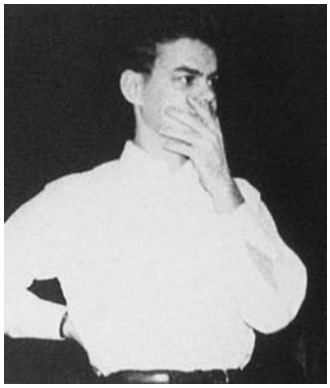
John Griggs Thompson und die Theorie der endlichen Gruppen

Gernot Stroth und B. Heinrich Matzat



John Griggs Thompson (Foto: Prof. G. Pazderski, Oberwolfach 1962)

Der Abel-Preis 2008 wurde am 20. Mai an John Grigg Thompson und Jacques Tits verliehen. Beide wurden für ihre bahnbrechenden Arbeiten in der Gruppentheorie geehrt. Wir bringen hier einen überblick über das Werk von Thompson; ein Überblick über das Werk von Tits wird im nächsten Heft erscheinen. Ein sehr interessantes Interview mit beiden Preisträgern ist im Newsletter of the EMS *erschienen (Heft 70, September 2008), dieses ist im Web unter* www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=news *zu finden. (RSP)*

Es ist der 29. Mai 1832. Evariste Galois schreibt sein mathematisches Testament und verändert damit die Algebra und insbesondere die Gruppentheorie nachhaltig. Unter anderem stellt er fest, dass nicht alle Untergruppen einer Gruppe gleichartig sind. Unter ihnen gibt es einige ausgezeichnete, wir nennen sie heute Normalteiler. Formal sind dies Untergruppen N mit $gN = \{gn \mid n \in N\} = \{ng \mid n \in N\} = Ng$ für alle $g \in G$. Vom strukturellen Standpunkt aus sind sie gekennzeichnet als Kerne von Homomorphismen. Insbesondere gehören $N = \{id\}$ und $N = G$ dazu. Das Besondere an Normalteilern ist, dass man damit neue Gruppen G/N, die so genannten Faktorgruppen bilden kann. Ist $N \neq \{id\}$, $N \neq G$ und ist $|G|$ endlich, so sind $|N| < |G|$ und $|G/N| < |G|$. Dies öffnet die Tür für Induktionsbeweise.

Die wesentliche Fragestellung, der E. Galois nachging, war die nach der Auflösbarkeit von Polynomgleichungen durch Wurzelausdrücke, wie wir sie von den Gleichungen vom Grad zwei, drei und vier kennen. Dazu ordnete er dem Polynom eine Gruppe zu, die heute Galoisgruppe heißt. Gibt es einen Normalteiler N wie oben, so kann man sowohl N als auch G/N wieder Polynome zuordnen, die dann zumeist kleineren Grad haben. Dies führt schließlich auf Gruppen, die keine Normalteiler mehr haben; diese werden einfache Gruppen genannt. E. Galois zeigte, dass für eine einfache Gruppe die Auflösbarkeit der Gleichung äquivalent dazu ist, dass die Gruppe Primzahlordnung hat. Er erkannte aber auch, dass hier eine interessante gruppentheoretische Frage zugrunde liegt. Er nannte Gruppen auflösbar, wenn sie eine Kette von Untergruppen $N_1, \dots, N_r$ besitzen mit $N_1 = \{id\}$, $N_r = G$, so dass N_i in N_{i+1} normal ist mit Faktorgruppe von Primzahlordnung. Der Grund hierfür war, dass die Galoisgruppen zu den auflösbaren Polynomen diese Eigenschaft besitzen. Der andere Extremfall ist der einer nicht abelschen einfachen Gruppe. Für diese bewies E. Galois den ersten Klassifikationssatz:

Sei G eine nicht abelsche einfache Gruppe mit $|G| \leq 60$, so ist $G \cong A_5$.

Man kann auch sagen, dass alle Gruppen der Ordnung kleiner als 60 auflösbar sind. Erst über 100 Jahre später konnten Walter Feit und John Thompson zeigen, dass alle Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind, was schon von W. Burnside vermutet wurde. Dieses war der Auftakt zu einer gewaltigen Serie von Arbeiten, die schließlich mit der Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen endete. In seiner Dissertation hatte J. Thompson eine alte Vermutung von F. G. Frobenius bewiesen: Eine Gruppe G ist nilpotent, d. h. direktes Produkt ihrer Sylow-Gruppen, falls sie einen fixpunktfreien Automorphismus von Primzahlordnung besitzt. In der gemeinsamen Arbeit von W. Feit und J. Thompson wurden die Methoden der Dissertation von J. Thompson weiterentwickelt.

Man findet hier alles, was damals in der Gruppentheorie modern war: Theorie maximaler

John Griggs Thompson

Lebenslauf	*Preise und Ehrungen*
Geboren 13. Oktober 1932 in Ottawa, KS, USA B.A. Yale University 1955 Ph.D. University of Chicago 1959 (Betreuer S. MacLane) Institute for Defense Analysis, 1959–1960 Harvard University, Assistant Professor, 1961–1962 University of Chicago, Professor 1962–1968 University of Cambridge, Rouse Ball Professor of Mathematics, 1970–1993 University of Florida, Professor seit 1993.	Cole Prize 1965 Fields Medal 1970 Senior Berwick Prize 1982 Sylvester Medal 1987 Wolf Prize 1992 National Medal of Science 2000 Abel Prize 2008 John Thompson ist Mitglied der National Academy of Sciences der USA, Fellow der American Academy of Arts and Sciences, Mitglied der Royal Society of London und der Accademia Nazionale dei Lincei. John Thompson ist Ehrendoktor der Universitäten Oxford, Yale, University of Illinois und Ohio State University

Untergruppen, lokale Gruppentheorie (diese wurde durch diese Arbeit erst begründet), Darstellungstheorie, Erzeuger und Relationen. Darüber hinaus war der Umfang gewaltig. Um zu zeigen, dass es keine nicht abelsche einfache Gruppe ungerader Ordnung gibt, wurde ein Beweis von 255 Seiten geführt, der in einem gesonderten Band des Pacific Journal of Mathematics gedruckt wurde.

Diese Dimension, nur um die leere Menge zu behandeln, war schier unglaublich. In der Gruppentheorie sollten noch viele Arbeiten mit einem derartigen Umfang bis zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen erscheinen. Es ist bezeichnend, dass es heute, 45 Jahre später, zwar Vereinfachungen gibt, (im Wesentlichen durch G. Glauberman und H. Bender), diese aber nicht von solcher Durchschlagskraft sind, dass das Odd Order Theorem in die Lehrbuchliteratur Eingang gefunden hätte. Obiges Resultat gewinnt noch zusätzlich an Bedeutung, da R. Brauer 1954 zum ersten Mal seit E. Galois eine brauchbare Methode vorgeschlagen hatte, die endlichen einfachen Gruppen zu klassifizieren. Er hatte gezeigt, dass die Struktur einer einfachen Gruppe, die eine Involution i besitzt, d. h. ein Element $i \neq 1$ mit $i^2 = 1$, im Wesentlichen durch dessen Zentralisator $C_G(i) = \{g \in G \mid gi = ig\}$ bestimmt ist. Insbesondere gibt es zu vorgegebenem $C_G(i)$ nur endliche viele einfache Gruppen G. Der Satz von Feit–Thompson zeigt nun, dass jede nicht abelsche endliche einfache Gruppe eine solche Involution besitzt. Damit hat die Primzahl 2 als Ordnung einer Involution eine besondere Bedeutung für die Theorie der nicht abelschen einfachen Gruppen erlangt.

Ein minimales Gegenbeispiel im Beweis des Satzes von Feit–Thompson wäre eine Gruppe, deren sämtliche echte Untergruppen auflösbar sind. Es lag nahe, diese Bedingung ohne die zusätzliche Voraussetzung ungerader Ordnung zu studieren. *Wie sehen nicht abelsche einfache Gruppen aus, deren sämtliche echte Untergruppen auflösbar sind?* Diese Fragestellung verallgemeinerte J. Thompson im Sinne von R. Brauer. R. Brauer hatte vorgeschlagen, die Normalisatoren von Untergruppen der Ordnung zwei zu studieren (ein Normalisator von H ist die größte Untergruppe von G, in der H normal ist). J. Thompson empfahl, die Normalisatoren von Untergruppen von p-Potenzordnung (kurz p-Untergruppen) für Primzahlen p zu untersuchen. Diese nannte er p-lokale Untergruppen (oder auch lokale Untergruppen). Dies führte auf das Studium der nicht abelschen einfachen Gruppen, deren sämtliche lokale Untergruppen auflösbar sind, der sogenannten N-Gruppen. Deren Klassifikation gelang J. Thompson 1966. In Nizza erhielt er hierfür 1970 die Fields Medaille. R. Brauer sagte in seiner Laudatio: *Up to the early 1960s, really nothing of real interest was known about general simple groups of finite order. Since he (J. Thompson) appeared at the International Congress in Stockholm eight years ago, finite group theory simply is not the same any more.*

Eine interessante Folgerung dieser Arbeit ist, dass eine Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn je zwei Elemente g, h stets eine auflösbare Untergruppe erzeugen. Viel wichtiger aber war die Arbeit über N-Gruppen für die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Sie stellte so etwas wie einen Masterplan für die Klassifikation dar. Viele Ideen, die später weiterentwickelt wurden, finden wir im Kern bereits hierin. Wesentlich weitergehende Ideen sind später bei M. Aschbacher und D. Gorenstein mit der Behandlung von Komponenten in lokalen Untergruppen hinzugekommen.

Die sicherlich berühmtesten Resultate von J. Thompson haben wir damit skizziert. Insgesamt hat John Thompson mehr als 100 Arbeiten publiziert. Einige seiner wichtigen Resultate sind aber unveröffentlicht geblieben. Von denen sollen hier noch einige wenige einer persönlichen Auswahl folgend erwähnt werden: In seinem Vortrag auf dem ICM in Nizza sprach J. Thompson über sogenannte quadratische Paare. Dies sind Vektorräume und zugehörige lineare Gruppen G über $GF(p)$, die von Elementen der Ordnung p erzeugt werden, die ein quadratisches Minimalpolynom besitzen. Für $p > 3$ bestimmte er alle diese Paare. Die Ideen von J. Thompson wurden dann von anderen (Chat Ho, A. Chermak) auch für $p = 3$ weiterentwickelt. Quadratische Paare spielen bei der Analyse p-lokaler Gruppen eine wesentliche Rolle. Die moderne Gruppentheorie, die sich der sogenannten Amalgammethode bedient, wäre ohne diese Resultate undenkbar. In demselben Vortrag erwähnte J. Thompson auch das folgende Problem: Es sei Σ eine Menge von p-Untergruppen einer Gruppe G, die für jedes $g \in G$ und $E \in \Sigma$, stets auch E^g enthält. Weiter gelte für je zwei $E, F \in \Sigma$ und $H = \langle E, F \rangle$ eine der folgenden Aussagen: (1) H is abelsch, (2) die Kommutatoruntergruppe von H ist in Σ, (3) $H \cong SL(2, p^n)$ für $|E| = p^n$. Was kann man über G sagen? F. Timmesfeld hat diese Frage später in seiner Arbeit über Wurzeluntergruppen aufgegriffen und damit einen der wichtigsten Sätze zur Identifikation von Lie-Gruppen geschaffen.

Ausgehend vom Zentralisator einer Involution fand D. Held im Jahre 1968 eine Konfiguration, deren Ordnung er nicht berechnen konnte. Dies sollte die spätere Heldgruppe werden, eine der 26 sporadischen einfachen Gruppen. Die üblichen bekannten Methoden versagten. J. Thompson bewies dann eine Formel zur Berechnung der Ordnung einer Gruppe mit mehr als einer Konjugiertenklasse von Involutionen. Diese Formel ist verblüffend einfach, löste das Problem und wurde auch noch später häufig zur Berechnung von Ordnungen einfacher Gruppen verwendet.

Neben den vielen Resultaten, die J. Thompson bewiesen hat, ist auch ein von ihm geprägter Begriff von herausragender Bedeutung: Für eine p-Gruppe P mit maximaler Ordnung p^n einer abelschen Untergruppe definiert J. Thompson eine Untergruppe $J(P)$ als die kleinste Untergruppe von P, die alle abelschen Untergruppen der Ordnung p^n enthält. Diese Gruppe heißt heute Thompson-Untergruppe. Er benutzte diese Gruppe in seiner Dissertation, um den sogenannten p-Komplement-Satz zu beweisen. Der Nutzen der Thompson-Untergruppe liegt darin, dass sie unter allen Automorphismen von P invariant ist und außerdem $J(Q)$ mit $J(P)$ übereinstimmt für jede Untergruppe Q von P, die $J(P)$ enthält. Die Bedeutung von $J(P)$ für die Behandlung lokaler Gruppen hat sich als fundamental erwiesen. Ist zum Beispiel G eine Gruppe mit einer p-Gruppe H als Normalteiler deren Zentralisator $C_G(H)$ in H enthalten ist, so gilt: Für eine Sylow-p-Untergruppe P von G ist entweder das Zentrum $Z(P) = C_P(P)$ von P oder die Thompson-Untergruppe von P normal in G oder G ist in einem gewissen Sinne ein quadratisches Paar zugeordnet. Dies besagt, dass p-lokale Gruppen in einfachen Gruppen eine recht restriktive Gestalt haben, was letztendlich die Klassifikation der einfachen Gruppen ermöglicht hat.

Nach Abschluss der Pionierzeit der Klassifikationen wandte sich J. Thompson dem Umkehrproblem der Galoistheorie zu. Bei Kenntnis der endlichen einfachen Gruppen bietet sich nämlich als Beweismethode an, die einfachen Gruppen als Galoisgruppen zu realisieren und dann die zusammengesetzten Gruppen durch Lösen von Einbettungsproblemen anzugehen. Eine solche Strategie war bereits erfolgreich von I. Šafarevič für die auflösbaren Gruppen eingesetzt worden. Dieses Programm begann J. Thompson mit einem Paukenschlag. Seine Realisierung der gerade erst entdeckten größten sporadischen Gruppe, des so genannten Monsters, im Jahr 1984 leitete die Aufmerksamkeit vieler Mathematiker auf das Umkehrproblem. Dies führte letztlich dazu, dass in einer Dekade fruchtbaren Miteinanders diverser Arbeitsgruppen der Gruppentheorie, Algebra und Zahlentheorie alle einfachen Gruppen (mit Ausnahme einiger exzeptioneller Gruppen vom Lie-Typ) als Galoisgruppen über Einheitswurzelkörpern und viele davon sogar über $\mathbb{Q}$ realisiert wurden.

H. Wielandt soll nach einer Begegnung mit dem noch jungen J. Thompson gesagt haben: *Dies ist ein verdammt scharfsinniger Mann, von dem man viel lernen kann.* Zumindest die Gruppentheorie und die Gruppentheoretiker haben von John Thompson viel gelernt.

Adresse der Autoren
Prof. Dr. Gernot Stroth
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
06099 Halle an der Saale
gernot.stroth@mathematik.uni-halle.de

Prof. Dr. B. Heinrich Matzat
Interdisziplinäres Zentrum für
Wissenschaftliches Rechnen (IWR)
der Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 368
69120 Heidelberg
matzat@iwr.uni-heidelberg.de